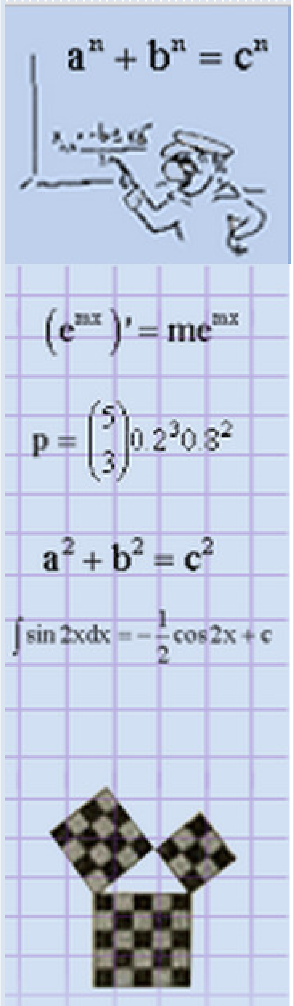
משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית – אשכול מדעים – הפיקוח על הוראת המתמטיקה
המינהל למדע וטכנולוגיה

חוברת העשרה במתמטיקה לתלמידי עתודה מדעית-טכנולוגית

לתלמידים בכיתות ח'

הפרקים בחוברת יילמדו כהעשרה ללימודי המתמטיקה



אב, תשע"ב
אוגוסט 2012

תודה לגופים אשר תרמו את הפרקים להעשרה במתמטיקה לחוברת זו:

העשרה בריבוע
למדא

מצוינות 2000
המרכז הישראלי למצוינות בחינוך

מתמטיקה בהתכתבות –
מכון דוידסון לחינוך מדעי,
מכון וייצמן למדע

תוכן הנושאים לפי סדר ההוראה:

1. מספרי ערפד – מתמטיקה בהתכתבות
מכון דוידסון לחינוך מדעי, מכון וייצמן
2. פיבונאצ'י – סדרת פיבונאצ'י העשרה בריבוע בעולם החי
למדא
3. לשבור את המימד – מתמטיקה בהתכתבות
מכון דוידסון לחינוך מדעי, מכון וייצמן
4. על משחקים ועצים – מצוינות 2000
המרכז הישראלי למצוינות בחינוך

מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

מכון דוידסון לחינוך מדעי
DAVIDSON INSTITUTE OF SCIENCE EDUCATION

מתמטיקה בהתכתבות

מספרי ערפד רמה 3

כתובתנו באינטרנט:
www.weizmann.ac.il/davidson/e-learn

נתקלתם בבעיה טכנית באתר? moodle.davidson@weizmann.ac.il
בכל בעיה אחרת – mathbymail@weizmann.ac.il

צוות התכנית מתמטיקה בהתכתבות

ראש תחום תוכניות למידה מרחוק
ד"ר יוסי אלרן

ראש תכנית מתמטיקה בהתכתבות
מיכל אלרן

יועצת מדעית
ד"ר סבינה שטוקר

מתמטיקאים
פרופ' אדריס תיתי (ערבית)
פרופ' אברהם הרכבי (ספרדית)
ד"ר איירין אייזן (ארה"ב)
יערה אנדולט
רותם גבאי
יונתן וגנר
רועי לחמי
חסן מסאלחה (ערבית)
אמיר מרקוביץ
סאוסן עילבוני (ערבית)
ולידימיר פיבניק
נטליה קוריץ
ג'ניפר רסניק (ספרדית)
נטליה שנקר (ספרדית)

ניהול משרדי
מירי שרתוק-גורודצקי
רוויטל אהרונוב
סיון טראו רוזנשטיין
ג'אן גולדנברג (קנדה)
ניקול דה ברטולו (קנדה)
קרול פסטליכט-פרלמן)מכסיקו)
רינה מיכאל (אוסטרליה)

איורים :מחלקת הגרפיקה של מכון ויצמן למדע וחופית עמרם.
אינטרנט :חופית עמרם
דפוס :הוצאה לאור, מכון ויצמן למדע.

מספרי ערפד ומספרים מעניינים נוספים

(*"מתמטיקה בהתכתבות"* תשע"ב מחזור 1 רמה 3)

שלום וברוכים הבאים לתכנית הבין-לאומית *מתמטיקה בהתכתבות* לכל המשתתפים החדשים, וברוכים השבים לחברינו הוותיקים. אנו מקווים שתיהנו משלל הבעיות, החידות והמשחקים המתמטיים שנביא כאן במהלך השנה.

נפתח את השנה בנושא מפתיע ומשעשע – מספרי ערפד!

לפני שנגיע לעצם העניין, יש צורך בכמה תזכורות בנושאים שונים הקשורים למספרים...

מספרים ראשוניים

מספרים ראשוניים הם מספרים שלמים המיוחדים בכך שהם מתחלקים (ללא שארית) רק בעצמם ובמספר 1.

דוגמה: המספר 3 מתחלק **רק** ב-3 וב-1, ולכן הוא מספר ראשוני.

המספר 6 מתחלק ב-6, ב-2, ב-3 וב-1, ולכן הוא **איננו** מספר ראשוני.

היוצא מן הכלל היחיד הוא המספר 1 בעצמו, שלמרות שהוא מתחלק בעצמו וב-1 (זה אותו דבר במקרה זה) הוא איננו מוגדר כראשוני.

1. א. השלימו את המשפט: המספרים הראשוניים בין 0 ל-30 הם ________________________

____

ב. האם מספר ראשוני יכול להיות מספר זוגי? כן/לא (סמנו את התשובה הנכונה)

גורמים של מספר

גורמים של מספר הם מספרים טבעיים שבהם המספר המקורי מתחלק ללא שארית.

לכל מספר טבעי יש לפחות שני גורמים.

דוגמה: הגורמים של המספר 12 הם 1, 2, 3, 4, 6, 12, מכיוון שהמספר 12 מתחלק בכל אחד מהם ללא שארית.

מספר מושלם

מספר מושלם הוא מספר ששווה בדיוק לסכום כל הגורמים שלו (חוץ מהמספר עצמו).

דוגמה: המספר **28**.

מספר זה הוא מושלם, כי הגורמים שלו הם 1, 2, 4, 7, 14, והסכום שלהם הוא בדיוק 28!

28 = 14+7+4+2+1

2. א. מצאו את כל הגורמים של המספרים הבאים: 23, 24, 25, 50, 120.

הגורמים של המספר 23: ______________________________

הגורמים של המספר 24: ______________________________

הגורמים של המספר 25: ______________________________

הגורמים של המספר 50: ______________________________

הגורמים של המספר 120: ______________________________

ב. כמה גורמים יש למספר ראשוני כלשהו? 1 / 2 / 3 / 4 (סמנו את התשובה הנכונה)

ג. מספר הגורמים של מספר פריק (לא ראשוני) שהוא ריבוע של מספר אחר הוא זוגי / אי זוגי (סמנו את התשובה הנכונה).

ד. מספר הגורמים של מספר פריק (לא ראשוני) שהוא לא ריבוע של מספר אחר הוא זוגי / אי זוגי (סמנו את התשובה הנכונה).

3. א. מצאו מספר מושלם בין 2 ל-10: ________________

ב. סמנו את התרגיל שמתאר את 496 כמספר מושלם מבין התרגילים הבאים:

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 123 + 249 = 496$

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 35 + 70 + 120 + 240 = 496$

$200 + 296 = 496$

ג. המספר המושלם הבא אחרי 496 הוא מספר עם ארבע ספרות. היעזרו באינטרנט וסמנו אותו מבין המספרים הבאים: 8128 / 4444 / 8812 / 8218

במספר המושלם הבא אחרי המספר שאחרי 496 יש 6 / 7 / 8 / 9 ספרות.

מספרי ארבע על ארבע הם מספרים שאפשר ליצור בעזרת ארבע פעמים המספר 4, תוך שימוש בפעולות החשבון: חיבור, חיסור, כפל וחילוק.

לדוגמה, את המספר 7 אפשר ליצור מארבעה מספרי 4 כך: 4+4-4:4=7, או בתוספת סוגריים (4+4)-(4:4)=8-1=7.

4. צרו את המספרים הבאים בשיטת "ארבע על ארבע": 16, 2, 8 וכמה קצת יותר קשים: 6, 9, 15, 60.

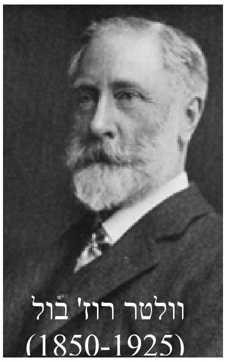
16 = ______________________________ 2 = ______________________________

8 = ______________________________ 6 = ______________________________

9 = ______________________________ 15 = ______________________________

60 = ______________________________

ככל הידוע, המתמטיקאי וולטר רוז' בול (Walter Rouse Ball) חד לראשונה את חידת *ארבע על ארבע* בספרו "שעשועי מתמטיקה ומאמרים (Mathematical Recreations and Essays).


וולטר רוז' בול (1850-1925)

הוא כתב ספר זה בשנת 1892 ביחד עם חברו המתמטיקאי קוקסטר (H.S.M. Coxeter).
בול הצטיין במתמטיקה בלימודיו באוניברסיטת קיימברידג' באנגליה,
ואף זכה מספר פעמים במקומות גבוהים באולימפיאדה.
למרות שהוא לא היה פעיל במחקר מתמטי, הוא היה ידוע בתור מורה
מעולה והתעניין מאוד בשעשועי מתמטיקה ובהיסטוריה של המדעים.
הוא היה גם עורך דין ופעיל בפעילות ציבורית.
ספרו הודפס בארבע עשרה מהדורות והוא נפוץ עד היום.

אם נרחיב את כללי משחק המספרים *ארבע על ארבע* ונאפשר שימוש בחזקות ובשורשים ריבועיים, וכן הצמדה של ספרות זו לזו, אפשר להגיע להרבה מאוד מספרים. לדוגמה: $4\times444=1776$

<u>חזקות של מספרים</u>

כשאנו אומרים שמספר הוא **בחזקת** מספר אחר, אנו מתכוונים שמכפילים את המספר (הראשון) בעצמו כמה פעמים, לפי המספר שבחזקה.
לפעמים נאמר שאנו **מעלים** את המספר הראשון בחזקת המספר השני.
דוגמה: 2 בחזקת 3 (אפשר גם להגיד המספר 2 שמועלה בחזקת 3) מסומן כך 2^3, ופירושו $2\times2\times2$, כלומר 8.
דוגמה נוספת: 2^4, שהוא 2 בחזקת 4, ופירושו $2\times2\times2\times2$, כלומר 16.

<u>שורש ריבועי</u>

שורש ריבועי הוא הפעולה ההפוכה לפעולת ההעלאה בריבוע (בחזקת 2). במילים אחרות, שורש ריבועי *של מספר מסוים* הוא מספר שעונה על השאלה: <u>איזה מספר כפול עצמו נותן את *המספר המסוים*?</u>
השורש הריבועי מסומן כך: $\sqrt{\text{מספר}}$. תוכלו למצוא סימן זה ברוב מחשבוני הכיס.
דוגמה: שורש 4 מסומן כך: $\sqrt{4}$ והוא שווה למספר 2 – $\sqrt{4}=\sqrt{2\times2}=2$ (כלומר 2 הוא המספר *שכפול עצמו נותן 4*).
עוד דוגמה: $\sqrt{25}=\sqrt{5\times5}=5$ ובמלים – המספר 5 הוא השורש של המספר 25.

5. חשבו את הערכים הבאים: 3^2, 4^3, 10^2, 5^4. סמנו את התשובה הנכונה בתרגילים הבאים.

$3^2 = 6 / 9 / 12 / 33$

$4^3 = 12 / 44 / 64 / 444$

$5^4 = 625 / 545 / 555 / 5555$

$15^2 = 15 / 105 / 225 / 155$

השורש של 144 ($\sqrt{144}$) הוא __________

השורש של 256 ($\sqrt{256}$) הוא __________

השורש של 400 ($\sqrt{400}$) הוא __________

השורש של 1089 ($\sqrt{1089}$) הוא __________

לפניכם הרחבה נוספת למשחק *ארבע על ארבע*: לא חייבים להקפיד שיהיו בדיוק ארבע הופעות של המספר 4, ומותר ליצור את המספר המבוקש גם עם פחות מארבעה מספרי 4 (אבל לא יותר). למשל, אפשר ליצור את המספר 40 על ידי שימוש בשלושה מספרי 4 בלבד: $40=44-4$.

6. צרו את המספרים הבאים בשיטת *ארבע על ארבע*. נסו ליצור את המספרים תוך שימוש בכללים החדשים והשתמשו במספר הקטן ביותר של מספרי ארבע האפשרי.

1 = ____________________________________

3 = ____________________________________

11 = ____________________________________

18 = ____________________________________

32 = ____________________________________

46 = ____________________________________

256 = ____________________________________

אבות ראשוניים

בפרק זה נלמד משהו קצת אחר, המשלב בין המספרים הראשוניים, לבין העלאה בחזקת שתיים – אבות ראשוניים. האבות הראשוניים הוגדרו לראשונה על ידי מורה למתמטיקה יצירתי ביותר ששמו טרי טרוטר (Terry Trotter). טרוטר חי בשנים 1941 – 2004. הוא התחיל את הקריירה שלו בארצות הברית, ולאחר מכן עבר לאל סלבדור.

אז מהם אבות ראשוניים?

אב ראשוני מוגדר כמספר ראשוני אשר סכום הריבועים של ספרותיו הוא גם מספר ראשוני. הסכום הזה נקרא *ילד ראשוני*.

דוגמה: המספר 41 הוא אב ראשוני, שכן $4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$, ושני המספרים 17 ו-41 ראשוניים.

במילים אחרות, 41 הוא האב הראשוני של ילד ראשוני, במקרה זה 17. המספר 17 אינו אב ראשוני, כי $1^2 + 7^2 = 1 + 49 = 50$, והמספר 50 הוא מספר פריק (מספר שאינו ראשוני).

7. סמנו את כל המספרים שהם אבות ראשוניים ברשימת המספרים הבאה:

11 / 13 / 17 / 19 / 23 / 29 / 31 / 37 / 41 / 43 / 47 / 53 / 59 / 61 / 67 / 71 / 73 / 79 / 83 / 89 / 97

רמז: קיימים בדיוק חמישה אבות ראשוניים דו-ספרתיים.

אפשר גם למצוא שושלות של אבות ובנים ראשוניים.

דוגמה: המספר 191 הוא אב ראשוני למספר 83, והמספר 83 הוא אב ראשוני למספר 73. המספר 73 הוא סוף השושלת, כי אם נחפש לו בן ראשוני נמצא את המספר 58 שהוא מספר פריק.

8. עד היום, השושלות הארוכות ביותר שנמצאו הן בנות שישה דורות. האב הראשוני הקדמון של אחת משושלות אלה הוא 28999999999. השלימו את שאר האבות והבנים בשושלת.

28999999999 ← _________ ← _________ ← _________ ← _________ ← _________

<u>מספרי פרידמן</u>

מספר פרידמן הוא מספר שאפשר ליצור תוך שימוש בספרותיו יחד עם פעולות החשבון: חיבור, חיסור, כפל, חילוק והעלאה בחזקה. אפשר להשתמש גם בסוגריים והצמדת שתי ספרות זו לזו – בדיוק כמו ב*ארבע על ארבע*. אסור להשתמש בספרות שאינן מרכיבות את המספר.

דוגמה למספר פרידמן עם שימוש בכפל: $21\times6=126$.

דוגמה למספר פרידמן תוך שימוש בהעלאה בחזקה: $5^2=25$. (הכוונה היא ל-5×5).

9. מדוע המספרים הבאים הם מספרי פרידמן? סמנו את התשובה הנכונה.

- המספר 121 הוא מספר פרידמן כי: $121 = 121 / 11\times11 = 121 / 12\times1 = 121 / 11^2 = 121$
- המספר 153 הוא מספר פרידמן כי: $31^5 = 153 / 51 \times 3 = 153 / 5 \times 31 = 153 / 15^3 = 153$
- המספר 289 הוא מספר פרידמן כי: $29+8 = 289 / 82\times9 = 289 / (9+8)^2=289 / 89\times2=289$
- המספר 1206 הוא מספר פרידמן כי: $62-10=1206 / 106^2=1206 / 60+12=1206 / 6\times201=1206$
- המספר 100255 הוא מספר פרידמן כי:

$12005 : 5 = 100255 / 5 \times 20051 = 100255 / 255 \times 100 = 100255 / 10025 + 5 = 100255$

אריך פרידמן (Erich Friedman), שהמציא את מספרי פרידמן, נולד ב-1965 בארצות הברית. הוא מתמטיקאי מוכשר מאוד העוסק הרבה במשחקים מתמטיים. פרידמן הוא אדם רב כישרונות; הוא זוכר בעל-פה את חמישים הספרות הראשונות אחרי הנקודה ב-π, ומצליח לפתור קובייה הונגרית בחמישים שניות!

<u>מספרי פרידמן יפים</u>

מספר פרידמן יפה הוא מספר פרידמן אשר סדר הספרות בביטוי המתמטי המתאר אותו זהה לסדר הספרות במספר עצמו. דוגמה למספר פרידמן יפה: $343 = (3 + 4)^3$

סוג נוסף של מספרי פרידמן יפים הם מספרי פרידמן המורכבים מספרה אחת בלבד, שחוזרת על עצמה מספר פעמים, לדוגמה $11111111111 = ((11-1)^{11} -1\times1):(11-1-1)$

10. הראו שהמספרים הבאים הם מספרי פרידמן יפים: 736, 1285, 2592, 28224, 99999999

<u>מספרי ערפד</u>

מספר ערפד הוא מספר שאפשר לקבל ממכפלה של שני מספרים, המורכבים מהספרות של המספר עצמו. שני המספרים האלה מכונים **ניבים**.

מספר ערפד הוא *מקרה פרטי* של מספרי פרידמן.

פירוש המונח מקרה פרטי הוא שכל מספרי הערפד כלולים בתוך מספרי פרידמן.

דוגמה למספר ערפד: 1827000=210×8700.

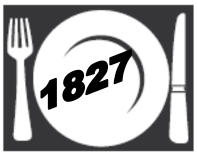
מספר ערפד אמתי הוא מספר ערפד שבו לשני המספרים המוכפלים יש אותו מספר ספרות, ולפחות אחד מהם אינו מסתיים בספרה אפס.

דוגמה למספר ערפד אמתי: 1827=21×87.

מספר ערפד ראשוני הוא מספר ערפד אמתי שבו שני המספרים המוכפלים הם מספרים ראשוניים (בנוסף לתכונה שהזכרנו קודם ששני המספרים צריכים להיות בעלי מספר ספרות זהה, ולפחות אחד מהם אינו מסתיים בספרה אפס).

דוגמה למספר ערפד ראשוני: 117067=167×701

(המספרים 167 ו-701 הם ראשוניים)



11. המספרים :126, 153, 688 ו-1395 הם ארבעה מספרי ערפד. מצאו לכל מספר ערפד את הניבים המתאימים לו מתוך "מחסן הניבים" הבא (רמז – לא צריך להשתמש בכל המספרים במחסן):

3 5 6 8 13 15 21 39 51 53 86 93

126 - הניבים הם: ________________ 153 - הניבים הם: ________________

688 - הניבים הם: ________________ 1395 - הניבים הם: ________________

12. מדוע המספר 103000 אינו יכול להיות מספר ערפד? סמנו את התשובה הנכונה.

א. המספר 103000 אינו יכול להיות מספר ערפד כי אין שום אפשרות ליצור שני מספרים מהספרות של 103000 כך שהמכפלה שלהם תהיה 103000, וזאת בגלל ריבוי האפסים.

ב. המספר 103000 אינו יכול להיות מספר ערפד כי אין שום אפשרות ליצור שני מספרים מהספרות של 103000 כך שהמכפלה שלהם תהיה 103000, וזאת בגלל שהוא מספר זוגי.

ג. המספר 103000 אינו יכול להיות מספר ערפד כי אין שום אפשרות ליצור שני מספרים מהספרות של 103000 כך שהמכפלה שלהם תהיה 103000, וזאת בגלל שהוא מספר גדול מאוד.

13. המספרים: 1260, 2187, 6880 ו-1435 הם ארבעה מספרי ערפד **אמתיים**. מצאו לכל מספר ערפד אמתי את הניבים המתאימים לו מתוך "מחסן הניבים" הבא (רמז – לא צריך להשתמש בכל המספרים במחסן):

12 13 21 27 35 41 60 68 80 81 86 87 88

1260 - הניבים הם: ______________ 2187 - הניבים הם: ______________

6880 - הניבים הם: ______________ 1435 - הניבים הם: ______________

14. אלו מבין המספרים: 1260, 2187, 6880 ו-1435 הם מספרי ערפד **ראשוניים**?

6880 – כן/לא הניבים הם: ______________

124483 – כן/לא הניבים הם: ______________

1435 – כן/לא הניבים הם: ______________

536539 – כן/לא הניבים הם: ______________

<u>מספרים הוגנים</u>

מספר הוגן מוגדר בתור מספר שערכו שווה למספר האותיות בשמו או בדרך אחרת במילים שאפשר לתאר אותו.

דוגמאות למספרים הוגנים בעברית: 4 – ארבע (4 אותיות)

10 – חמש ועוד חמש (10 אותיות)

שימו לב שלפעמים אפשר לתאר את המספר ההוגן בכמה דרכים שונות!

דוגמה: 11 – ארבע ועוד שבע (11 אותיות)

אחד יותר מעשר (11 אותיות)

וכו'.....

<u>מספרים בזבזנים</u>

נגדיר מספר כ*מספר בזבזני* אם אפשר לתאר אותו במספר אותיות הקטן ממספר האותיות בשם של המספר עצמו.

דוגמה: המספר 36 – שש בריבוע (8 אותיות) לעומת שלושים ושש (9 אותיות).

*15. סמנו את המספרים ההוגנים בעברית מבין המספרים:

1 2 3 4 5

9 10 15 17 18

בפורום נדון במספרים הוגנים נוספים, וננסה למצוא גם דוגמאות למספרים הוגנים שניתן לתאר אותם בכמה דרכים שונות. בנוסף לכך נדון במספרים בזבזניים, עליהם תלמדו גם מעט בשאלה הבאה.

*16. לפניכם שני תיאורים. כתבו איזה מספרים בזבזניים הם מתארים:

א. תשע בריבוע (9 אותיות) לעומת שמונים ואחד (10 אותיות) מתאר את המספר ______ כמספר בזבזני.

ב. שש בחזקת שלוש (11 אותיות) לעומת מאתיים ושש עשרה (13 אותיות) מתאר את המספר ________ כמספר בזבזני.

17. סווגו את המספרים הבאים לפי קבוצות - מספרים ראשוניים, מספרי פרידמן, מספרי ערפד, מספרי ערפד אמתיים (ייתכן שיהיו מספרים שישתייכו ליותר מקבוצה אחת):

11 - ___________________________

4 - ___________________________

28 - ___________________________

81 - ___________________________

1255 - ___________________________

127 - ___________________________

1827 - ___________________________

146137 - ___________________________

החוברת הבאה תהיה בנושא: המתמטיקה של החיים...

ביבליוגרפיה וחומר רקע

חוברות העשרה של מכון ויצמן למדע

חומר מקור של יוסי ומיכל אלרן

אתרי אינטרנט מומלצים:

http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0800.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Friedman_number
http://mathworld.wolfram.com/VampireNumber.html
http://mathworld.wolfram.com/PerfectNumber.html
http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1203.html
http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_03_01_04.html
http://hjem.get2net.dk/jka/math/vampires/
http://www.grenvillecc.ca/faculty/jchilds/vampire.htm
http://sprott.physics.wisc.edu/pickover/pubb.html
http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html

לבן ראשוני יכול להיות יותר מאב ראשוני אחד? הדגימו והסבירו.

פיבונאצ'י
סדרת פיבונאצ'י בעולם החי

1. בתחילת כיתה ז' למדתם בנושא "חוקיות" על סדרות של מספרים.

א) בנו סדרה של מספרים לפי ההוראות האלה:

המספר הראשון הוא 1, וכך גם המספר השני;

המספר השלישי הוא סכום שני המספרים שקדמו לו;

המשיכו בדרך זו: כל מספר נוסף בסדרה יהיה הסכום של שני המספרים שלפניו.

רשמו את שנים–עשר המספרים הראשונים של הסדרה.

_____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ __1__

<u>רמז:</u> בכדי לענות על סעיפים ב' ו–ג' עליכם לחשב לפי סימני ההתחלקות.

ב) הסתכלו על הסדרה משמאל לימין, סמנו כל <u>מספר שלישי</u>.

מה משותף לכל המספרים שסימנתם?

ג) סמנו כל <u>מספר רביעי</u> בסדרה, משמאל לימין. מה משותף לכל המספרים שסימנתם?

ד) כל <u>מספר חמישי</u> בסדרה הוא כפולה של 5. תנו דוגמאות לכך.

____

ה) <u>סכום הריבועים</u> של כל שני מספרים עוקבים בסדרה הוא תמיד מספר אחר בסדרה.

תנו שלוש דוגמאות על כך ____

ו) במה מתחלק הסכום של עשרה מספרים עוקבים בסדרה? (בדקו את שלושת הסכומים האפשריים למספרים שכתבתם.)

____

____

____

הסדרה המעניינת שבניתם וחקרתם מעט, נקראת "סדרת פיבונאצ'י" על שמו של המתמטיקאי ליאונרדו פיבונאצ'י.

ליאונרדו פיזנו פיבונאצ'י נולד בעיר פיזה שבאיטליה, כנראה, בשנת 1175 למשפחה עשירה.

כאשר נשלח אביו לשמש איש מֶכֶס באלג'יריה מטעם העיר פיזה, לקח אִתו את בנו. בהמשך ביקר פיבונאצ'י בקונסטנטינופול, במצרים, בסוריה, בסיציליה ובפרובנס. הוא למד מתמטיקה אצל מורים ערביים והיה ער לקלוּת בה הצליחו הסוחרים לנהל את חשבונותיהם. הסוחרים השתמשו בשיטה החשבונית ההינדו–ערבית ובה הספרות אחת עד עשר. בשיטה זו אנו משתמשים עד היום. עד אז נהוג היה באירופה לנהל את החשבונות בשיטת הספרות הרומיות.

עם שובו לאיטליה בשנת 1202 כתב פיבונאצ'י את ספרו החשוב ביותר "ליבר אבצ'י" (Liber Abaci). בספר זה עסק באלגברה ופרסם את השימוש בשיטת החישוב על-בסיס 10 לחישובים במספרים שלמים ובשברים. כדרכם של חידושים רבים גם חידושיו של פיבונאצ'י לא נקלטו מיד, ורק במאה ה- 15 הפכה השיטה לנחלת הכלל.

ספרו נפתח במילים האלה: "תשע הספרות ההודיות הן: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9."

בעזרת תשע הספרות הללו בתוספת הספרה אפס אפשר לכתוב כל מספר.

נוסף על כך, השתמש פיבונאצ'י במספרים שליליים, עסק בפתרון משוואות והיה הראשון שרשם שברים כאשר קו שבר מפריד בין המונה למכנה. ספר חשוב נוסף המיוחס לפיבונאצ'י הוא "גאומטריה פרקטיקה" (Practica Geometria) ללימוד הגאומטריה האוקלידית.

2. תארו לכם שאתם חיים בזמנו של פיבונאצ'י (המאה ה-12), ועליכם לחשב מספר חישובים.
התנסו בשתי שיטות החישוב: הרומית והעשרונית.
מדדו בעזרת השעון את משך הזמן שאורך החישוב בכל אחת מהשיטות.
לפניכם שני מספרים: הראשון- MMCCCXXI ; השני- MMCDXLIX.

א) חברו את המספרים בשיטה הרומית.

ב) "תרגמו" את המספרים לשיטה העשרונית, ובצעו בהם את פעולת החיבור.
(מי ששכח את הסימון בספרות רומיות, יכול להיעזר בערך "ספרות רומיות" באתר ויקיפדיה.)

MMCCCXXI =_________________________

MMCDXLIX =_________________________

האם התוצאה מתאימה לתשובתכם בסעיף א'?______

ג) רשמו תרגיל כפל או חילוק של מספר תלת-ספרתי במספר דו-ספרתי.

דמיינו כיצד הרומאים ביצעו פעולה זו.

ד) מהי מסקנתכם?____

ה) מהם היתרונות של השיטה העשרונית?__________________________________

____

1. מרשם אוכלוסין במושבת הארנבות

לפניכם סדרת מספרי פיבונאצ'י 1 ,1 ,2 ,3 ,5 ,8 ,13 ,21 ,34, 55, 89, 144 ...

מה הביא את פיבונאצ'י "להמציא" את רצף המספרים הזה?

ובכן, מעשה שהיה, כך היה. פיבונאצ'י ניסה לחשב את קצב הריבוי של קבוצת ארנבות, על-פי כמה השערות:

חודש הוא הזמן הדרוש לזוג ארנבות צעירות להתבגר; בהגיע הזוג לגיל חודשיים, הוא ממליט זוג ארנבים חדש, ואז יש זוג אחד בוגר וזוג אחד צעיר. (בהנחה שאף ארנבת אינה מתה בתקופת הנסוי).

מושבת הארנבות מתחילה מזוג אחד של ארנבות צעירות. בחודש הבא הזוג הזה הופך לזוג בוגר (אלה הם שני האיברים הראשונים בסדרה). בחודש הבא כבר יהיו שני זוגות – אחד בוגר ואחד צעיר. בחודש הבא יהיו שלושה זוגות – אחד שהיה בוגר כבר בחודש הקודם, ולו זוג צאצאים צעיר, ואחד שהיה צעיר בחודש הקודם וכעת הוא בוגר.

נציג את התהליך בשתי דרכים: 1) סימון באותיות, 2) איור.

דרך 1: סימון באותיות.

זוג צעיר יסומן באות **צ** (צעיר), וזוג בוגר באות **ב** (בוגר).

כדי לעבור לחודש הבא יש לבצע בכל חודש **החלפה כך:** **צ** ← **ב**

ב ← **בצ**

לפניכם ארבעת מחזורי ההתרבות הראשונים. השלימו עוד חמישה מחזורים.

חודש	זוגות הארנבות	מספר הזוגות
א	צ	1
ב	ב	1
ג	בצ	2
ד	בצב	3
ה		
ו		
ז		
ח		
ט		

א) מה הקשר בין שרשרת האותיות בחודש מסוים לבין האותיות בחודש הבא?

ב) חשבו מה יהיה מספר זוגות הארנבונים כעבור 12 חודשים. היעזרו במודל האותיות.

<u>דרך 2:</u> ציור.

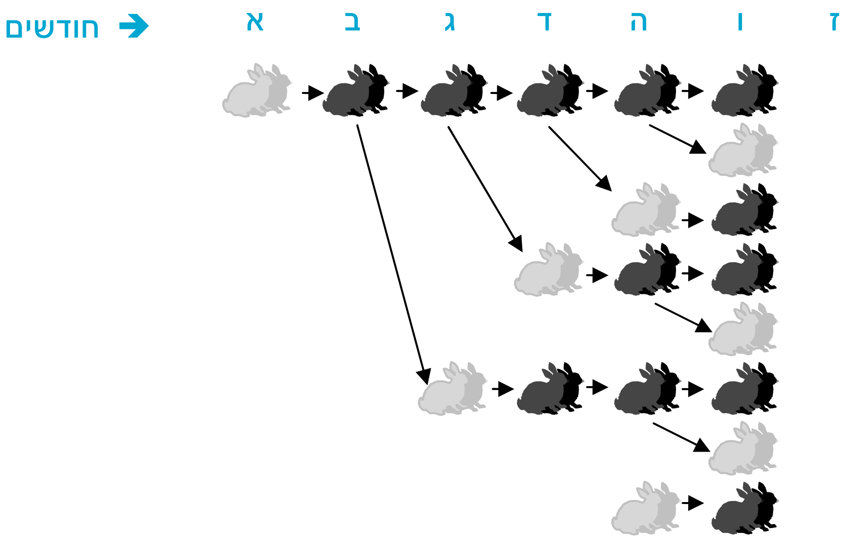
ג) כל טור מייצג חודש.

הארנבות בצבע בהיר מייצגות זוג צעיר.

הארנבות בצבע כהה מייצגות זוג בוגר.

ציירו את הארנבים של החודש השביעי.

כמה זוגות של ארנבונים יהיו? _______________



2. מסתורין בממלכת הדבורים

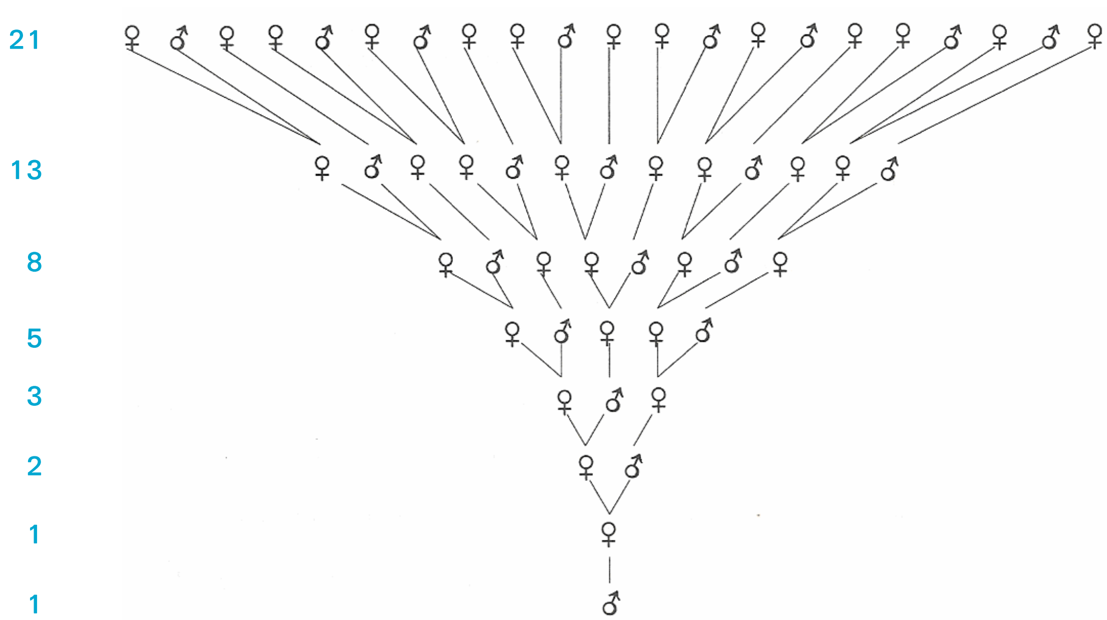
הנה כמה עובדות שאולי לא ידעתם על הדבורים, אותם חרקים חברתיים המביאים תועלת רבה לאדם. בכוורת נמצאים המלכה שתפקידה להטיל ביצים, הפועלות המייצרות דבש ודואגות לטפל במלכה, והזכרים. הזכר בוקע מביצית לא–מופרית שהמלכה מטילה, ואילו הפועלות והמלכה בוקעות מביצים מופרות. פירוש הדבר הוא שלזכר יש רק הורה אחד – אימא, ואילו למלכה ולפועלת שני הורים – זכר ונקבה.

א) בציור שלמטה מתואר אילן היוחסין של הזכר שבדבורים. בתחתית נמצא הזכר, זהו האיבר הראשון בסדרה. כמה הורים יש לו? כמה סבים וסבתות יש לו? מה מינם?

רשמו את מספר האבות והאמהות שקדמו לו שבעה דורות אחרונית.

ב) התבוננו באילן היוחסין של הדבורים. כמה דבורים יש בכל דור? מה מזכירים לכם מספרים אלה?

ג) הוסיפו שני דורות תוך כדי שמירה על הכלל הזה: לכל זכר יש רק אם, ולכל נקבה זוג הורים. מה מספר הדבורים בדורות שהוספתם? האם גם הם איברים בסדרת פיבונאצ'י?



♂ סימון מקובל לזכר ♀ סימון מקובל לנקבה.

האיור לקוח מהספר "מספרים מכושפים" של אלי מיטב

פיבונאצ'י מצא את המספרים הבונים את הסדרה בעקבות מחקרו על התרבות הארנבונים, אך הוא לא הִכיר את כל תכונותיה של הסדרה כפי שהתגלו מאוחר יותר. במאה ה–19 נתן המתמטיקאי לוקס לסדרה את שמה "סדרת פיבונאצ'י", והשתמש בה למחקר הקשור למספרים ראשוניים.
הוא הגדיר סדרה דומה הקרויה על שמו, "סדרת לוקס", שאיבריה הם **1, 3, 4, 7, 11, 18, 29....**

1. א) מה החוקיות של סדרת לוקס? ______________________
מה הקשר בינה לבין סדרת מספרי פיבונאצ'י? ______________________
____
ב) מה יהיה האיבר השמיני? ____________ האיבר העשירי? ____________

2. **יחס הזהב**
א) היעזרו במחשבון כדי למלא את הטבלה שלפניכם. (עִגלו את התוצאות לספרה הרביעית אחרי הנקודה העשרונית.)

זוג מספרים עוקבים בסדרת פיבונאצ'י	מנת שני המספרים
3, 5	5 : 3 =
5, 8	8 : 5 =
8, 13	13 : 8 =
13, 21	21 : 13 =
21, 34	34 : 21 =
34, 55	55 : 34 =
55, 89	89 : 55 =
89, 144	144 : 89 =
144, 233	233 : 144 =
233, 377	377 : 233 =

ב) מה גיליתם? ______________________
ג) בחרו זוג נוסף של מספרים עוקבים בסדרה. ____________
האם גם בהם מתקיימת אותה חוקיות? האם קורה תופעה דומה בסדרת לוקס?
____

פיבונאצ'י
מגע הזהב

אם היטבתם לחשב, בוודאי גיליתם שככל שמתקדמים בסדרה, המנה של כל שני מספרים עוקבים מתקרבת למספר **1.618**

יחס זה שבין כל שני מספרים עוקבים בסדרת פיבונאצ'י נקרא **"יחס הזהב"**.

מתברר שאפשר לחשב את היחס הזה גם בדרכים אחרות, והן יובאו בהמשך.

מסמנים את "יחס הזהב" באות היוונית Φ.

ד) היכנסו לאתר "ויקיפדיה", לערך "יחס הזהב", וענו על השאלות.

יחס הזהב הוא מספר אי–רציונלי. מה פירוש הדבר?

מי גילה לראשונה את יחס הזהב? לפני כמה שנים?

אילו כינויים נוספים יש ליחס הזהב?

מדוע נהוג לסמן את יחס הזהב באות היוונית Φ ?

כתבו לחבר מה אתם זוכרים מהשיעור.

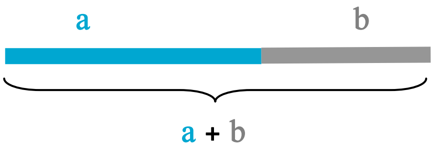
שלח

פיבונאצ'י
יחס הזהב, גאומטריה ואמנות

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$$

יחס הזהב, חיתוך הזהב, מלבן הזהב

היוונים עסקו הרבה ביחסים בין מידות אורך של קטעים. הם גם חקרו שוויון יחסים מסוג מיוחד, שיש לו מקום נכבד בגאומטריה ובאמנות. זהו "יחס הזהב" או "חיתוך הזהב".



מהו "יחס הזהב", וכיצד מקבלים יחס זה?

לפניכם קטע המורכב משני קטעים a ו– b. אורך הקטע הוא a + b.

יחס הזהב מתקבל אם מתקיימת הנוסחה $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$.

במילים אחרות, יחס הזהב מתקיים אם היחס בין סכום הקטעים a ו– b לבין הקטע הגדול יותר שווה ליחס שבין הקטע הגדול לקטע הקטן.

כיצד מחשבים את המספר המייצג את יחס הזהב?

נניח ש– b = 1.

נייצג את a על–ידי המשתנה x, ונקבל את המשוואה: $\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1}$.

לאחר הרחבה למכנה משותף מתקבלת המשוואה: $x^2-x-1=0$.

הפתרון של משוואה זו הוא: ..... x = 1.618034 , זהו "יחס הזהב".

הפלא ופלא, קיבלנו את המספר שהתקבל בסדרת פיבונאצ'י.

1. א) בחרו זוג מספרים עוקבים מסדרת פיבונאצ'י. סמנו את הגדול מביניהם באות a ואת הקטן באות b.

____

סרטטו את הקטע הבנוי משני קטעים אלה.

הציבו את המספרים בנוסחה שלמעלה, ובדקו אם התוצאה מתקרבת ליחס הזהב.

(ככל שתבחרו זוג מספרים גדול יותר, כך תקבלו תשובה מדויקת יותר.)

____

ב) סרטטו קטע שאורכו 21 ס"מ. חלקו את הקטע לשני קטעים (שאינם שווים באורכם) על–ידי סימון נקודה, כך שאם תחלקו את אורך הקטע כולו באורך הקטע הארוך יותר, תהיה התוצאה שווה לחילוק של הקטע הארוך בקצר.

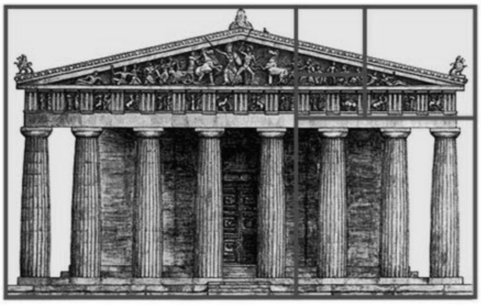
היכן מיקמתם את נקודת החלוקה? ______________________________________

ג) חזרו על התרגיל הקודם, כאשר אורך הקטע הוא 34 ס"מ.

רמז: היעזרו בסדרת פיבונאצ'י.

"מלבן הזהב"

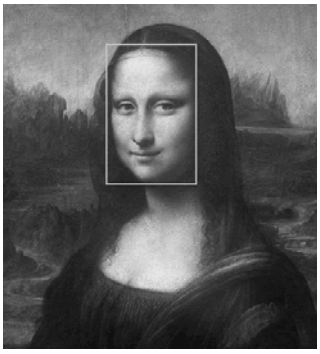
- לפניכם צילום של המקדש הנקרא פרתנון.
  חפשו אודותיו בספרות או באינטרנט.
  היכן נמצא מקדש זה? ________________________
- לאיזה אל או אלה יווניים הוקדש המקום?
  ____
- צילום המקדש היווני חסום במלבן.
  מדדו את אורכו, מדדו את רוחבו, חלקו את אורכו ברוחבו.
  מה המספר שקיבלתם? _______________________



חזית מקדש הפרתנון היווני, ויחס הזהב בחזית הפרתנון

גם בין הצלעות של מלבן זה קיים יחס מסוים. בעיני היוונים סימל "מלבן הזהב" את פסגת היופי והשלמות.

יופי זה יושם באדריכלות היוונית הקלסית, על מבנים שונים, ביניהם הפרתנון. "מלבן הזהב" הוא הצורה המלבנית הפופולרית ביותר באמנות, בארכיטקטורה ובחיי היום-יום. על-פי המחקרים, אנשים מתרבויות שונות מעדיפים אותו על פני מלבנים בעלי פרופורציות אחרות.
גם בציורו המפורסם של ליאונרדו דה-וינצ'י, "המונה ליזה", אפשר לתחום את פניה של העלמה ב"מלבן הזהב".
גם כיום ממשיכים להשתמש בפרופורציה של ב"מלבן הזהב" באדריכלות ובגרפיקה. מספר בניינים מודרניים נבנו בעולם לפי יחס הזהב.



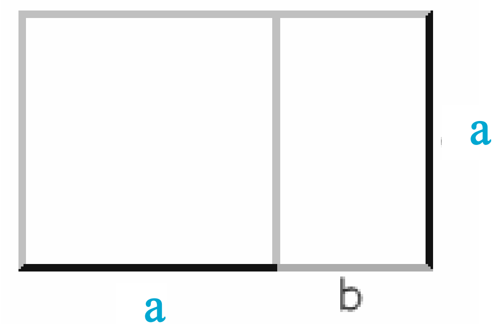
"המונה ליזה", ליאונרדו דה וינצ'י

2. גובהו של בניין האו"ם הוא 152 מטר, רוחב הבניין 95 מטר.
   מה היחס בין הגובה לרוחב? לאיזה מספר הוא קרוב?
   ____

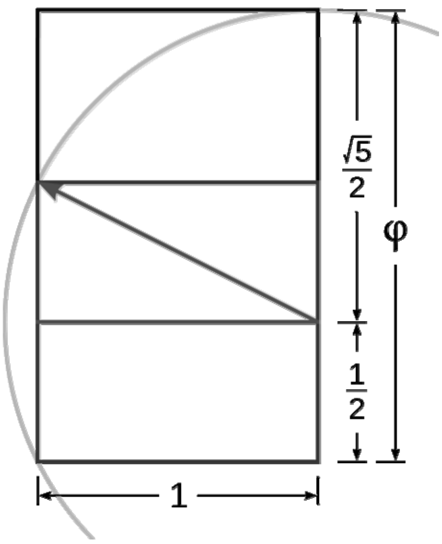
3. מדדו בדייקנות את האורך ואת הרוחב של אחד הכרטיסים המגנטיים שברשותכם, ומצאו את היחס ביניהם. האם הוא קרוב ליחס הזהב? ______________________________

4. סרטטו שני מלבנים שונים, כך שהיחס בין אורכם לרוחבם יהיה קרוב ליחס הזהב.
   במה תוכלו להיעזר כדי לקבל מהר את המידות הנכונות? ______________________

5. קחו דף נייר, וסרטטו עליו "מלבן זהב" שאורכו 21 ס"מ ורוחבו 13 ס"מ.
חתכו מן המלבן ריבוע שאורך צלעו 13 ס"מ.
איזו צורה נותרה? ____________ מה מידותיה? __________________
האם גם עכשיו מתקיים יחס הזהב בין האורך והרוחב? ______________________________
חזרו על התהליך פעמיים נוספות.



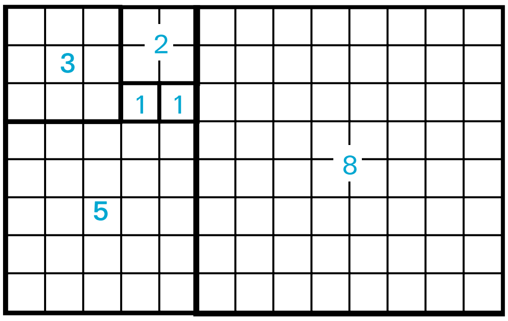
6. פעלו לפי ההוראות, ובנו גם אתם מלבן זהב.
אורך קטע היחידה בסרטוט הוא 10 ס"מ.
א. בנו ריבוע שאורך צלעו הוא קטע יחידה.
ב. העבירו קו מקביל לשני בסיסים נגדיים, כך שיחצה את הריבוע לשני מלבנים, כל אחד בגודל 1 יחידה × 0.5 יחידה (10 ס"מ × 5 ס"מ).
ג. קבעו את חוד המחוגה בקצה הימני של הקו שסרטטתם. פתחו את המחוגה, והקצו מעגל שרדיוסו כאורך האלכסון של המלבן . הקשת שציירתם "תפגוש" את המשך הצלע של הריבוע. השלימו את הצלעות של המלבן החדש.
ד. מדדו את אורך הצלעות. חלקו את אורך המלבן החדש ברוחבו.
מה המספר שהתקבל? ______________________________



פיבונאצ'י
ספירלות, פנטגרמים וצורות אחרות

1. **בניית "ספירלת זהב"**

א) לפניכם סרטוט של מלבן. העתיקו אותו לדף נייר.



ב) המלבן הזה נבנה מריבועים, תחילה נבנה הריבוע הפנימי הקטן שאורך צלעו 1 ס"מ. לידו נבנה עוד ריבוע באותן מידות. כיצד נבנה הריבוע הבא?__________________________________

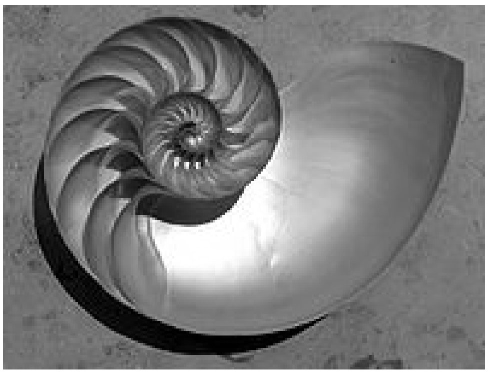
וזה שאחריו?____

ג) המשיכו לבנות ולהגדיל את המלבן. איזה ריבוע תוסיפו עכשיו? מה מידותיו?

____

ד) הניחו את חוד העיפרון על הפינה השמאלית העליונה של הריבוע הפנימי השמאלי (1×1), מתחו קשת קמורה בין שני קדקודים נגדיים בכל ריבוע , והמשיכו אל הריבוע הבא הגובל בריבוע הראשון. עברו בצורה כזו מריבוע לריבוע, מן המרכז כלפי חוץ.
כשתחברו את כל הקשתות, תתקבל "ספירלת הזהב". צורה זו מופיעה בטבע, למשל, בצדפים ובקונכיות, באננס, באצטרובל ובפרחי החמנייה.

מוזיאון "גוגנהיים" בניו יורק
הבנוי הצורת ספירלה



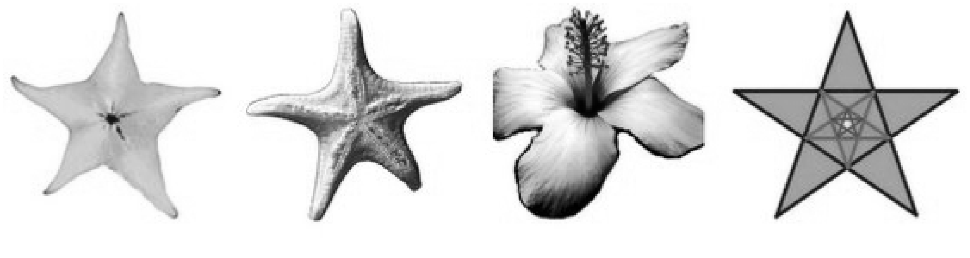
קונכיית החילזון נאוטילוס
הבנויה בצורת ספירלה

פֶּנְטַגְרָם

הסמל הסודי של פיתגורס וחבורתו היה הפנטגרם. זהו כוכב מחומש, הבנוי מחמישה משולשים זהים, ובין המשולשים קיים "יחס הזהב".

פירוש המילה היוונית פנטגרם הוא "חמישה קווים". הפנטגרם מתואר כבר בכתבים העתיקים של חכמי ארם נהריים, שנכתבו לפני כ– 5,000 שנה. הפנטגרם נחשב, בעיני היוונים, צורה בעלת יחסי מידות מושלמים. הבבלים והיוונים הקדומים ייחסו לפנטגרם כוחות על–טבעיים ויכולת כישוף, ורבים נהגו בעת העתיקה לענוד תכשיט שיש בו סמל הפנטגרם, כי הם האמינו שכך הם יהיו מוגנים מפני רוחות רעות.

בשל יחסי המידות המיוחדים של הפנטגרם, אפשר לחזור על צורה זו של כוכב מחומש בתוך עצמה אין–סוף פע



צורה זו מופיעה גם בטבע, למשל בפרח ההיביסקוס, בכוכב הים ובחתך פרי הקרמבולה.

2. היכנסו לערך "פנטגרם" באתר "ויקיפדיה", וענו על השאלות.

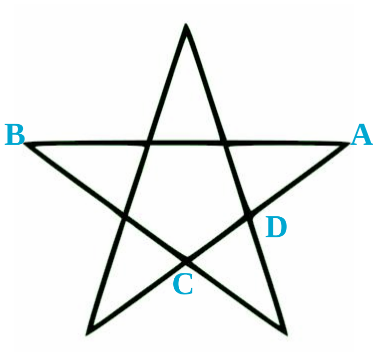
א) איך מכונה הפנטגרם ביהדות? ______________________________

ב) הפנטגרם שימש כסמלה של עיר מפורסמת בשנים 300 – 150 לפנה"ס. איזו עיר? __________

בדגל של אילו מדינות מופיע כיום הפנטגרם? ______________________________

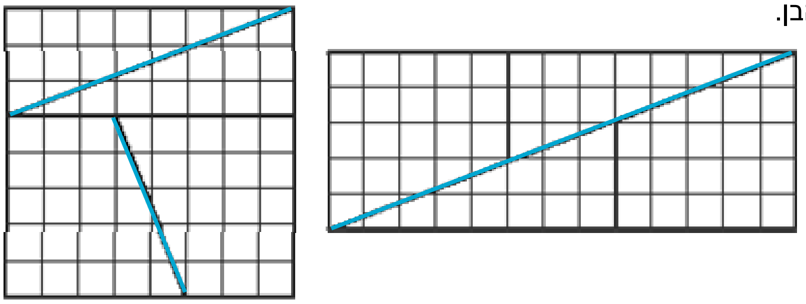
ג) חשבו את היחסים $\frac{AB}{BC}$, $\frac{BC}{AD}$ ו- $\frac{AD}{CD}$ בסרטוטים שלפניכם. מה קיבלתם?

____



3. **איזה קסם!**

בספרו "מספרים מכושפים" מביא אלי מיטב חידה מפורסמת המיוחסת לחידונאי האמריקאי סם לויד הבן.



א) משמאל מסורטט ריבוע. מה אורך צלעו? ____________ מה שטחו? ____________

ב) ציירו ריבוע דומה על דף נייר משובץ, וסמנו עליו את קווי החיתוך.

ג) גזרו את הריבוע לפי החלקים המסומנים עליו, והניחו אותם, כך שיתקבל מלבן.

ד) מה אורך המלבן? ___________ מה רוחבו? ____________ מה שטחו? ________________

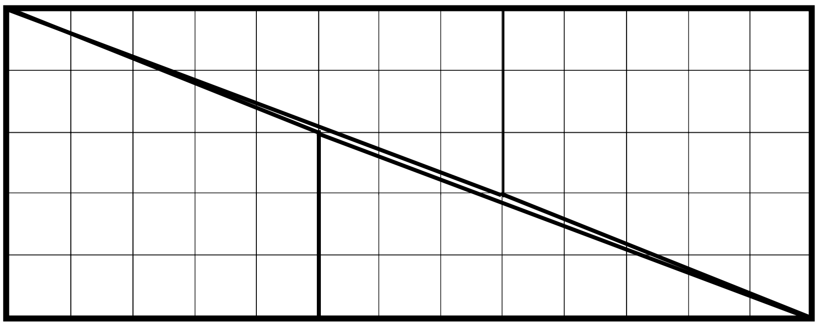
ה) מה מפתיע בממצאים שלכם? ____

ו) מה הקשר בין ממצאים שלכם לבין מספרי פיבונאצ'י?

____

ז) התבוננו בציור שלהלן. האם מסקנתכם תסייע במציאת השטח שנעלם?

____



4. **פיבונאצ׳י בטבע**

א) לפניכם צילום של איצטרובל.

קשקשי האצטרובל מסודרים בצורת ספירלות בשני כיוונים.

בצילום מסומנות הספירלות שבכיוון השעון.

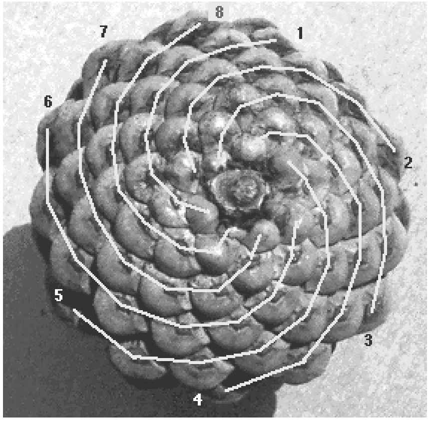
כמה ספירלות מסומנות? ___________________

בעזרת עט צבעוני סמנו גם את הספירלות בכיוון המנוגד

לשעון. כמה ספירלות מצאתם? _____

האם המספרים הללו מוכרים לכם? מנין?

____

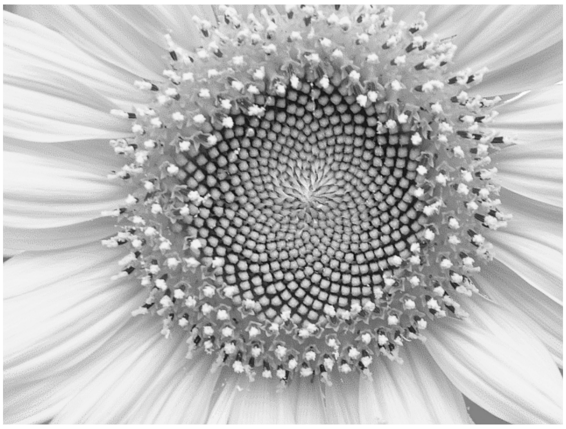


ב) הפרחים בתפרחת החמנייה ערוכים בספירלות. סמנו בעט את כל הספירלות בכיוון השעון,

ובקשו מחבר לסמן על הציור שלו את הספירלות בכיוון מנוגד לשעון.

כמה ספירלות ספרתם? _______________

האם שני המספרים שקיבלתם הם מספרים עוקבים בסדרת פיבונאצ׳י? _________________

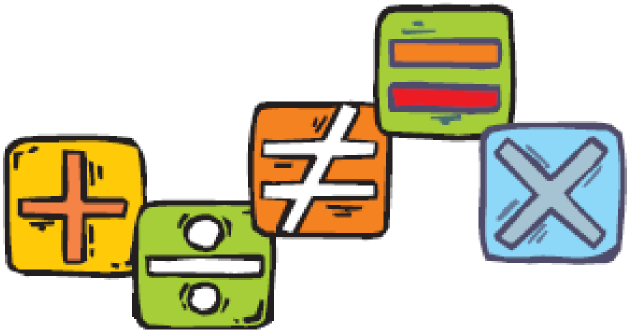


כתבו לחבר מה אתם זוכרים מהשיעור.

שלח

מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

מכון דוידסון לחינוך מדעי
DAVIDSON INSTITUTE OF SCIENCE EDUCATION



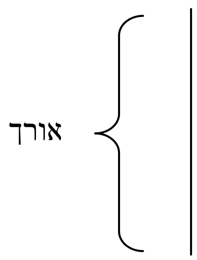
הפעילות שבהמשך הינה חלק מתכנית בינלאומית "מתמטיקה בהתכתבות"

לפרטים נוספים:
www.weizmann.ac.il/zemed/mbm

חוברת זו מופקת בשלוש רמות כאשר רמה 3 מיועדת לתלמידי חטיבות הביניים

חוברת זו פורסמה בשנת תשס"ד

לשבור את המימד!

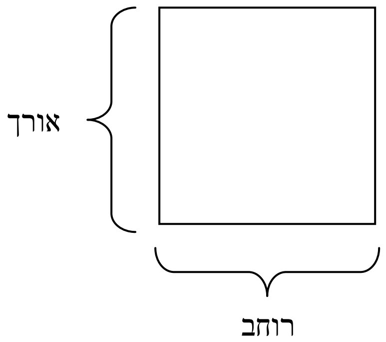


שלום ילדים!

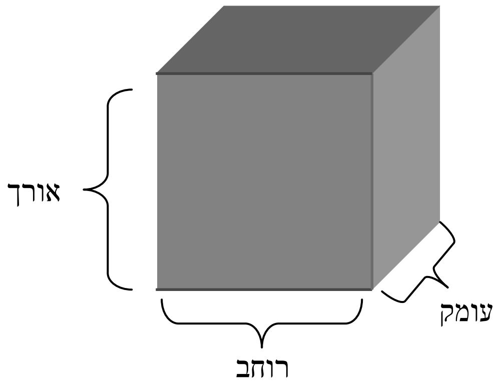
אפשר לצייר דברים שיש להם רק אורך. דוגמה לכך הוא קו ישר:

(אפשר גם לומר שיש לקו רק גובה).

ישנם גם דברים שיש להם אורך ורוחב כמו ריבוע:

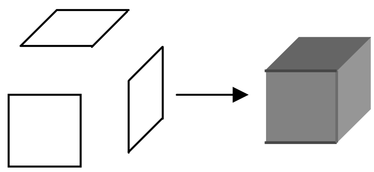


ואילו לקוביה יש אורך, רוחב ועומק:

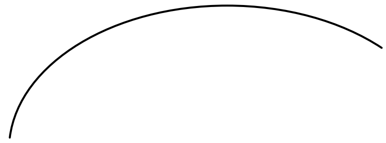


אם נקרא ל: "אורך", "רוחב" ו- "עומק" בשם: **מימד** , הרי נאמר שלקו יש **מימד** אחד (אורך או גובה), לריבוע יש שני **מימדים** (אורך ורוחב) ולקוביה שלושה **מימדים** (אורך, רוחב ועומק).

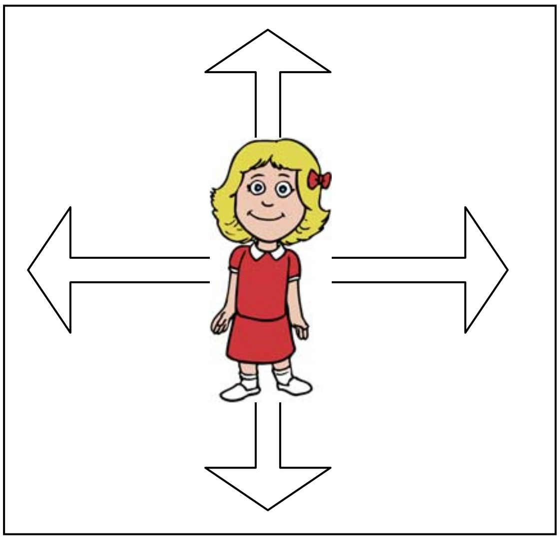
שימו לב שאי אפשר לצייר קוביה *אמיתית* על דף נייר כי לדף עצמו יש רק שני מימדים – אורך ורוחב ("עומק" או יותר נכון עובי הדף הוא קטן מאוד מאוד). למרות זאת, אנו מציירים קוביה באמצעות ריבוע ושתי מקביליות והמוח שלנו גורם לכך שנראה את זה בצורת קוביה "תלת מימדית" (עם שלושה מימדים):

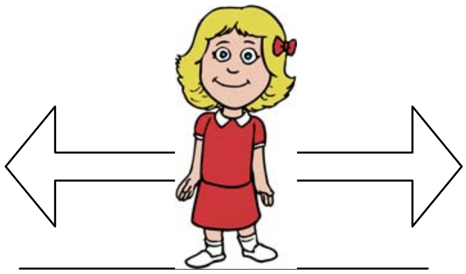


לפעמים קשה לדעת בדיוק מהו המימד של צורה מסוימת. דוגמה מצוינת לכך הוא הקו העקום:

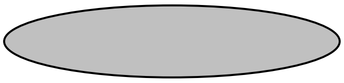


כדי למצוא את מספר המימדים של צורה, מספיק לשאול את השאלה: "אילו הייתי יכול ללכת על גבי הצורה, באלו כיוונים אני יכול ללכת?". אם אפשר ללכת רק קדימה ואחורה (כמו על גבי קו עקום) – אזי יש לצורה מימד אחד. אם אפשר ללכת גם ימינה ושמאלה כמו על גבי משטח ריבועי, אזי יש שני מימדים ואם אפשר גם ללכת למעלה ולמטה, אזי יש שלושה מימדים.

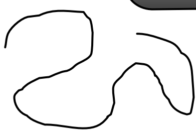




1. רשמו כמה מימדים יש לצורות הבאות:

א. אליפסה:  ________________

ב. גליל:  ________________

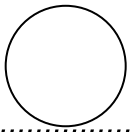
ג. קו עקום:  ________________

ד. בן אדם: ____

ז. פני כדורסל: ____

ו. מעטפת כדור הארץ (האדמה עליה כולנו דורכים) : ________________________

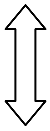
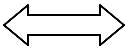
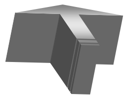
ז. נקודה: ____

ח. היקף העיגול:  ______________________________

עולם דו-מימדי

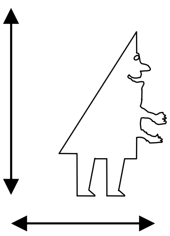
הרבה פעמים משתעשעים מתמטיקאים בכל מיני דברים דמיוניים. שני מקרים מוזרים במיוחד הם העולמות הדמיוניים שהמציאו (כל אחד בנפרד) המתמטיקאים צ'רלס הינטון (Charles Hinton) ו- אדווין אבוט (Edwin Abott). הם פרסמו את עבודותיהם בספרים עלילתיים שנמכרו בעותקים רבים! שני העולמות הדמיוניים שהם המציאו היו זהים בדבר אחד – הם היו עולמות שבהם כל הדברים היו שטוחים!

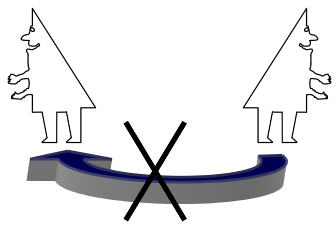
<u>עולם "שטוח"</u>

כל דבר בעולם "שטוח" הוא שטוח כמו דף נייר – כך שלכל דבר יש גובה (אורך)  ורוחב 
אבל <u>אין לו</u> עומק.  (בדומה קצת ל "קומיקס").

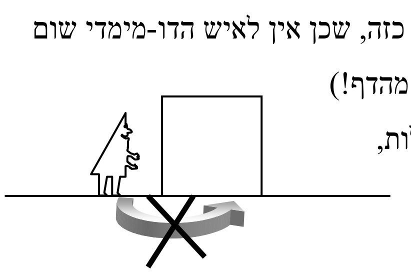
עולם כזה, בו יש אורך ורוחב אך לא עומק הוא עולם עם שני מימדים – (אורך ורוחב) עולם דו-מימדי.

כך למשל צייר צ'רלס הינטון בן אדם בעולם שכזה: היה לו אורך (גובה) – והוא יכול לקפוץ למעלה ולמטה.היה לו רוחב – והוא יכול ללכת ימינה ושמאלה... אבל אין לו עומק! "מותר" לו לזוז רק על פני הדף בכיוונים למעלה, למטה ימינה ושמאלה, אבל אסור לו לצאת מהדף – ולכן הוא לא יכול להסתובב עם הפנים לכיוון השני (שמאל) – כי כדי להסתובב חייבים לצאת מהדף!



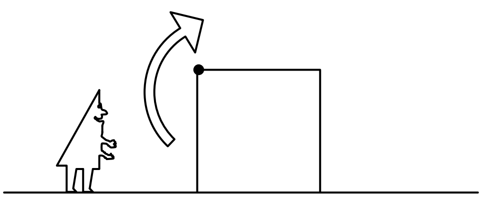


איך יראה בית בעולם דו-מימדי? הבית בציור אינו יכול להיות בית כזה, שכן אין לאיש הדו-מימדי שום דרך להיכנס לתוכו – הוא נתקע בקיר! (הוא כמובן לא יכול לצאת מהדף!)

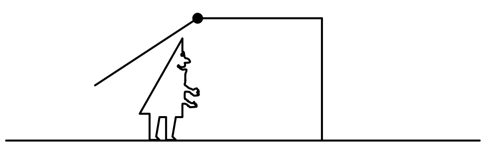


צריך כמובן להוסיף לבית דלת – אבל בעולם כזה, אין דלתות רגילות, שכן דלת רגילה נפתחת תמיד לעומק:

לכן, צריך דלת מיוחדת שעולה ויורדת כך:



1

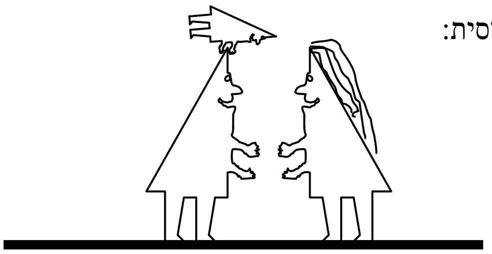


2

אבוט, מנהל בית ספר בלונדון, אנגליה, פרסם את ספרו "Flatland" (או בעברית "ארץ שטוחה") בשנת 1884. הינטון היה גם כן לונדוני, אך לאחר שהתחתן (עם בת של מתמטיקאי מפורסם אחר), עבר לגור בארצות הברית, שם כיהן כפרופסור למתמטיקה באוניברסיטת פרינסטון (Princeton).

ספרו, "פרק בחיי ארץ שטוחה" (An Episode of Flatland), יצא לאור בשנת 1907. הינטון קרא לכוכב הלכת הדו-מימדי אסטריה. מכיוון שאנשי אסטריה לא יכלו להסתובב, הגברים נולדו כאשר הם פונים תמיד ימינה והנשים נולדו כשהן פונות שמאלה. כך יכלו הגברים והנשים להיפגש פנים מול פנים!

הנה ציור של משפחה אסטריאנית טיפוסית:



אחר צהריים טיפוסי בחיי משפחה אסטריאנית

....

2. א. האם הילד/ילדה שמטפס/ת על ראשו של האבא הוא בן או בת? נמקו! ____________________

____

ב. האנשים באסטריה אינם יכולים להסתובב. כיצד בכל זאת יוכל אסטריאני להסתכל אחורנית? __

____

ג. תארו איך שני אסטריאנים יכולים לעקוף אחד את השני! ______________________________

____

ד. איך איש אסטריאני נראה בעיני איש אסטריאני אחר? ________________________________

____

ה. האם יכולות להיות לבית שתי דלתות, אחת מצד שמאל ואחת מצד ימין? אם כן, מה יקרה כאשר שתי הדלתות תהיינה פתוחות בו-זמנית? (רמז: בעולם דו-מימדי כל דבר חייב להיות מחובר לאדמה לפחות במקום אחד, אחרת הוא יפול!)____

____

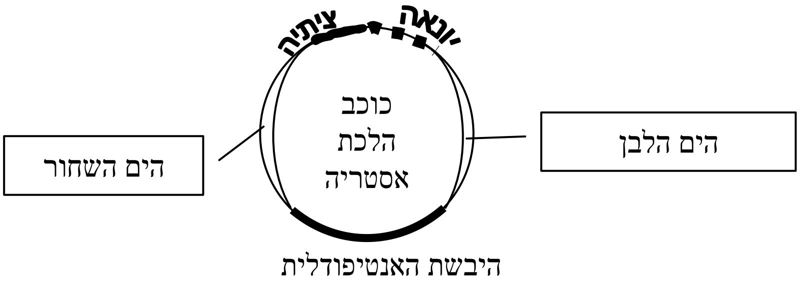
ו. האם יש צינורות באסטריה?____

....

הינטון סיפר שאנשי אסטריה חיים (ומהלכים) על גבי "כוכב הלכת" אסטריה שמסתובב מסביב לשמש ביקום הדו-מימדי. כוכב הלכת הוא בצורת מעגל (כמובן שהוא לא יכול להיות כדור כמו כדור הארץ!) והוא מחולק לשתי יבשות. היבשת הדרומית שנקראת היבשת האנטיפודלית לא הייתה מאויישת (לא גרו עליה אנשים) והיא הופרדה מהיבשת השנייה, הצפונית, ע"י שני ימים – הים הלבן והים השחור.

האסטריאנים הקדמונים לא ידעו שכוכב הלכת שלהם הוא מעגל והם חשבו שהוא פשוט קו. (נזכיר לכם שגם קדמוננו כאן על כדור הארץ חשבו שהעולם הוא שטוח ולא כדורי).

תושבי אסטריה גרו כולם ביבשת הצפונית בשתי מדינות שכנות בשם "יונאה" ו- "ציתיה". אנשי שתי המדינות לא במיוחד הסתדרו זה עם זה, ולעיתים קרובות פרצה מלחמה בין שתיהן.



....

3. א. במלחמות בין היונאים לציתיים נלחמו רק הגברים ולרוב ניצחו הציתיים. מדוע? ____________

____

ב. מאז שהמדענים היונאים גילו שכוכב הלכת "אסטריה" הוא עגול החלו היונאים לנצח במלחמות. מדוע? ____

4. לפניכם שלוש *פעולות*, מתוכן רק אחת מהן ניתנת לביצוע באסטריה. איזו היא, תארו איך מבצעים אותה וענו: מדוע לא ניתן לבצע את הפעולות האחרות?

א. לקשור קשר בחוט ____

ב. לרכב על אופניים ____

ג. לטוס במטוס מיוחד שעף בעזרת כנפיים מיוחדות הדומות בתנועתן לכנפי ציפור ____________

____

5. שני *אסטריאנים* פושעים ניסו לגנוב זהב מהמכרה המלכותי. הם מלאו קופסא קופסא-זו קונוטציה תלת ממדית באורך 20 מטר במטילי זהב, והניחו אותה מעל שני גלגלים מעגליים, כאשר המרחק בין מרכזי הגלגלים הוא 10 מטר והגלגל הראשון מונח מתחת לקדמת הקופסא. פושע אחד עמד לפני הקופסא והשני עמד מאחורי הקופסא והם החלו לגלגל את הקופסא ע"י זה שהפושע שעמד מאחורה דחף את הקופסא קדימה (באותו זמן גם הגלגלים מסתובבים כמובן) ולאחר שהגלגלים התקדמו 10 מטר, הוא הרים את הגלגל האחורי וזרק אותו לפושע שעמד מקדימה. הפושע שעמד מקדימה הניח את הגלגל על הרצפה במרחק 10 מטר לפני מרכז הגלגל הראשון. כך הם התחילו לברוח עם מטילי הזהב, ע"י התהליך המסורבל הזה של דחיפת הקופסא, זריקת הגלגל האחורי והנחתו לפני הגלגל הקדמי שוב ושוב. הם התקדמו לעבר שער המכרה כשלפתע שמו לב שבמרחק 15 מטר ממרכז הגלגל הראשון ישנו כפתור אזעקה מחובר לרצפה.

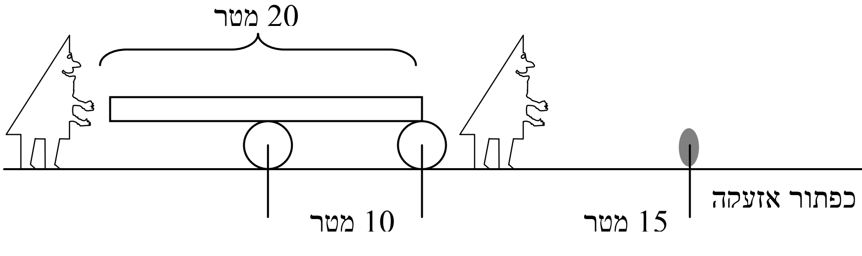
א. מדוע הם מגלגלים את הקופסא בצורה כל כך מסורבלת ולא משתמשים במריצה? ____________

____

ב. כאשר הגלגלים מתקדמים 10 מטר, מה המרחק שמתקדמת הקופסא? (רמז: זה לא 10 מטר ולא תלוי בגודל הגלגלים. המלצה: נסו לבצע ניסוי בעזרת מטבע) ________________________

____

ג. כמה גלגלים (אם בכלל) יעברו מעל כפתור האזעקה? נמקו! (התשובה אינה תלויה בקוטר הגלגלים!) ____



מימדים נוספים

בדומה לעולם דו-מימדי ניתן גם לדמיין עולמות עם מימדים נוספים. עולם חד-מימדי הוא עולם בו היצורים החד-מימדיים הם פשוט קווים (עם עין אחת בקצה הקו!). בעולם כזה – אי אפשר בכלל לצייר את האדמה או את כוכב הלכת (זכרו: גם האדמה וגם פני השטח של הכוכב בעולם דו-מימדי הם קווים חד-מימדיים). למרות זאת, ננסה לתאר מספר תכונות של יצורים בעולם שכזה.

6. א. ציירו יצור חד-מימדי!

ב. באלו כיוונים יכול יצור חד-מימדי לנוע ? ______________________

____

ג. האם יצור חד-מימדי יוכל לעקוף יצור אחר (שנע על אותו קו)? נמקו! ______________________

____

7. *נניח* שיצורים יכולים למסור הודעות ליצורים אחרים רק כשהיצורים צמודים אחד לשני.

א. האם יצור **דו-מימדי** יכול למסור הודעה לחמישה יצורים אחרים בבת-אחת? אם כן, כיצד?
אם לא – למה לא? ______________________

____

ב. האם יצור **חד-מימדי** יכול למסור הודעה לחמישה יצורים אחרים בבת-אחת? אם כן, כיצד?
אם לא – למה לא? ______________________

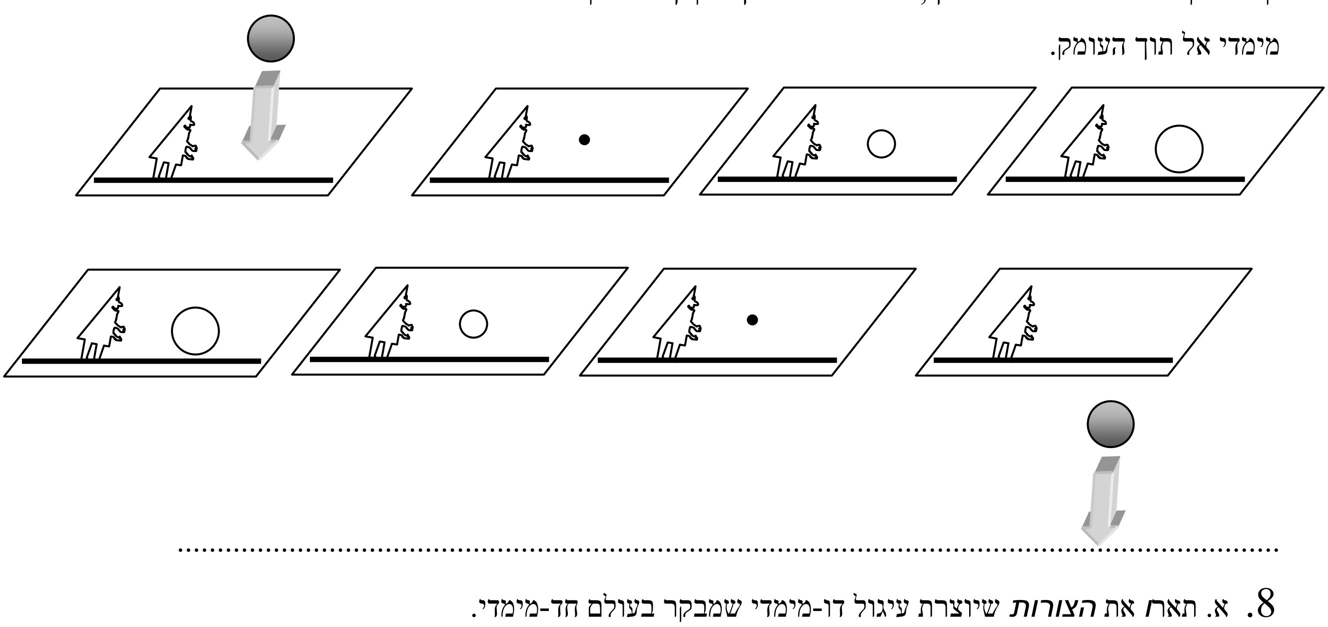
____

האם ניתן לתאר גם עולמות שיש להם יותר משלושה מימדים (למשל עולם ארבע-מימדי)?
התשובה היא בפרוש כן – אך יש להגדיר למה בדיוק אנחנו מתכוונים כאשר אנו אומרים ארבעה מימדים.
יהיו כאלה בוודאי שיאמרו שאנחנו בעצם כבר חיים בעולם שכזה בו בנוסף למימדי האורך, רוחב ועומק יש מימד רביעי והוא הזמן. תאור כזה הוא לא מדוייק מכמה סיבות, אך לא כאן המקום להרחיב עליהן.
רק נרמוז שיש בעצם זהות מסוימת בין זמן וחלל תלת-מימדי: כאשר אנו מסתכלים לשמיים הרחק בתוך החלל – אנו למעשה גם מביטים אחורה בזמן – וזאת בגלל שהאור שמגיע אלינו מכוכב רחוק (בגלל זה אנו בכלל רואים את הכוכב) יצא ממנו לפני שנים רבות מאוד.
האמת היא שבאופן מתמטי **ניתן** לתאר עולם ארבע-מימדי ואפילו לדמיין כיצד יראו צורות הנדסיות בעולם שכזה, מבלי להשתמש בכלל במימד של זמן – אלא במימד נוסף (דמיוני) של אורך.

אפשר להבין קצת על מימדים גבוהים (מימדים גדולים מ-3) אם נראה מהם היתרונות של יצור תלת-מימדי על פני חברו הדו-מימדי. היצור הדו-מימדי רואה רק קדימה. הוא אינו רואה בכלל את תוכנם של הדברים בעולם הדו-מימדי. הוא אפילו לא רואה את גופו המשולש או את גופם של היצורים הדו-מימדיים האחרים כמו שיצור תלת-מימדי (כמונו) רואה אותו. אנחנו, כיצורים תלת-מימדיים, יכולים ממימד העומק שלנו לראות "לתוך" העולם הדו-מימדי ולראות מה יש בתוך כל דבר שיש בעולם הזה!

אנחנו יכולים "לתלות" את העולם הדו-מימדי על הקיר כמו תמונה ולראות כל מה שיש בו – אבל היצורים החיים בעולם הדו-מימדי לא יודעים כלל מה יש למשל בתוך הבתים. אם נהיה "חוצפנים" נוכל אפילו "לשלוף" יצור דו-מימדי מתוך הבית שלו אל המימד השלישי ולהחזיר אותו למקום אחר בעולם הדו-מימדי! היצורים בעולם הדו-מימדי לא יבינו לאן נעלם חברם! הם אינם יודעים כלל על עולם תלת-מימדי או על קיומו של מימד העומק ורק יראו יצור משלהם "נעלם" מתוך ביתו ומופיע במקום אחר כאילו מתוך האויר! באותו אופן, אילו באמת היה עולם ארבע מימדי עם יצורים ארבע מימדיים, הם היו יכולים להוציא בן אדם מתוך עולמו התלת-מימדי ודרך המימד הרביעי להניח אותו במקום אחר בעולם באופן מיידי. אנחנו, בעולמנו היינו פשוט רואים איש נעלם כלא היה ממקום אחד ומופיע כאילו מתוך האוויר במקום אחר! אבל זה כבר מדע בדיוני....

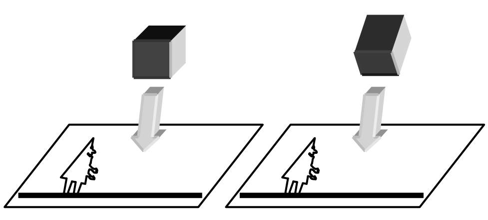
מה קורה אם זורקים כדור תלת מימדי לתוך עולם דו-מימדי? הכדור יחתוך את המשטח (העולם הדו-מימדי) ויצא מהצד השני. אלו צורות ישאיר הכדור במשטח הדו-מימדי כשהוא "חותך" אותו? כאשר הכדור יפגע בעולם הדו-מימדי הוא יראה כנקודה. הנקודה "מתנפחת" לעיגול שהולך וגדל עד שיהיה לו קוטר כקוטרו של הכדור. אחר כך, העיגול "מתכווץ" וקטן עד לנקודה – ואז עוזב הכדור את העולם הדו-מימדי אל תוך העומק.



---

8. א. תאר את *הצורות* שיוצרת עיגול דו-מימדי שמבקר בעולם חד-מימדי.

ב. תארו את הצורות שיוצרת קוביה תלת-מימדית שמבקרת בעולם דו-מימדי כשהיא מגיעה ישרה וכשהיא מגיעה מוטה על צלע אחת.



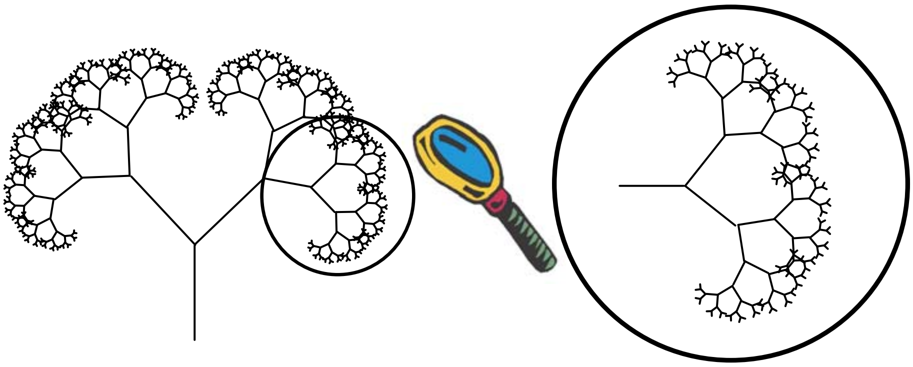
פרקטלים

האם שמתם לב אי פעם לכך שבחיים האמיתיים אין כמעט צורות הנדסיות "מושלמות" כמו עיגולים, פירמידות, קוביות? תחשבו על כך רגע!

ניקח לדוגמה את הכרובית:

ניתן לומר שלכרובית יש צורה מאוד מאוד מסובכת ומורכבת. נוכל גם לשים לב שאם נסתכל דרך זכוכית מגדלת על חלק קטן של הכרובית – פקעת אחת לבנה - הוא יהיה דומה מאוד בצורתו לכל הכרובית.

דוגמה נוספת - הענפים של שיח. גם צורה זו מאוד מאוד מסובכת – ואם נסתכל דרך זכוכית מגדלת על חלק קטן ממנו, נקבל צורה שדומה (אבל לא זהה) לצורת העץ השלם.



רק בשנות השבעים של המאה העשרים, התחילו מתמטיקאים להרהר באפשרות להיעזר במתמטיקה כדי לתאר צורות מסובכות שקיימות בעולם! הם כינו צורות כאלה בשם הכולל: **פרקטלים**.

פרקטל הוא כל דבר שיש לו שתי תכונות:

א. "מורכביות אינסופית" – כלומר צורה מאוד מסובכת ומורכבת.

ב. "דמיון עצמי" – אם מגדילים חלק קטן של הצורה, הוא יהיה דומה באופן כללי לצורה עצמה.

אחד המתמטיקאים המבריקים ביותר שגילה את הקשר בין מתמטיקה, מחשבים, פרקטלים וטבע הוא פרופסור בשם בנואה מנדלברוט. מנדלברוט נולד בפולין בשנת 1924, ואחר כך עבר לצרפת ובהמשך לארצות הברית שם עבד כפרופסור בכמה מהאוניברסיטאות הבולטות בעולם, ביניהם הרווארד, ייל ומכון המחקר של י. ב. מ.. הוא עדיין חי ופעיל היום בתחום חקר הפרקטלים. בין השאר גילה מנדלברוט שגם לצלילים יש מבנים פרקטלים! כאשר אנחנו מאזינים ליצירות מוזיקליות בקונצרט – אנו שומעים אוסף של צלילים מאוד מסובך, אבל גם שמים לב הרבה פעמים שיש ליצירה "אופי" מסויים – כך שחלק קטן מהיצירה דומה באופן כללי ליצירה השלימה!

גם קצב דפיקות הלב שלנו הוא פרקטל (הקצב איננו קבוע - זאת אומרת שהלב שלנו לא דופק כל ½ שנייה **בדיוק** – רק **בערך** כל ½ שנייה). מתמטיקאים הצליחו להשתמש במתמטיקה של פרקטלים כדי

לעזור לרופאים לטפל יותר טוב בחולים הסובלים ממחלות לב! גם בהוליווד התעניינו מאוד בפרקטלים! בטח לא תאמינו אבל זו האמת! יוצרי סרטים משתמשים במחשבים ובמתמטיקה כדי ליצור נופים (למשל של הרים) שנראים אמיתיים – אבל למען האמת הם רק פרקטלים שיצר מחשב! הנה דוגמה לתמונת נוף שיצר אמן מחשב בשם: קן מוסגרייב (Ken Musgrave) מתוך אתרו: http://www.kenmusgrave.com/art_gallery.html
(ניתן גם לרכוש תוכנה שיוצרת תמונות פרקטליות כאלה מ: http://www.pandromeda.com/)

---

9. סמנו √ ליד הדברים שהם פרקטלים:

א. שולחן ☐ ב. עננים ☐ ג. הרים ☐
ד. חסה ☐ ה. השמש ☐ ו. מפת הכבישים של הארץ ☐
ז. פני השטח של הירח ☐ ח. תקתוק של שעון ☐

המתמטיקה של פרקטלים היא מאוד מסובכת – אבל בכל זאת קל מאוד ללמוד לצייר פרקטל מסוג מיוחד – **פרקטל מתמטי**.

פרקטל מתמטי הוא פרקטל שאפשר לצייר אותו בצורה פשוטה כך:

א. מציירים צורה התחלתית כלשהי.

ב. בוחרים מספר נקודות על גבי הצורה ועליהם מציירים בדיוק את אותה הצורה – רק יותר קטן - וממשיכים לעשות כך הרבה שלבים!

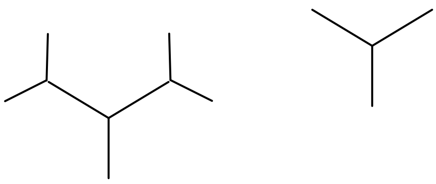
האמת היא שכבר ראיתם פרקטל מתמטי: הפרקטל של העץ בעמוד הקודם! מאוד קל לצייר פרקטל כזה!

---

10. נצייר את פרקטל העץ בצורה הבאה:

שלב א: מציירים את הצורה "Y" :

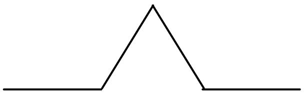
שלב ב: מציירים על כל ענף צורת "Y" קטנה יותר:



א. המשיכו לצייר צורת "Y" על כל ענף עד שלבסוף תקבלו עץ יפה. ככל שתציירו "Y" התחלתי צר יותר, כך העץ הסופי יהיה צר יותר. המשיכו את העץ עוד חמישה שלבים.

ב. אחד הפרקטלים המפורסמים ביותר נקרא "קו קוך".

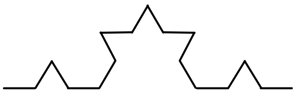
שלב א: מתחילים מקו כזה:



שלב ב: ממשיכים את הפרקטל ע"י החלפת כל קו ישר: ——— מארבעת הקווים הישרים

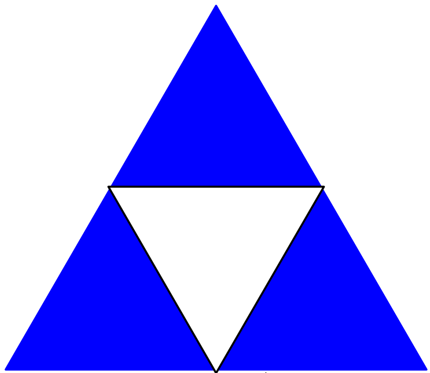
המרכיבים את הצורה בשלב א' בצורה זו : 

לכן, בשלב השני מקבלים את הצורה:

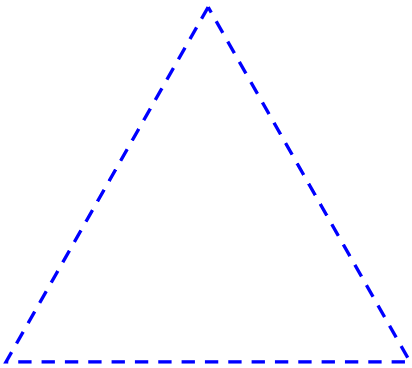


המשיכו את הפרקטל עוד שני שלבים.

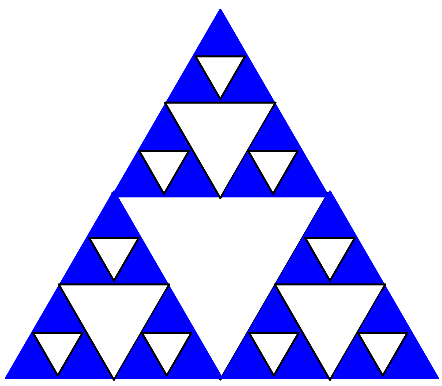
11. פרקטל אינו חייב להתחיל מקו ישר. "משולש סירפינסקי" הוא פרקטל המבוסס על משולשים.
לפניכם ארבעה משולשים שמהווים שלבים עוקבים ביצירת "משולש סירפינסקי".
השלב השני והשלב הרביעי חסרים. השלימו אותם!



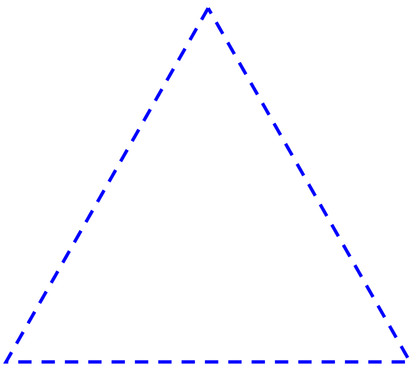
משולש סירפינסקי א'



משולש סירפינסקי ב'

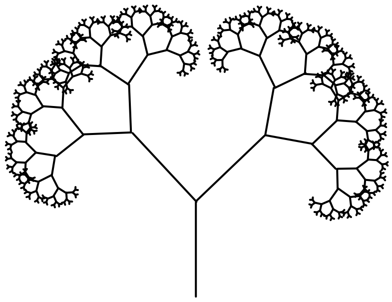


משולש סירפינסקי ג'



משולש סירפינסקי ד'

נשאלת השאלה: מהו המימד של פרקטל? נסתכל על השטח שהפרקטל "תופס". האם הוא דומה למשהו חד-מימדי כמו קו, משהו דו-מימדי כמו ריבוע או משהו תלת-מימדי כמו קוביה? כדי לענות על השאלה הזו, נזכור שניתן לחשב כמה מימדים יש לצורה מסוימת גם לפי מספר הכיוונים שאפשר "ללכת" עליו. על קו ניתן ללכת רק קדימה ואחורה – לכן הוא חד-ממדי. על משטח ריבועי (כמו דף נייר) ניתן ללכת קדימה אחורה, למעלה ולמטה – ארבעה כיוונים - ולכן הוא דו-מימדי.



ניקח כדוגמה את העץ:

מצד אחד, כולו עשוי מקווים ישרים. אילו היינו יכולים "ללכת" עליו, בוודאי היינו יכולים ללכת רק קדימה או אחורה. אם כך נראה שהמימד שלו צריך להיות אחד.

מצד שני – העץ הפרקטלי לא "נראה" לנו צורה חד-מימדית! הוא "תופס" כמעט שטח של ריבוע שהוא דו-מימדי!

היגיון אומר שהמימד של פרקטל ה "עץ" צריך לפיכך גדול יותר מ-1 וקטן מ-2. אבל האם ייתכן דבר כזה – מימד שאינו מספר שלם?!

מנדלברוט ומתמטיקאים נוספים הסתכלו על הפרקטלים והבינו פתאום שהתשובה לשאלה הזו היא חיובית! הפרקטלים הם באמת צורות בעלי מימדים שאינם מספר שלם! למימד של פרקטל קוראים "**מימד שבור**" והוא מספר מעורב – מספר שחלק ממנו הוא שלם וחלק ממנו - שבר! לכל הפרקטלים יש מימדים שבורים וישנה נוסחה מתמטית המחשבת מה ערכו של המימד הזה. הנוסחה הזאת נכונה גם עבור פרקטלים בטבע שאינם פרקטלים מתמטיים, אך היא מסובכת ולא נלמד אותה כאן. למרות זאת, מהסתכלות על פרקטל (לאחר מספר שלבי פיתוח) ניתן לנחש בערך מה המימד הפרקטלי – או לפחות לנחש בין אלו שני מספרים שלמים המימד נמצא.

....

12. נחשו בין אלו שני מספרים שלמים יהיה המימד הפרקטלי השבור של הפרקטלים הבאים:

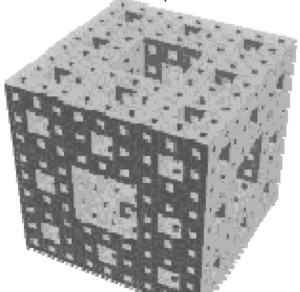
א. פרקטל העץ: מימד שבור בין 1 ל- 2 .

ב. "קו קוך": מימד שבור בין ___ ל- _____ .

ג. "משולש סירפינסקי": מימד שבור בין ___ ל- _____ .

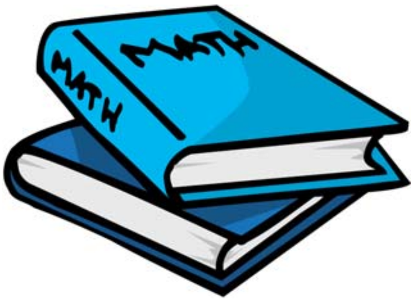
ד. "ספוג סירפינסקי": מימד שבור בין ___ ל- _____.

ה. "קו קנטור": מימד שבור בין ___ ל- _____.



ספוג סירפינסקי

ביבליוגרפיה וחומר רקע



ספרים:

חוברות מתמטיקה של היחידה לפעולות נוער של מכון וייצמן למדע

חומר מקור של יוסי ומיכל אלרן

The Unexpected Hanging, Martin Gardner

Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers, Martin Gardner

אתרי אינטרנט:

http://math.rice.edu/~lanius/frac/index.html

http://www.alcyone.com/max/lit/flatland/

http://www.calormen.com/Flatland/

http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/dimension.shtml

http://www.shodor.org/interactivate/lessons/pattern2.html

http://www.kenmusgrave.com/

המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence through Education

מצוינות 2000
בחסות קרן סקירבול

המכון למצוינות בהוראה

על משחקים ועצים

גלי שמעוני, צבי שלם
ד"ר חיים שפירא

מערכת: גלי שמעוני, ד"ר אבי פולג

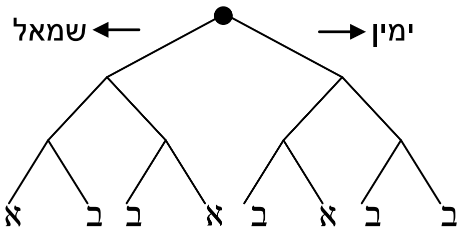
ב. אסטרטגיות בעצי משחק יסודיים

התבוננו בעצי המשחק הבאים, המתארים משחקים של שני שחקנים. כל משחק מתחיל בקדקוד העליון של העץ (מודגש בנקודה). השחקן הפותח בוחר את אחת משתי הדרכים לרדת אל הצומת הבא. בשלב הבא בוחר השחקן השני את אחת משתי הדרכים לרדת את הצומת הבא. כך נמשך המשחק, עד אשר מגיעים לקצהו של אחד מענפי העץ. אם בקצה זה רשומה האות א, הרי שהניצחון הוא של השחקן הפותח. אם רשומה האות ב, הניצחון הוא של השחקן השני.

עליכם למצוא למי משני השחקנים יש דרך לנצח במשחק.

תארו במילים את תכנון הניצחון (השתמשו במילים ימין ושמאל):

1.



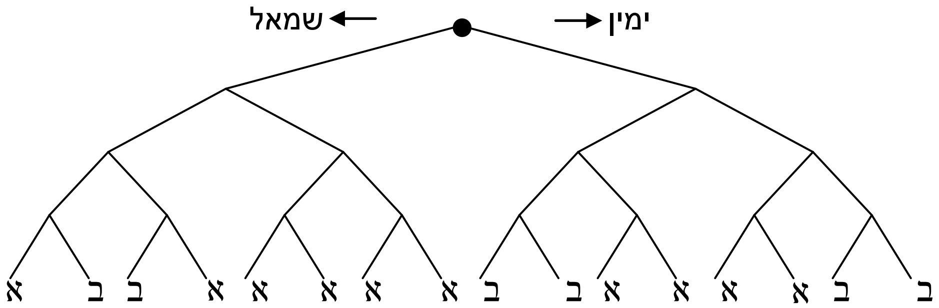
השחקן שיכול לתכנן ניצחון הוא: _____

תיאור שיטת הניצחון: ____

____

____

2.



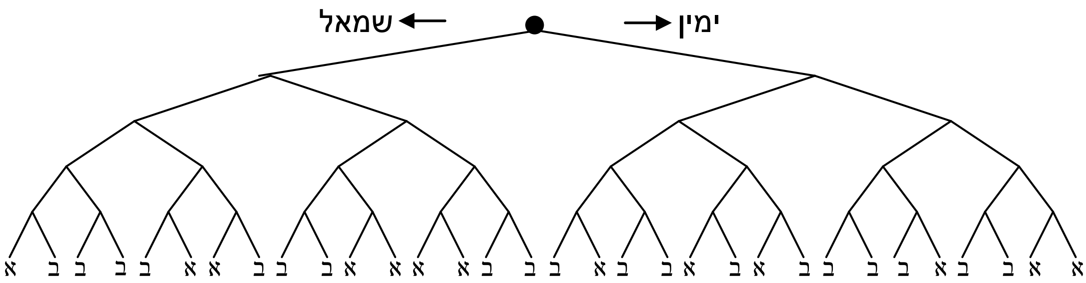
השחקן שיכול לתכנן ניצחון הוא: _____

תיאור שיטת הניצחון: ____

____

____

.3



השחקן שיכול לתכנן ניצחון הוא: _____

תיאור שיטת הניצחון: ______________________________________

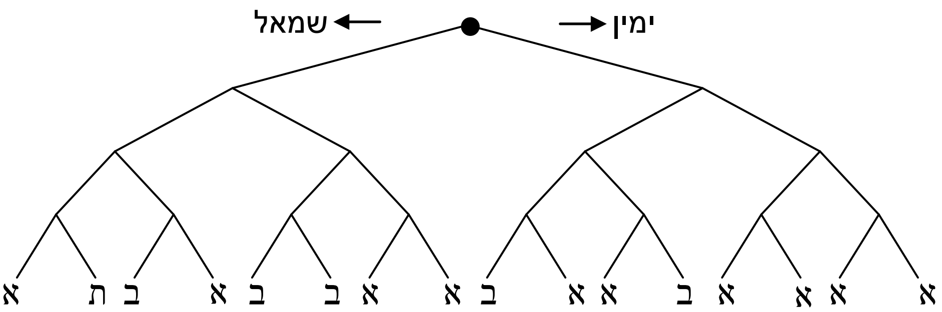
____

____

____

במשחק הבא הוספנו בתחתית העץ אלמנט נוסף. האות "ת" מסמנת מצב בו המשחק מסתיים בתיקו.

.4



השחקן שיכול לתכנן ניצחון הוא _____ (מלאו רק אם לדעתכם יש כזה)

תיאור שיטת הניצחון או הסבר למה אין כזו ______________________________

____

____

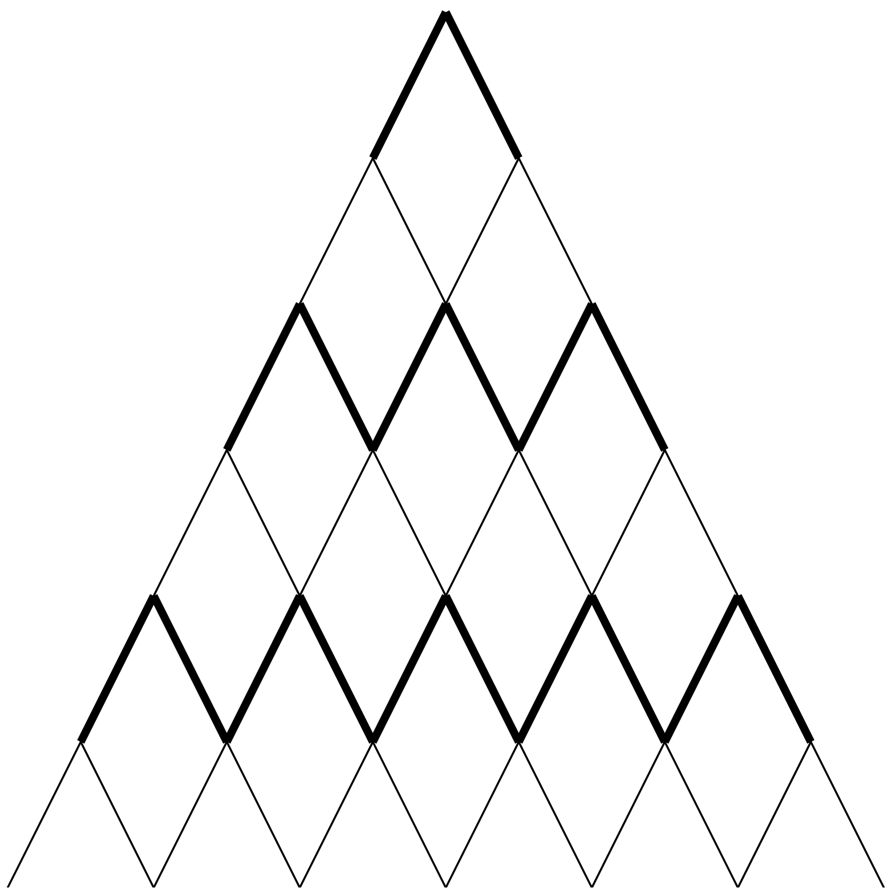
____

דף תלמיד 2

ג. אסטרטגיות בעצי משחק מורכבים

עצי המשחק המופיעים בשאלות הבאות מורכבים יותר מקודמיהם. הענפים שלהם משתלבים אלה באלה. כמו במשחקים הקודמים, שחקן א הוא זה הפותח במשחק. בכל משחק עליכם לגלות למי משני השחקנים יש דרך לנצח במשחק. כמו כן עליכם למצוא אסטרטגיה זו ולדעת להסביר אותה.

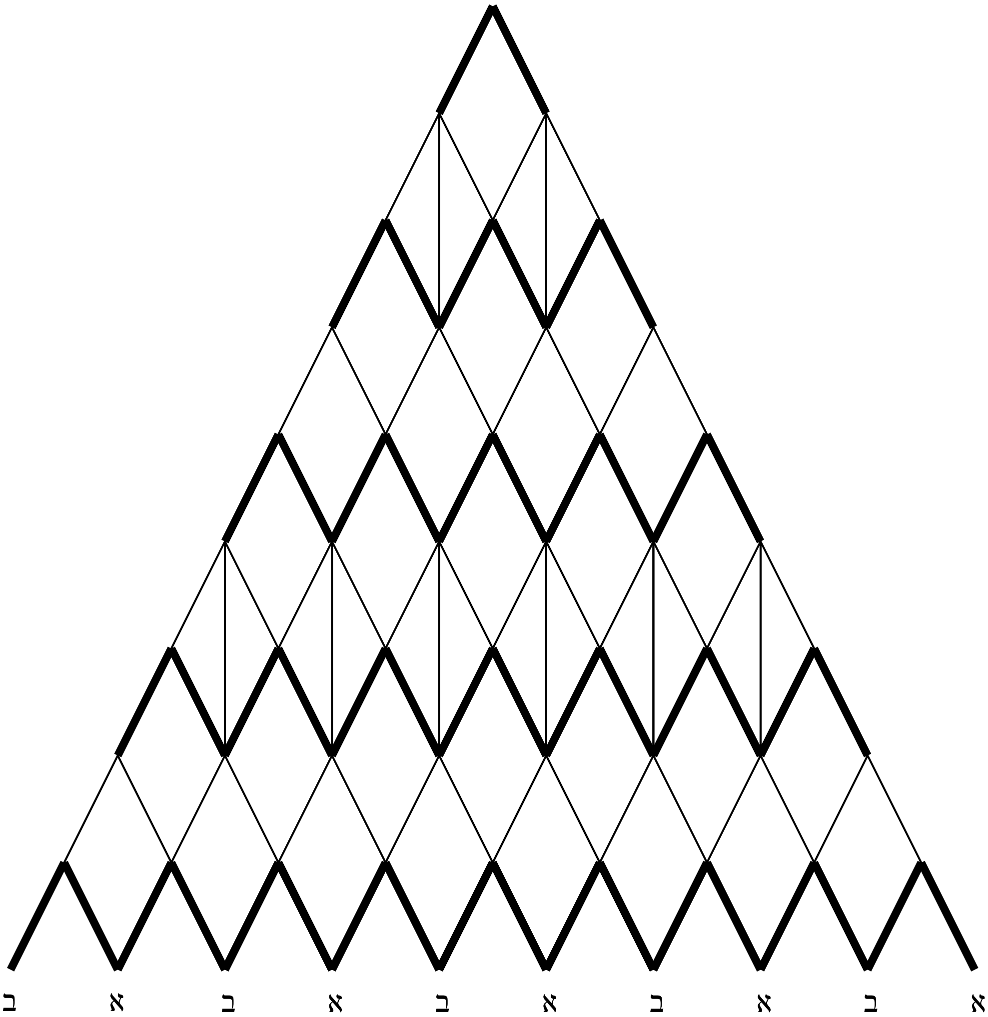
1.



ת א א ב ב א א

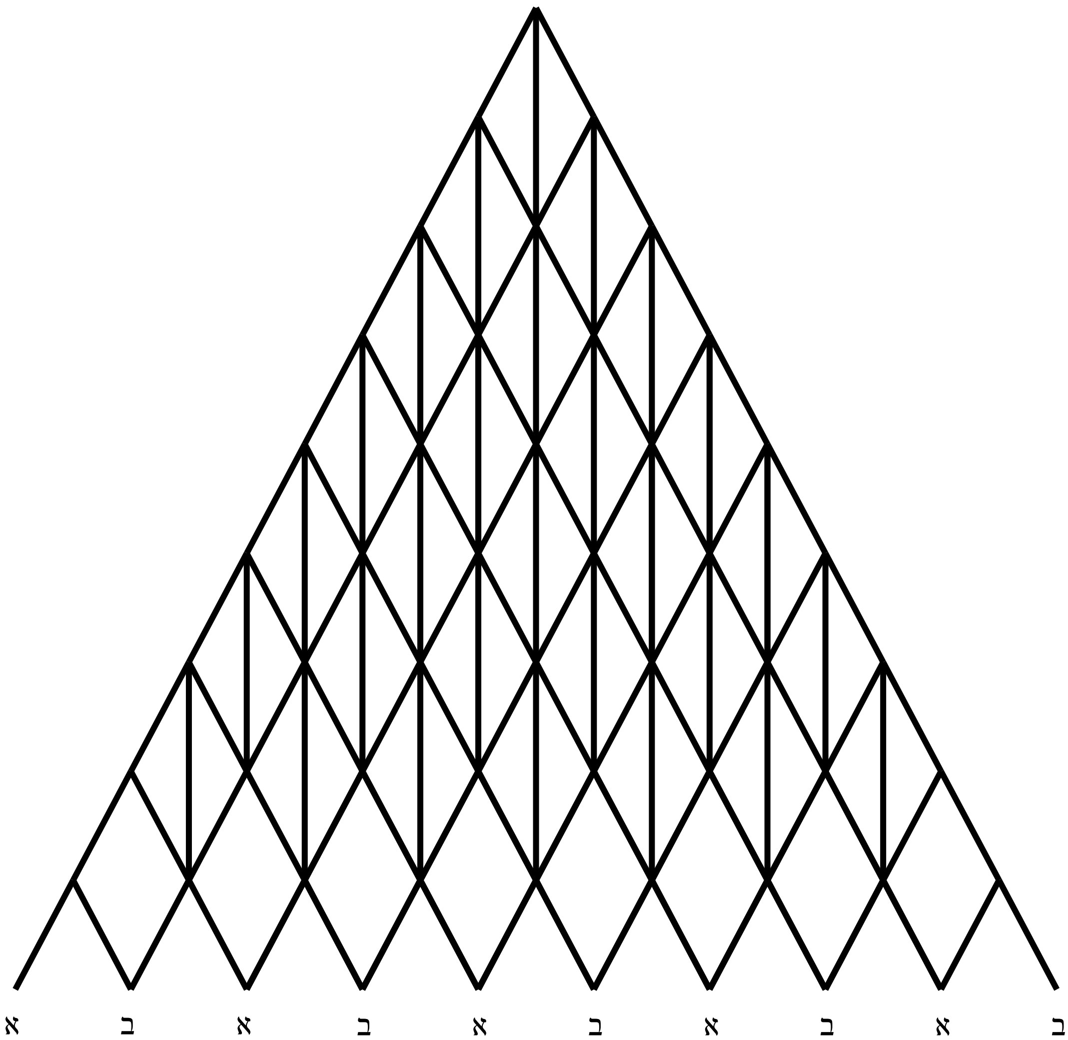
דף תלמיד 2

2.



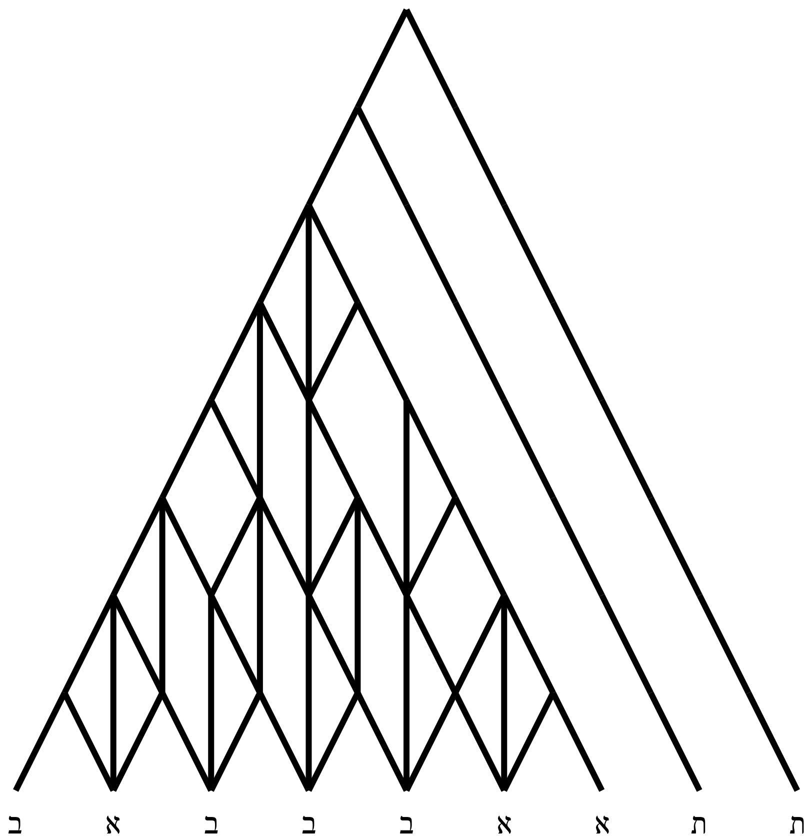
דף תלמיד 2

.3



דף תלמיד 2

4.



דף תלמיד 3

משחק הצ'ומפ

במשחק הצ'ומפ, כל שחקן בתורו בוחר משבצת שעדיין אינה מחוקה, ועליו למחוק אותה ואת כל המשבצות שמעליה ומימינה. המפסיד הוא זה שנאלץ למחוק את המשבצת המסומנת באות A. המשחק הזה חייב להסתיים בניצחון של אחד משני השחקנים והתפקיד שלכם הוא לשחק את המשחקים ולנסות לגלות: למי מהשחקנים יש אסטרטגיה לניצחון, ומהי?

משחק 1 – לוח 5×5

A				

A				

A				

A				

A				

A				

A				

A				

משחק 2 – לוח 2×7

A								

A								

A								

A								

A								

A								