



משרד החינוך

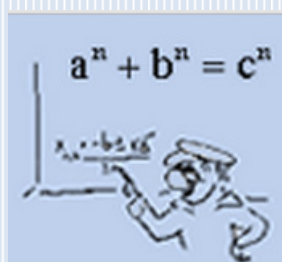


המזכירות הפדגוגית – אשכול מדעים – הפיקוח על הוראת המתמטיקה
המינהל למדע וטכנולוגיה

חוברת העשרה במתמטיקה לתלמידי עתודה מדעית- טכנולוגית

לתלמידים בכיתות ז' – ט'

הפרקים בחוברת יילמדו כהעשרה ללימודי המתמטיקה
בחטיבת הביניים במהלך שלוש שנות החטיבה



$$(e^{mx})' = me^{mx}$$

$$p = \binom{5}{3} 0.2^3 0.8^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$$



אב, תשע"ב
אוגוסט 2012

**תודה לגופים אשר תרמו את הפרקים להעשרה
במתמטיקה לחוברת זו:**

**העשרה בריבוע
למדא**

**מצוינות 2000
המרכז הישראלי למצוינות בחינוך**

**מצוינות רחובות – מכון וייצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים**

**מתמטיקה בהתכתבות –
מכון דוידסון לחינוך מדעי,
מכון וייצמן למדע**

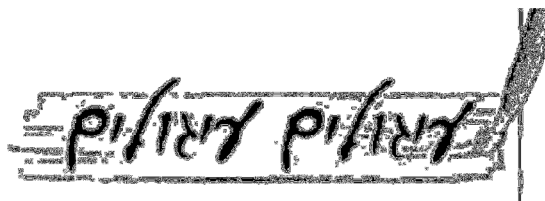
שבילים למצוינות – מט"ח

**תכנית המצוינות במתמטיקה – הטכניון
הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים**

תוכן הנושאים לפי סדר ההוראה:

1. עיגולים עיגולים – מצוינות רחובות
מכון וייצמן למדע, המחלקה להוראת המדעים
2. חיוך מנצח – מצוינות 2000
המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
3. מספרי ערפד – מתמטיקה בהתכתבות
מכון דוידסון לחינוך מדעי, מכון וייצמן
4. משחקים במספרים – שבילים למצוינות
מט"ח
5. שאלות על מספרים ראשוניים – שבילים למצוינות
מט"ח
6. חבורות – מצוינות רחובות
מכון וייצמן למדע, המחלקה להוראת המדעים
7. שעון על לוח השנה – שבילים למצוינות
מט"ח
8. אחרון לבחירתכם – מצוינות רחובות
מכון וייצמן למדע, המחלקה להוראת המדעים
9. שטחים וגפרורים, טנגרם – שבילים למצוינות
מט"ח
10. לשבור את המימד – מתמטיקה בהתכתבות
מכון דוידסון לחינוך מדעי, מכון וייצמן
11. משחקים בלוחות מספרים – שבילים למצוינות
מט"ח
12. על משחקים ועצים – מצוינות 2000
המרכז הישראלי למצוינות בחינוך

13. פיבונאצ'י – סדרת
פיבונאצ'י בעולם החי
למדא
העשרה בריבוע
14. מספרים ממשיים –
למדא
העשרה בריבוע
15. עניין של אופטימיזציה –
מציאות 2000
המרכז הישראלי למציאות בחינוך
16. אופטימיזציה בחיי יומיום –
שבילים למציאות
מט"ח
17. עקרון שובר היונים –
התכנית למציאות -
טכניון
הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים



לפניך משולש מעיגולים. בכל אחד מקדקודיו עיגל מלא והשאר ריקים. כל עיגול (חוץ מאלה שבקדקודים) נמצא, למעשה, בשלוש שורות: אחת אופקית, ושתיים אלכסוניות.

שחק עם חברך במשחק הבא:

כל משתתף בתורו ממלא את אחד העיגולים הריקים.

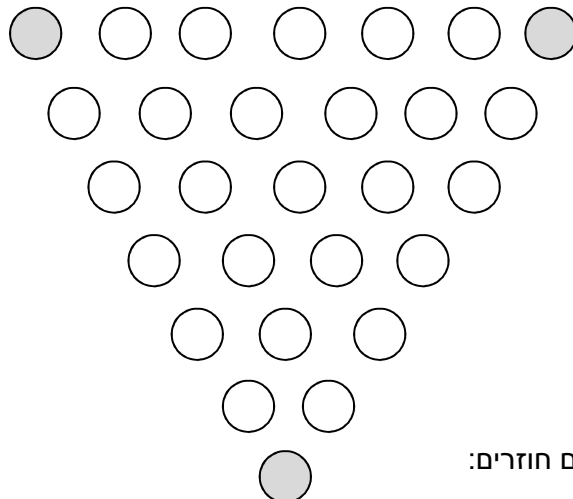
שחקן הממלא את העיגול הריק האחרון בשורה, מוחק את השורה, ורושם לזכותו מספר נקודות השווה למספר כל העיגולים בשורה שמחק.

אם עיגול מסוים הוא העיגול הריק האחרון בשתי שורות, אז השחקן הממלא אותו רשאי למחוק שורה אחת בלבד, לפי בחירתו.

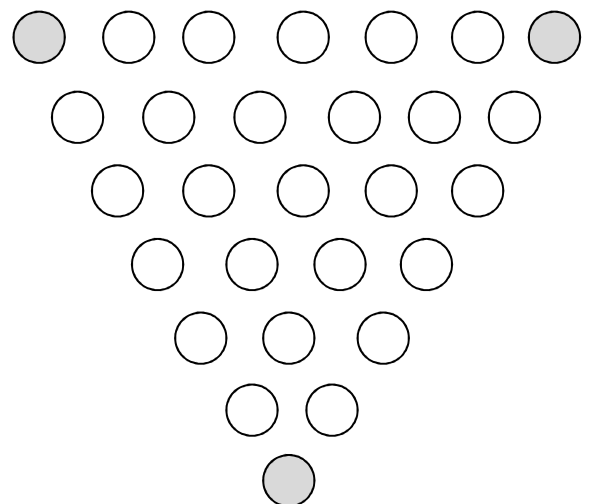
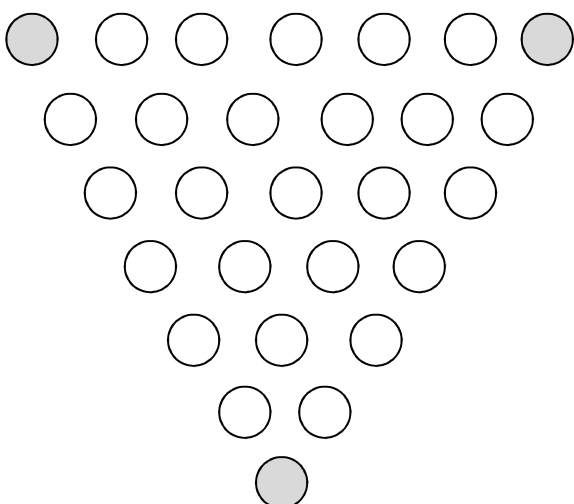
השחקן הבא בתור יכול למחוק את השורה האחרת, ולרושם לזכותו את מספר כל העיגולים שבה מבלי שמילא עיגול בתורו.

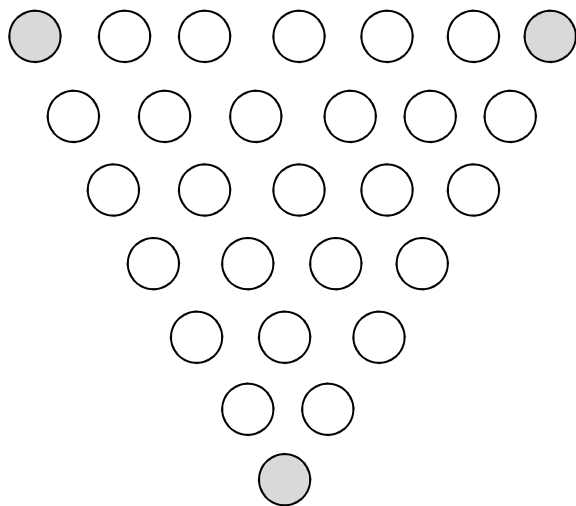
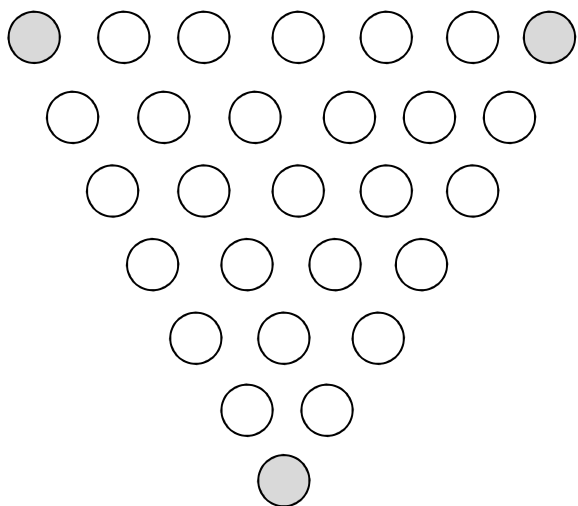
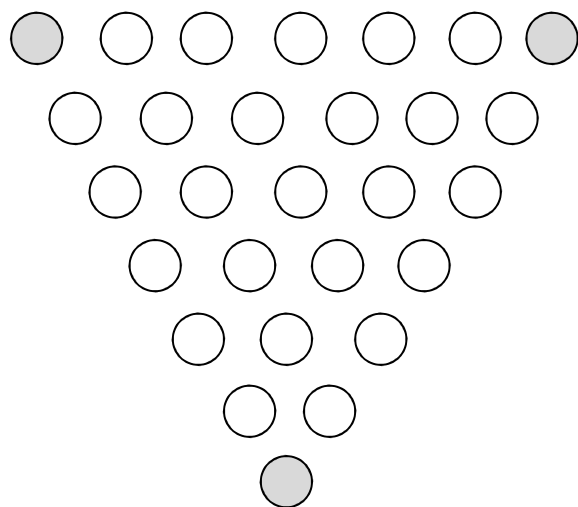
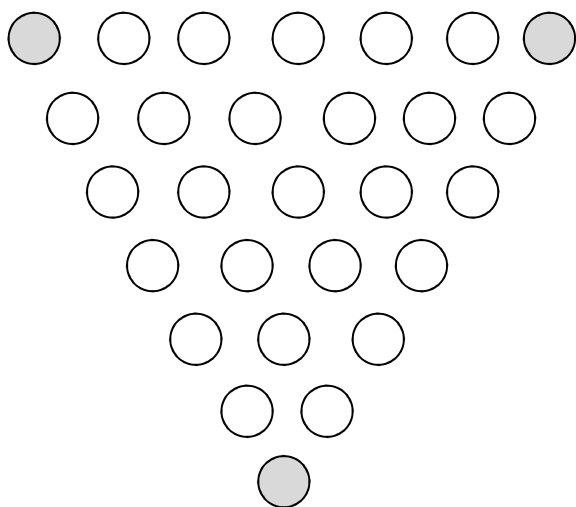
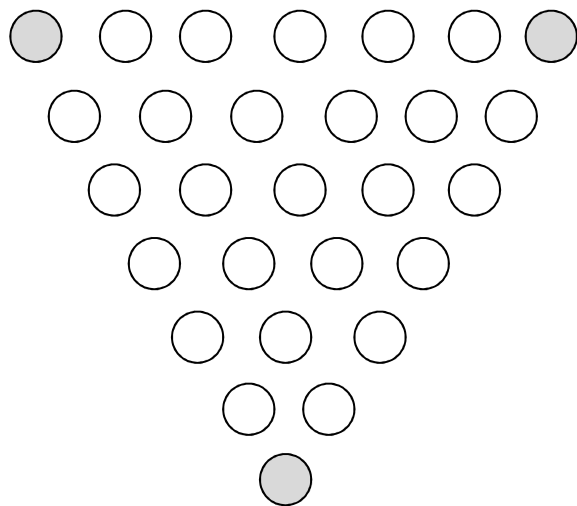
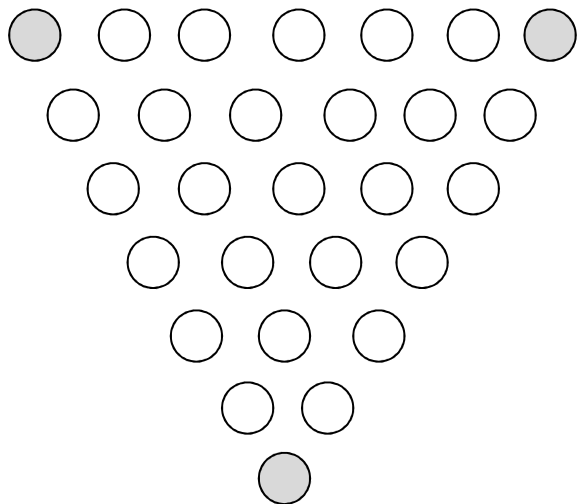
המשחק מסתיים כאשר כל השורות בשלושת הכיוונים מחוקות.

מנצח השחקן שצבר יותר נקודות.



לפניך עוד משולשים מעיגולים למשחקים חוזרים:





אחרי ששיחקת את המשחק מספר פעמים, ענה על השאלות הבאות.

1. כאשר משחקים שני שחקנים, האם ייתכן לסיים את המשחק בתיקו? נמק.

2. מהו מספר הנקודות הקטן ביותר שעל שחקן לצבור כדי לנצח במשחק הנערך בין שני שחקנים? נמק.

3. האם ייתכן לסיים את המשחק בתיקו כאשר הוא נערך בין שלושה שחקנים? נמק.

4. חזור על השאלות 1 – 3 עבור המשחקים הבאים:
- מספר העיגולים בשורה הארוכה הוא 5.

- מספר העיגולים בשורה הארוכה הוא 6.

- מספר העיגולים בשורה הארוכה הוא 8.

5. נסה לשער מה צריך להיות מספר העיגולים בשורה הארוכה כדי שאפשר יהיה לסיים את המשחק בתיקו, במשחק לשני שחקנים, במשחק לשלושה שחקנים.



המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence
through Education

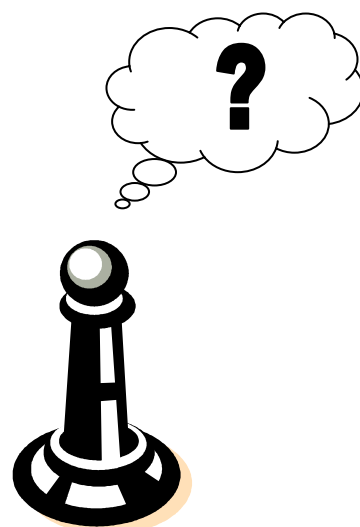
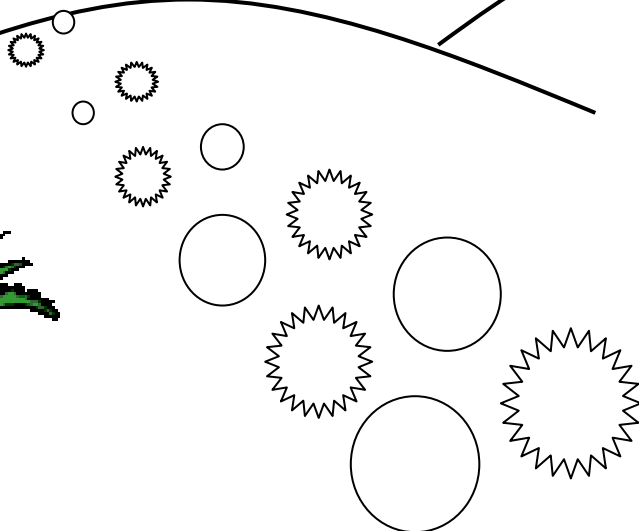
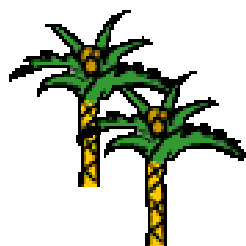
מצוינות 2000
בחסות קרן סקירבול

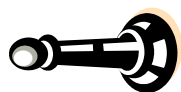
המכון למצוינות בהוראה

חיוך מנצח

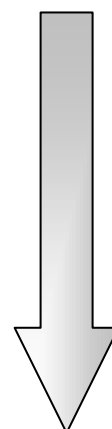
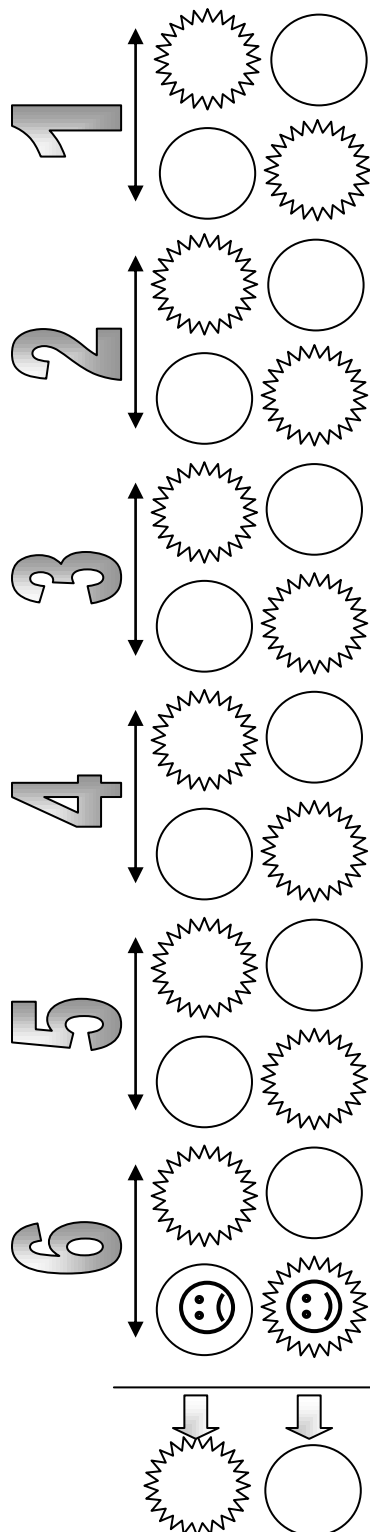
צבי שלם

מערכת: גלי שמעוני, ד"ר אבי פולג





חיוך מנצח - לוח המשחק





מתמטיקה בהתכתבות

מספרי ערפד רמה 3

כתובתנו באינטרנט:

www.weizmann.ac.il/davidson/e-learn

חפשו אותנו גם
בצ'ט ובפורום!



© הזכויות בחומר המוגש בדפים אלו שייכות למכון דוידסון לחינוך מדעי שליד מכון ויצמן למדע. החומר מיועד לשימוש האישי של מנזרי החוג למתמטיקה בהתכתבות. אין להשתמש בחומר לצורך הוראה בתשלום או מכירה, ואין להעתיקו ו/או להפיצו בכל דרך אחרת, בין בתמורה ובין ללא תמורה ללא אישור בכתב ממכון דוידסון לחינוך מדעי.

נתקלתם בבעיה טכנית באתר? moodle.davidson@weizmann.ac.il
בכל בעיה אחרת – mathbymail@weizmann.ac.il

צוות התכנית מתמטיקה בהתכתבות

ראש תחום תוכניות למידה מרחוק
ד"ר יוסי אלרן

ראש תכנית מתמטיקה בהתכתבות
מיכל אלרן

יועצת מדעית
ד"ר סבינה שטוקר

מתמטיקאים
פרופ' אדריס תיתי (ערבית)
פרופ' אברהם הרכבי (ספרדית)
ד"ר איירין אייזן (ארה"ב)
יערה אנדולט
רותם גבאי
יונתן וגנר
רועי לחמי
חסן מסאלחה (ערבית)
אמיר מרקוביץ
סאוסן עילבוני (ערבית)
ולידימיר פיבניק
נטליה קוריץ
ג'ניפר רסניק (ספרדית)
נטליה שנקר (ספרדית)

ניהול משרדי
מירי שרתוק-גורודצקי
רוויטל אהרונב
סיון טראו רזנשטיין
ג'אן גולדנברג (קנדה)
ניקול דה ברטולו (קנדה)
קרול פסטליכט-פרלמן (מכסיקו)
רינה מיכאל (אוסטרליה)

איורים: מחלקת הגרפיקה של מכון ויצמן למדע וחופית עמרם.
אינטרנט: חופית עמרם
דפוס: הוצאה לאור, מכון ויצמן למדע.

מספרי ערפד ומספרים מעניינים נוספים

("מתמטיקה בהתכתבות" תשע"ב מחזור 1 רמה 3)

שלום וברוכים הבאים לתכנית הבין-לאומית מתמטיקה בהתכתבות לכל המשתתפים החדשים, וברוכים השבים לחברינו הוותיקים. אנו מקווים שתיהנו משלל הבעיות, החידות והמשחקים המתמטיים שנביא כאן במהלך השנה.

נפתח את השנה בנושא מפתיע ומשעשע – מספרי ערפד!
לפני שנגיע לעצם העניין, יש צורך בכמה תזכורות בנושאים שונים הקשורים למספרים...

מספרים ראשוניים

מספרים ראשוניים הם מספרים שלמים המיוחדים בכך שהם מתחלקים (ללא שארית) רק בעצמם ובמספר 1.

דוגמה: המספר 3 מתחלק רק ב-3 וב-1, ולכן הוא מספר ראשוני.

המספר 6 מתחלק ב-6, ב-2, ב-3 וב-1, ולכן הוא איננו מספר ראשוני.

היוצא מן הכלל היחיד הוא המספר 1 בעצמו, שלמרות שהוא מתחלק בעצמו וב-1

(זה אותו דבר במקרה זה) הוא איננו מוגדר כראשוני.



1. א. השלימו את המשפט: המספרים הראשוניים בין 0 ל-30 הם _____

ב. האם מספר ראשוני יכול להיות מספר זוגי? כן/לא (סמנו את התשובה הנכונה)

גורמים של מספר

גורמים של מספר הם מספרים טבעיים שבהם המספר המקורי מתחלק ללא שארית.

לכל מספר טבעי יש לפחות שני גורמים.

דוגמה: הגורמים של המספר 12 הם 1, 2, 3, 4, 6, 12, מכיוון שהמספר 12 מתחלק בכל אחד מהם ללא שארית.

מספר מושלם

מספר מושלם הוא מספר ששווה בדיוק לסכום כל הגורמים שלו (חוץ מהמספר עצמו).

דוגמה: המספר 28.

מספר זה הוא מושלם, כי הגורמים שלו הם 1, 2, 4, 7, 14, והסכום שלהם הוא בדיוק 28!

$$28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$$



2. א. מצאו את כל הגורמים של המספרים הבאים: 23, 24, 25, 50, 120.

הגורמים של המספר 23: _____

הגורמים של המספר 24: _____

הגורמים של המספר 25: _____

הגורמים של המספר 50: _____

הגורמים של המספר 120: _____

ב. כמה גורמים יש למספר ראשוני כלשהו? $1 / 2 / 3 / 4$ (סמנו את התשובה הנכונה)

ג. מספר הגורמים של מספר פריק (לא ראשוני) שהוא ריבוע של מספר אחר הוא זוגי / אי זוגי (סמנו את התשובה הנכונה).

ד. מספר הגורמים של מספר פריק (לא ראשוני) שהוא לא ריבוע של מספר אחר הוא זוגי / אי זוגי (סמנו את התשובה הנכונה).

3. א. מצאו מספר מושלם בין 2 ל-10: _____

ב. סמנו את התרגיל שמתאר את 496 כמספר מושלם מבין התרגילים הבאים:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 123 + 249 = 496$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 35 + 70 + 120 + 240 = 496$$

$$200 + 296 = 496$$

ג. המספר המושלם הבא אחרי 496 הוא מספר עם ארבע ספרות. היעזרו באינטרנט וסמנו אותו מבין המספרים

הבאים: 8218 / 8812 / 4444 / 8128

במספר המושלם הבא אחרי המספר שאחרי 496 יש 6 / 7 / 8 / 9 ספרות.

מספרי ארבע על ארבע הם מספרים שאפשר ליצור בעזרת ארבע פעמים המספר 4, תוך שימוש בפעולות החשבון: חיבור, חיסור, כפל וחילוק.

לדוגמה, את המספר 7 אפשר ליצור מארבעה מספרי 4 כך: $4+4-4:4=7$, או בתוספת סוגריים $(4+4)-(4:4)=8-1=7$.



4. צרו את המספרים הבאים בשיטת "ארבע על ארבע": 2, 8, 16, וכמה קצת יותר קשים: 6, 9, 15, 60.

_____ = 2 _____ = 16

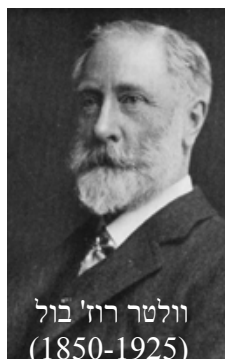
_____ = 6 _____ = 8

_____ = 15 _____ = 9

_____ = 60

© הזכויות בחומר המוגש בדפים אלו שייכות למכון דוידסון לחינוך מדעי שליד מכון ויצמן למדע. החומר מיועד לשימוש האישי של מנויי החוג למתמטיקה בהתכתבות. אין להשתמש בחומר לצורך הוראה בתשלום או מכירה, ואין להעתיקו/או להפיצו בכל דרך אחרת, בין בתמורה ובין ללא תמורה ללא אישור בכתב ממכון דוידסון לחינוך מדעי.

ככל הידוע, המתמטיקאי וולטר רוז' בול (Walter Rouse Ball) חד לראשונה את חידת ארבע על ארבע בספרו "שעשועי מתמטיקה ומאמרים (Mathematical Recreations and Essays).



וולטר רוז' בול
(1850-1925)

הוא כתב ספר זה בשנת 1892 ביחד עם חברו המתמטיקאי קוקסטר (H.S.M. Coxeter).
בול הצטיין במתמטיקה בלימודיו באוניברסיטת קיימברידג' באנגליה,
ואף זכה מספר פעמים במקומות גבוהים באולימפיאדה.
למרות שהוא לא היה פעיל במחקר מתמטי, הוא היה ידוע בתור מורה
מעולה והתעניין מאוד בשעשועי מתמטיקה ובהיסטוריה של המדעים.
הוא היה גם עורך דין ופעיל בפעילות ציבורית.
ספרו הודפס בארבע עשרה מהדורות והוא נפוץ עד היום.

אם נרחיב את כללי משחק המספרים ארבע על ארבע ונאפשר שימוש בחזקות ובשורשים ריבועיים, וכן הצמדה של ספרות זו לזו, אפשר להגיע להרבה מאוד מספרים. לדוגמה: $1776 = 444 \times 4$

חזקות של מספרים



כשאנו אומרים שמספר הוא **בחזקת** מספר אחר, אנו מתכוונים שמכפילים את המספר (הראשון) בעצמו כמה פעמים, לפי המספר שבחזקה.
לפעמים נאמר שאנו **מעלים** את המספר הראשון בחזקת המספר השני.
דוגמה: 2 בחזקת 3 (אפשר גם להגיד המספר 2 שמועלה בחזקת 3) מסומן כך 2^3 , ופירושו $2 \times 2 \times 2$, כלומר 8.
דוגמה נוספת: 2^4 , שהוא 2 בחזקת 4, ופירושו $2 \times 2 \times 2 \times 2$, כלומר 16.

שורש ריבועי



שורש ריבועי הוא הפעולה ההפוכה לפעולת ההעלאה בריבוע (בחזקת 2). במילים אחרות, שורש ריבועי של מספר מסוים הוא מספר שעונה על השאלה: איזה מספר כפול עצמו נותן את המספר המסוים?
השורש הריבועי מסומן כך: $\sqrt{\text{מספר}}$. תוכלו למצוא סימן זה ברוב מחשבוני הכיס.
דוגמה: שורש 4 מסומן כך: $\sqrt{4}$ והוא שווה למספר $2 - 2 = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4}$ (כלומר 2 הוא המספר שכפול עצמו נותן 4).
עוד דוגמה: $\sqrt{25} = \sqrt{5 \times 5} = 5$ ובמילים – המספר 5 הוא השורש של המספר 25.

5. חשבו את הערכים הבאים: 3^2 , 4^3 , 10^2 , 5^4 . סמנו את התשובה הנכונה בתרגילים הבאים.

$$3^2 = 6 / 9 / 12 / 33$$

$$4^3 = 12 / 44 / 64 / 444$$

$$5^4 = 625 / 545 / 555 / 5555$$

$$15^2 = 15 / 105 / 225 / 155$$

$$\text{השורש של } 144 \text{ (} \sqrt{144} \text{)} \text{ הוא } \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{השורש של } 256 \text{ (} \sqrt{256} \text{)} \text{ הוא } \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{השורש של } 400 \text{ (} \sqrt{400} \text{)} \text{ הוא } \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{השורש של } 1089 \text{ (} \sqrt{1089} \text{)} \text{ הוא } \underline{\hspace{2cm}}$$

לפניכם הרחבה נוספת למשחק ארבע על ארבע: לא חייבים להקפיד שיהיו בדיוק ארבע הופעות של המספר 4, ומותר ליצור את המספר המבוקש גם עם פחות מארבעה מספרי 4 (אבל לא יותר). למשל, אפשר ליצור את המספר 40 על ידי שימוש בשלושה מספרי 4 בלבד: $44-4=40$.

6. צרו את המספרים הבאים בשיטת ארבע על ארבע. נסו ליצור את המספרים תוך שימוש בכללים החדשים

והשתמשו במספר הקטן ביותר של מספרי ארבע האפשרי.

$$\underline{\hspace{2cm}} = 1$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 3$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 11$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 18$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 32$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 46$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 256$$

אבות ראשוניים

בפרק זה נלמד משהו קצת אחר, המשלב בין המספרים הראשוניים, לבין העלאה בחזקת שתיים – אבות ראשוניים. האבות הראשוניים הוגדרו לראשונה על ידי מורה למתמטיקה יצירתי ביותר ששמו טרי טרוטר (Terry Trotter). טרוטר חי בשנים 1941 – 2004. הוא התחיל את הקריירה שלו בארצות הברית, ולאחר מכן עבר לאל סלבדור.

אז מהם אבות ראשוניים?

אב ראשוני מוגדר כמספר ראשוני אשר סכום הריבועים של ספרותיו הוא גם מספר ראשוני. הסכום הזה נקרא ילד ראשוני.

דוגמה: המספר 41 הוא אב ראשוני, שכן $4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$, ושני המספרים 17 ו-41 ראשוניים. במילים אחרות, 41 הוא האב הראשוני של ילד ראשוני, במקרה זה 17. המספר 17 אינו אב ראשוני, כי $49 = 50$ $1^2 + 7^2 = 1 + 50$ (מספר שאינו ראשוני).

7. סמנו את כל המספרים שהם אבות ראשוניים ברשימת המספרים הבאה:

97 / 89 / 83 / 79 / 73 / 71 / 67 / 61 / 59 / 53 / 47 / 43 / 41 / 37 / 31 / 29 / 23 / 19 / 17 / 13 / 11

רמז: קיימים בדיוק חמישה אבות ראשוניים דו-ספרתיים.

אפשר גם למצוא שושלות של אבות ובנים ראשוניים.

דוגמה: המספר 191 הוא אב ראשוני למספר 83, והמספר 83 הוא אב ראשוני למספר 73. המספר 73 הוא סוף השושלת, כי אם נחפש לו בן ראשוני נמצא את המספר 58 שהוא מספר פריק.

8. עד היום, השושלות הארוכות ביותר שנמצאו הן בנות שישה דורות. האב הראשוני הקדמון של אחת משושלות אלה הוא 28999999999. השלימו את שאר האבות והבנים בשושלת.

28999999999 ← _____ ← _____ ← _____ ← _____ ← _____

מספרי פרידמן



מספר פרידמן הוא מספר שאפשר ליצור תוך שימוש בספרותיו יחד עם פעולות החשבון: חיבור, חיסור, כפל, חילוק והעלאה בחזקה. אפשר להשתמש גם בסוגריים והצמדת שתי ספרות זו לזו – בדיוק כמו בארבע על ארבע. אסור להשתמש בספרות שאינן מרכיבות את המספר. דוגמה למספר פרידמן עם שימוש בכפל: $126=6 \times 21$. דוגמה למספר פרידמן תוך שימוש בהעלאה בחזקה: $25=5^2$. (הכוונה היא ל- 5×5).

9. מדוע המספרים הבאים הם מספרי פרידמן? סמנו את התשובה הנכונה.

- המספר 121 הוא מספר פרידמן כי: $121 = 121 / 11 \times 11 = 121 / 12 \times 1 = 121 / 11^2 = 121$
- המספר 153 הוא מספר פרידמן כי: $31^5 = 153 / 51 \times 3 = 153 / 5 \times 31 = 153 / 15^3 = 153$
- המספר 289 הוא מספר פרידמן כי: $29+8 = 289 / 82 \times 9 = 289 / (9+8)^2 = 289 / 89 \times 2 = 289$
- המספר 1206 הוא מספר פרידמן כי: $62-10=1206 / 106^2=1206 / 60+12=1206 / 6 \times 201=1206$
- המספר 100255 הוא מספר פרידמן כי:
 $12005 : 5 = 100255 / 5 \times 20051 = 100255 / 255 \times 100 = 100255 / 10025 + 5 = 100255$

אריך פרידמן (Erich Friedman), שהמציא את מספרי פרידמן, נולד ב-1965 בארצות הברית. הוא מתמטיקאי מוכשר מאוד העוסק הרבה במשחקים מתמטיים. פרידמן הוא אדם רב כישרונות; הוא זוכר בעל-פה את חמישים הספרות הראשונות אחרי הנקודה ב- π , ומצליח לפתור קובייה הונגרית בחמישים שניות!

מספרי פרידמן יפים

מספר פרידמן יפה הוא מספר פרידמן אשר סדר הספרות בביטוי המתמטי המתאר אותו זהה לסדר הספרות במספר עצמו. דוגמה למספר פרידמן יפה: $343 = (3 + 4)^3$. סוג נוסף של מספרי פרידמן יפים הם מספרי פרידמן המורכבים מספרה אחת בלבד, שחוזרת על עצמה מספר פעמים, לדוגמה $1111111111 = ((11-1)^{11} - 1 \times 1) : (11-1-1)$.

10. הראו שהמספרים הבאים הם מספרי פרידמן יפים: 736, 1285, 2592, 28224, 99999999.

מספרי ערפד



מספר ערפד הוא מספר שאפשר לקבל ממכפלה של שני מספרים, המורכבים מהספרות של המספר עצמו. שני המספרים האלה מכונים **ניבים**.

מספר ערפד הוא מקרה פרטי של מספרי פרידמן.

פירוש המונח מקרה פרטי הוא שכל מספרי הערפד כלולים בתוך מספרי פרידמן.

דוגמה למספר ערפד: $1827000 = 210 \times 8700$.

מספר ערפד אמתי הוא מספר ערפד שבו לשני המספרים המוכפלים יש אותו מספר ספרות, ולפחות אחד מהם אינו מסתיים בספרה אפס.

דוגמה למספר ערפד אמתי: $1827 = 21 \times 87$.

מספר ערפד ראשוני הוא מספר ערפד אמתי שבו שני המספרים המוכפלים הם מספרים ראשוניים (בנוסף לתכונה שהזכרנו קודם ששני המספרים צריכים להיות בעלי מספר ספרות זהה, ולפחות אחד מהם אינו מסתיים בספרה אפס).

דוגמה למספר ערפד ראשוני: $117067 = 167 \times 701$

(המספרים 167 ו-701 הם ראשוניים)



11. המספרים: 126, 153, 688 ו-1395 הם ארבעה מספרי ערפד. מצאו לכל מספר ערפד את הניבים המתאימים

לו מתוך "מחסן הניבים" הבא (רמז – לא צריך להשתמש בכל המספרים במחסן):

3 5 6 8 13 15 21 39 51 53 86 93

126 - הניבים הם: _____ 153 - הניבים הם: _____

688 - הניבים הם: _____ 1395 - הניבים הם: _____

12. מדוע המספר 103000 אינו יכול להיות מספר ערפד? סמנו את התשובה הנכונה.

א. המספר 103000 אינו יכול להיות מספר ערפד כי אין שום אפשרות ליצור שני מספרים מהספרות של 103000 כך שהמכפלה שלהם תהיה 103000, וזאת בגלל ריבוי האפסים.

ב. המספר 103000 אינו יכול להיות מספר ערפד כי אין שום אפשרות ליצור שני מספרים מהספרות של 103000 כך שהמכפלה שלהם תהיה 103000, וזאת בגלל שהוא מספר זוגי.

ג. המספר 103000 אינו יכול להיות מספר ערפד כי אין שום אפשרות ליצור שני מספרים מהספרות של 103000 כך שהמכפלה שלהם תהיה 103000, וזאת בגלל שהוא מספר גדול מאוד.

13. המספרים: 1260, 2187, 6880 ו-1435 הם ארבעה מספרי ערפד **אמתיים**. מצאו לכל מספר ערפד אמתי את

הניבים המתאימים לו מתוך "מחסן הניבים" הבא (רמז – לא צריך להשתמש בכל המספרים במחסן):

12	13	21	27	35	41	60	68	80	81	86	87	88
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
1260 - הניבים הם:	2187 - הניבים הם:	6880 - הניבים הם:	1435 - הניבים הם:									

14. אלו מבין המספרים: 1260, 2187, 6880 ו-1435 הם מספרי ערפד **ראשוניים**?

_____	הניבים הם:	6880 – כן/לא
_____	הניבים הם:	124483 – כן/לא
_____	הניבים הם:	1435 – כן/לא
_____	הניבים הם:	536539 – כן/לא

מספרים הוגנים

מספר **הוגן** מוגדר בתור מספר שערכו שווה למספר האותיות בשמו או בדרך אחרת במילים שאפשר לתאר אותו.

דוגמאות למספרים הוגנים בעברית: 4 – ארבע (4 אותיות)
10 – חמש ועוד חמש (10 אותיות)

שימו לב שלפעמים אפשר לתאר את המספר ההוגן בכמה דרכים שונות!
דוגמה: 11 – ארבע ועוד שבע (11 אותיות)
אחד יותר מעשר (11 אותיות)
וכו'.....

מספרים בזבזנים

נגדיר מספר כ**מספר בזבזני** אם אפשר לתאר אותו במספר אותיות הקטן ממספר האותיות בשם של המספר עצמו.

דוגמה: המספר 36 – שש בריבוע (8 אותיות) לעומת שלושים ושש (9 אותיות).



15*. סמנו את המספרים ההוגנים בעברית מבין המספרים:

1	2	3	4	5
9	10	15	17	18

בפורום נדון במספרים הוגנים נוספים, וננסה למצוא גם דוגמאות למספרים הוגנים שניתן לתאר אותם בכמה דרכים שונות. בנוסף לכך נדון במספרים בזבזניים, עליהם תלמדו גם מעט בשאלה הבאה.

© הזכויות בחומר המוגש בדפים אלו שייכות למכון דוידסון לחינוך מדעי שליד מכון ויצמן למדע. החומר מיועד לשימוש האישי של מנויי החוג למתמטיקה בהתכתבות. אין להשתמש בחומר לצורך הוראה בתשלום או מכירה, ואין להעתיקו/או להפיצו בכל דרך אחרת, בין בתמורה ובין ללא תמורה ללא אישור בכתב ממכון דוידסון לחינוך מדעי.

16*. לפניכם שני תיאורים. כתבו איזה מספרים בזבזניים הם מתארים:

- א. תשע בריבוע (9 אותיות) לעומת שמונים ואחד (10 אותיות) מתאר את המספר _____ כמספר בזבזני.
ב. שש בחזקת שלוש (11 אותיות) לעומת מאתיים ושש עשרה (13 אותיות) מתאר את המספר _____ כמספר בזבזני.

17. סווגו את המספרים הבאים לפי קבוצות - מספרים ראשוניים, מספרי פרידמן, מספרי ערפד, מספרי ערפד

אמתיים (ייתכן שיהיו מספרים שישתייכו ליותר מקבוצה אחת):

- _____ - 11
_____ - 4
_____ - 28
_____ - 81
_____ - 1255
_____ - 127
_____ - 1827
_____ - 146137

החברת הקאה תהיה kel : האתמטיקה le החייט...

ביבליוגרפיה וחומר רקע



חברות העשרה של מכון ויצמן למדע
חומר מקור של יוסי ומיכל אלרן

אתרי אינטרנט מומלצים:

<http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0800.html>
http://en.wikipedia.org/wiki/Friedman_number
<http://mathworld.wolfram.com/VampireNumber.html>
<http://mathworld.wolfram.com/PerfectNumber.html>
<http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1203.html>
http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_03_01_04.html
<http://hjem.get2net.dk/jka/math/vampires/>
<http://www.grenvillecc.ca/faculty/jchilds/vampire.htm>
<http://sprott.physics.wisc.edu/pickover/pubbb.html>
<http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html>

לבן ראשוני יכול להיות יותר מאב ראשוני אחד? הדגימו והסבירו.

שבילים למצוינות

מתמטיקה לכיתה ז'
מטח

■ משחקים במספרים

■ שאלות על מספרים ראשוניים

■ שעון על לוח שנה?

■ שטחים וגפרורים

■ טנגרם

■ משחקים בלוחות מספרים



משחק "המרוץ ל-60"

כללי המשחק: משחק זה מיועד לשני שחקנים.
 שחקן **א** כותב מספר שלם מ-1 עד 9.
 שחקן **ב** בוחר מספר נוסף מ-1 עד 9 וכותב את הסכום של שני המספרים.
 שחקן **א** בוחר עוד מספר מ-1 עד 9 וכותב את הסכום החדש שמתקבל וכן הלאה.
 מנצח - השחקן הראשון שכותב את המספר 60.

1 התחלקו לזוגות ושחקו במשחק לפחות פעמיים.

2 לפניכם דוגמה של סדרת מספרים שכתבו עמית וטל במהלך משחק (משמאל לימין).
 7, 12, 20, 23, 25, 28, 37, 44, 48, 54, 60
 השלימו בטבלה את המספרים שכתב כל אחד מהשחקנים.
 מי ניצח במשחק זה? באיזה שלב?

מספר השלב	1	2	3	4	5	6	7	8	9
עמית	7	20 (+8)							
טל	12 (+5)								

3 בכל סעיף כתבו סדרת מספרים לפי האסטרטגיה הנתונה וקבעו מי משני השחקנים ינצח, כאשר לשחקן מותר לשנות את האסטרטגיה בצעד האחרון במשחק.
 א. עמית כותב 8 בשלב הראשון ומוסיף 8 בכל שלב. טל מוסיף 5 בכל שלב.
 ב. עמית כותב 1 בשלב הראשון, מוסיף 2 בשלב השני, מוסיף 3 בשלב השלישי וכן הלאה. טל מוסיף 7 בכל שלב.
 ג. עמית כותב 9 בשלב הראשון, מוסיף 8 בשלב השני, מוסיף 7 בשלב השלישי וכן הלאה. טל מוסיף בכל שלב מספר הקטן ב-1 מהמספר של עמית.
 ד. עמית כותב 5 בשלב הראשון, ובכל שלב מוסיף את המספר הקטן ביותר כך שהסכום שיתקבל יתחלק ב-5.

טל מוסיף בכל שלב את המספר הקטן ביותר כך שהסכום שיתקבל יתחלק ב-7.

4 בכל סעיף נתונה סדרת מספרים שהתקבלה במשחק ששיחקו עמית וטל.
מהי האסטרטגיה של כל אחד מהשחקנים לדעתכם?
המשיכו את הסדרה לפי אסטרטגיה זו וקבעו מיהו המנצח במשחק.

א| 7, 11, 18, 22, 29, 33,...

ב| 3, 6, 8, 12, 15, 20, 24, 30,...

ג| 1, 8, 10, 16, 19, 24, 28, 32, 37, 40,...

5 א. עמית מתכנן לכתוב במהלך המשחק את המספרים האלה:

1, —, 11, —, 21, —, 31, —, 41, —, 51

האם הוא יצליח לכתוב מספרים אלה ללא תלות במספרים שיכתוב טל?
הסבירו את תשובתכם.

ב. אם אפשר – הציעו עוד סדרת מספרים שעמית יכול לרשום ללא תלות במספרים שיכתוב טל. אם אי־אפשר – הסבירו מדוע.

ג. האם לעמית יכולה להיות אסטרטגיה מנצחת ללא תלות במספרים שיכתוב טל?
אם קיימת אסטרטגיה כזו, כתבו אותה והסבירו את תשובתכם.

ד. האם לטל יכולה להיות אסטרטגיה מנצחת ללא תלות במספרים שיכתוב עמית?
אם קיימת אסטרטגיה כזו, כתבו אותה והסבירו את תשובתכם.

ה. שחקו עם חבר ובדקו אם אכן אפשר לנצח באמצעות האסטרטגיה שהצעתם.

משנים את מספר היעד

6 האם האסטרטגיה המנצחת שהצעתם במשימה 5 מתאימה גם למשחק שבו מספר היעד הוא 50?
אם לא – התאימו אותה למשחק כזה.

האם האסטרטגיה המנצחת שהצעתם במשימה 5 מתאימה גם למשחק שבו מספר היעד הוא 65?
אם לא – התאימו אותה למשחק כזה.

משנים את טווח המספרים

7 א. האם האסטרטגיה שהצעתם במשימה 5 מתאימה גם למשחק שבו מספר היעד הוא 60,
כאשר בכל שלב אפשר להוסיף מספר מ־1 עד 8? אם לא – התאימו אותה גם למשחק כזה.

ב. נסו להכליל את התוצאות שקיבלתם במשימות 5, 6 ו־7א.

משחק משלכם

8 הציעו משחק במספרים משלכם. הסבירו באיזו אסטרטגיה כדאי להשתמש כדי לנצח במשחק זה.
נמקו.

חיפוש מספרים ראשוניים, הנפה של ארטוסתנס

- 1 א. כתבו חמישה מספרים ראשוניים. תארו את הדרך שבעזרתה מצאתם את המספרים.
ב. האם 1 הוא מספר ראשוני? הסבירו.

תזכורת מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מ-1 שמתחלק בדיוק בשני מספרים: ב-1 ובעצמו.

דוגמאות: המספרים 7 ו-23 הם מספרים ראשוניים.

מתמטיקאים, פילוסופים ומדענים חוקרים את המספרים הראשוניים מזה אלפי שנים, אך רבים מסודותיהם של מספרים אלה עדיין לא פוענחו. ביחידה זו תמצאו כמה שאלות פתוחות – שאלות שעדיין לא נפתרו – על המספרים הראשוניים. אתם מוזמנים לנסות את כוחכם!

כיצד מוצאים מספרים ראשוניים? החכם היווני אֶרְטוֹסְתֶנֶס הציע דרך פשוטה למציאת מספרים ראשוניים, שנקראת **הנפה של ארטוסתנס**.

- 2 במשימה זו תשתמשו בנפה של ארטוסתנס למציאת כל המספרים הראשוניים עד 100.
השתמשו ברשימת כל המספרים השלמים מ-2 עד 100:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- א. שלב 1 – המספר הקטן ביותר ברשימה הוא 2, שהוא מספר ראשוני. השאירו אותו ברשימה ומחקו ממנה את כל הכפולות שלו.
שלב 2 – המספר הבא בראש הרשימה הוא 3, וגם הוא ראשוני. השאירו אותו ברשימה ומחקו ממנה את כל הכפולות שלו.

- ב. • מהו המספר הבא בראש הרשימה, שאת כפולותיו יש למחוק? האם הוא ראשוני או פריק?
- האם אחרי כל שלב בתהליך יופיע בראש הרשימה מספר ראשוני? הסבירו.
- שערו: לאחר שתמחקו את הכפולות של המספר הבא – מה יהיה המספר **הפריק** הראשון ברשימה שעדיין לא נמחק?
- ג. שערו עד איזה מספר ראשוני תצטרכו להמשיך את התהליך. נמקו את השערתכם. המשיכו את התהליך ובדקו את השערתכם.
- ד. כתבו את כל המספרים הראשוניים עד 100.
- כמה מספרים ראשוניים עד 100 מצאתם?



היצאת?

אַרְטוֹסְטֶנֶס (276-194 לפנה"ס) – מתמטיקאי, משורר, אתלט (בצעירותו), גאוגרף ואסטרונום יווני. בני זמנו כינוהו בְּתָא (האות השנייה באלפבית היווני), כיוון שהוכיח את עצמו כשני־הטוב־ביותר בתחומים רבים. הוא היה היווני הראשון שחישב (בדיוק רב!) את היקף כדור הארץ, והוא שהגה את המערכת הגאוגרפית של קווי אורך ורוחב.

א. כמה מספרים ראשוניים יש בין 1 ל-10? בין 11 ל-20? בין 21 ל-30? בדקו כמה ראשוניים יש בכל עשרת עד 100.

3

- ב. באיזו שורה בטבלה שבמשימה 2 יש הכי הרבה מספרים ראשוניים?
- ג. האם ייתכן שבין עשרה מספרים עוקבים יש חמישה מספרים ראשוניים או יותר? הסבירו.
- ד. האם ייתכן שבין עשרה מספרים עוקבים אין בכלל מספרים ראשוניים? הסבירו.
- ה. שערו: האם במאה השנייה של המספרים (כלומר המספרים מ-101 עד 200) יש יותר ראשוניים מאשר במאה הראשונה, או פחות? בדקו את השערתכם.

נכון או לא נכון? הסבירו.

4

- א. בין המספרים הטבעיים מ-1 עד 50 יש יותר מספרים פריקים מאשר מספרים ראשוניים.
- ב. בין המספרים הטבעיים מ-100 עד 200 יש יותר מספרים פריקים מאשר מספרים ראשוניים.
- ג. בכל קבוצה של מספרים טבעיים עוקבים יש יותר מספרים פריקים מאשר מספרים ראשוניים.

5

- ידוע כי 53087,8861 ו-2502559 הם מספרים ראשוניים.
- א. כתבו בעזרתם ביטוי חשבוני שהתוצאה שלו תתחלק בשלושתם.
- ב. כתבו בעזרת שלושת המספרים ביטוי חשבוני שהתוצאה שלו לא תתחלק באף אחד מהם.
- ג. באתר The primes Pages תוכלו למצוא רשימה* של 50,000,000 המספרים הראשוניים הקטנים ביותר (מ² עד 982,451,653). האם קיים מספר שאינו מתחלק באף אחד מהם? הסבירו.

6

- כאשר בודקים את רשימות המספרים הראשוניים, מוצאים כי ככל שהמספרים גדלים – תדירות הופעת המספרים הראשוניים יורדת. האם הם "יגמרו"? כלומר, האם יש מספר ראשוני אחרון – כזה שלא קיים מספר ראשוני גדול ממנו? נמקו.

נכון לתמוז תשע"א, המספר הראשוני הגדול ביותר הידוע הוא $2^{43,112,609} - 1$. זהו מספר בעל 12,978,189 ספרות. המספר התגלה במסגרת פרויקט GIMPS – פרויקט שיתופי ברשת, המגייס את כוחם של עשרות אלפי מחשבים ברחבי העולם בחיפוש אחר מספרים ראשוניים גדולים. אם אתם רוצים לשתף את המחשב הביתי שלכם בפרויקט (ואולי לגלות את המספר הראשוני הגדול ביותר הבא...) אתם יכולים להצטרף דרך האתר: <http://www.mersenne.org>

הפרשים בין מספרים ראשוניים, מספרים ראשוניים תאומים

7

- א. האם קיימים זוגות של מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 1? כמה זוגות כאלו קיימים? נמקו.
- ב. מצאו זוג ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 11. האם יש עוד זוגות כאלו? נמקו.
- ג. האם קיימים זוגות של מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 13? נמקו.

הצרכה

זוג מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2 נקראים **ראשוניים תאומים**.

8

- א. מצאו 5 זוגות של ראשוניים תאומים.
- ב. לכל זוג ראשוניים תאומים שמצאתם, רשמו את המספר הנמצא ביניהם. האם יש תכונה משותפת ל"מספרי האמצע" שמצאתם? הסבירו.
- ג. השלשה 3, 5, 2 היא שלשה של מספרים ראשוניים רצופים המכילה זוג של ראשוניים תאומים: 3, 5. נסו למצוא שלשות של מספרים ראשוניים רצופים שמכילות שני זוגות של ראשוניים תאומים. כמה שלשות כאלה קיימות? האם תוכלו להסביר מדוע?

אלה פתוחה

מתמטיקאים לא מצאו עדיין הוכחה (או הפרכה) להשערה שיש אינסוף זוגות של ראשוניים תאומים.

* לרשימת 50,000,000 הראשוניים הקטנים ביותר: <http://primes.utm.edu/lists/small/millions>

9

הניסיון מראה שאפשר לכתוב כל מספר זוגי כהפרש של שני מספרים ראשוניים. למשל:

$$2 = 5 - 3, \quad 4 = 7 - 3, \quad 6 = 11 - 5, \quad 72 = 83 - 11$$

וכן הלאה.

רשמו כל אחד מהמספרים שלפניהם כהפרש של שני מספרים ראשוניים:

12, 34, 56, 88, 100

חפשו כמה שיותר אפשרויות שונות לאותו המספר.

שאלות פתוחות

הנה שתי טענות שעדיין לא נמצאה להן הוכחה (וגם לא הפרכה):

- ניתן לרשום כל מספר זוגי כהפרש של שני מספרים ראשוניים.
 - ניתן לרשום כל מספר זוגי (גדול מ-2) כסכום של שני מספרים ראשוניים.
- הטענה האחרונה מכונה **השערת גולדבך**, על שם המתמטיקאי הגרמני כריסטיאן גולדבך.

בדיקת ראשוניות

אחת הדרכים לבדיקת ראשוניות של מספר נקראת **מבחן החלוקה**: כדי להבטיח שמספר הוא ראשוני, יש לוודא שאינו מתחלק בשום מספר ראשוני הקטן או שווה לשורש שלו.

על מנת לוודא ש-701 הוא מספר ראשוני, עלינו לוודא שהוא אינו מתחלק באף אחד מהראשוניים הקטנים מ- $\sqrt{701} = 26.476\dots$, כלומר במספרים: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ו-23.

ציאמה

א. לפניכם רשימה של מספרים תלת-ספרתיים:

10

176, 235, 377, 443, 469, 611, 723, 845, 999

מצאו בעזרת מבחן החלוקה אילו מהמספרים ברשימה הם ראשוניים.

ב. לפי מבחן החלוקה, על מנת לוודא שמספר הוא ראשוני יש לנסות לחלק אותו רק במספרים

ראשוניים. מדוע אין צורך לבדוק חלוקה במספרים פריקים?

ג. לפי מבחן החלוקה אין צורך לבדוק חלוקה בראשוניים הגדולים משורש המספר. הסבירו מדוע.

יש אפשרויות שונות לפרק מספר טבעי לגורמים.

את המספר 24 אפשר לפרק כך: $24 = 6 \cdot 4$ וגם כך: $24 = 3 \cdot 8$

ציאמה

ובכמה דרכים שונות אפשר לפרק מספר **לגורמים ראשוניים**? (שימו לב: שינוי בסדר הגורמים

אינו נחשב פירוק שונה; $6 = 3 \cdot 2$ ו- $6 = 2 \cdot 3$ הם אותו פירוק של 6.)

המתמטיקאי היווני אוקלידס (שחי בערך בשנים 365–275 לפנה"ס) הוכיח משפט הקובע

שיש בדיוק דרך אחת לעשות זאת. המשפט הזה נקרא **המשפט היסודי של האריתמטיקה**.

ד. פרקו לגורמים ראשוניים כל מספר פריק מהרשימה בסעיף א.

חבורות

חבורות

1. פעולות בינאריות



המחשבון המסתורי

דני מצא מחשבון ישן ומסתורי.

על המחשבון הוא זיהה את המקשים של הספרות ואת המקש $=$ אך לא הצליח לזהות את מקשי פעולות החשבון הרגילות.

ננסה לפענח אילו פעולות מבצעים המקשים השונים במחשבון של דני.

זוהי את הפעולה

1. לפניכם תרגילים שביצע דני, והתוצאות שקיבל. מהי לדעתכם המשמעות של כל אחד מהמקשים?

$$1 \clubsuit 5 = 12$$

$$7 \clubsuit 3 = 20$$

$\clubsuit$ מקש: $2x/3$

$$3 \clubsuit 2 = 10$$

$$2 \clubsuit 7 = 18$$

$$8 \clubsuit 4 = 24$$

$$4 \clubsuit 4 = 16$$

משמעות המקש: $a \clubsuit b = 2 \cdot (a + b)$

ב. מקש $\spadesuit$

$$2 \spadesuit 6 = 4$$

$$7 \spadesuit 1 = 4$$

$$7 \spadesuit 2 = 4.5$$

$$4 \spadesuit 1 = 2.5$$

$$2 \spadesuit 0 = 1$$

$$4 \spadesuit 2 = 3$$

א. מקש $\heartsuit$

$$3 \heartsuit 5 = 11$$

$$2 \heartsuit 1 = 5$$

$$4 \heartsuit 6 = 14$$

$$11 \heartsuit 3 = 25$$

$$7 \heartsuit 5 = 19$$

$$20 \heartsuit 6 = 46$$

ד. מקש $\diamondsuit$

$$2 \diamondsuit 6 = 20$$

$$2 \diamondsuit 18 = 56$$

$$3 \diamondsuit 3 = 15$$

$$20 \diamondsuit 3 = 83$$

$$5 \diamondsuit 10 = 65$$

$$2 \diamondsuit 100 = 302$$

ג. מקש $\star$

$$2 \star 6 = 10$$

$$7 \star 1 = 50$$

$$3 \star 3 = 12$$

$$4 \star 1 = 17$$

$$5 \star 0 = 25$$

$$4 \star 2 = 18$$



2. לפניכם תרגילים עם פעולות המקשים     שחקרתם. השלימו מספרים מתאימים.

א. מקש  $10 \heartsuit 3 = \blacksquare$ $11 \heartsuit \blacksquare = 40$ $\blacksquare \heartsuit 16 = 76$ $21 \heartsuit \blacksquare = 100$	ב. מקש  $15 \spadesuit 47 = \blacksquare$ $\blacksquare \spadesuit 23 = 52.5$ $10 \spadesuit \blacksquare = 4$ $\blacksquare \spadesuit \blacksquare = 5$
ג. מקש  $4 \star 5 = \blacksquare$ $-3 \star -2 = \blacksquare$ $4 \star \blacksquare = 17$ $\blacksquare \star 3 = 12$	ד. מקש  $1 \diamond 1 = \blacksquare$ $3 \diamond 10 = \blacksquare$ $2 \diamond \blacksquare = 11$ $\blacksquare \diamond \blacksquare = 5$

הגדרה:

פעולה בינארית על מספרים היא פעולה המתבצעת בין שני מספרים (לא בהכרח שונים זה מזה), ואשר נותנת כתוצאה מספר יחיד.
מחזור: כל פעולות החשבון שהכרנו כעת הן פעולות בינאריות על מספרים.
 פעולת מציאת הנגדי למספר **איננה** פעולה בינארית, כי היא פועלת על מספר אחד.

תכונות של פעולות בינאריות

3. דני ניסה לחשב במחשבון המסתורי את התרגיל $7 \heartsuit 1$, הוא שגה והפך בטעות את הסדר בין המספר הראשון והמספר השני בתרגיל.
 א. מהי התוצאה (השגויה) של דני, ומהי התוצאה הנכונה של תרגיל זה?
 ב. מה יקרה אם דני יחזור על הטעות של היפוך סדר המספרים בפעולות האחרות?

הגדרה:

פעולה בינארית שבה סדר המספרים שעליהם היא מופעלת אינה משפיעה על התוצאה נקראת **פעולה חילופית** (קומוטטיבית).

4. האם הפעולות $\heartsuit$ $\spadesuit$ $\star$ $\clubsuit$ הן חילופיות? אם כן, הסבירו. אם לא, בכל פעולה שאינה חילופית, הביאו דוגמאות לתרגילים שבהם שינוי סדר המספרים נותן תוצאות שונות.

5. א. הביאו שתי דוגמאות נוספות לפעולות חילופיות.
לכל פעולה כזאת, כתבו שלושה זוגות תרגילים $(b * a - a * b)$ שידגימו את תכונת החילופיות.
ב. הביאו שתי דוגמאות נוספות לפעולות שאינן חילופיות.
לכל פעולה כזאת, כתבו שלושה זוגות של תרגילים $(b * a - a * b)$, שיראו כי תכונת החילופיות אינה מתקיימת לגבי פעולות אלה.

6. א. דני אמר: "תוצאת החיבור הרגיל בין 0 לבין כל מספר אחר היא תמיד המספר האחר. כנראה שזה נכון גם לגבי הפעולה $\heartsuit$ ".
הוא רשם את התרגילים:
 $0 \heartsuit 2$ $0 \heartsuit 6$ $3 \heartsuit 0$
האם השערתו של דני נכונה?

ב. אלונה אמרה: "תוצאת הכפל הרגיל בין 1 לבין כל מספר אחר היא תמיד המספר האחר. כנראה שזה נכון גם לגבי הפעולה $\heartsuit$ ".
היא רשמה את התרגילים:
 $1 \heartsuit 2$ $1 \heartsuit 6$ $3 \heartsuit 1$
האם השערתה של רינה נכונה?

ג. נסו למצוא מספר אחד המתאים לכל המקומות הריקים בתרגילים הבאים:
 $\blacksquare \heartsuit 2 = 2$ $\blacksquare \heartsuit 6 = 6$ $3 \heartsuit \blacksquare = 3$

הגדרה:

מספר שתוצאת הפעולה בינו לבין כל מספר נוסף היא המספר הנוסף נקרא **איבר ניטרלי** של הפעולה הזאת.

בשלב זה, נתייחס לאיברים ניטרליים **רק בפעולות חילופיות**.

מקובל לסמן את האיבר הניטרלי ב- e .

אם נסמן את הפעולה ב- $*$ ואם לפעולה זאת יש איבר ניטרלי, אז מתקיים:

$a * e = e * a = a$ לכל a בקבוצת המספרים שבה מוגדרת הפעולה הזאת.

ד. האם לפעולה $\heartsuit$ יש איבר ניטרלי?

7. קבעו האם הפעולה $\clubsuit$ היא בעלת איבר ניטרלי. אם כן, מצאו אותו. אם לא, הסבירו.



2. פעולות עם תוצאות מחזוריות - חלק א



דני הביט בשעון בחדרו. אביו יצא לתורנות ואמר שיחזור בעוד 10 שעות. דני ניסה להבין איזה שעה יראה השעון כשאביו יחזור.

נסה לעזור לדני להבין כיצד לבצע פעולות על השעון, ונכיר תכונות של פעולות אלו.

הגדרה:

נתונות 5 נקודות על מעגל המסומנות במספרים ונתון מחוג המכוון ל-0.

נגדיר פעולה $a \circ b$ בין כל זוג מספרים טבעיים או 0 כך:

סובבו את המחוג a תחנות בכיוון השעון,

ואחר-כך המשיכו לסובב באותו כיוון b תחנות נוספות.

תוצאת הפעולה היא מספר התחנה שהגעתם אליה.

דוגמאות:

$$2 \circ 3 = 0$$

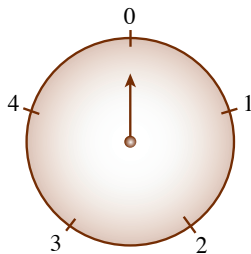
$$2 \circ 1 = 3$$

$$1 \circ 3 = 4$$

$$2 \circ 7 = 4$$

$$6 \circ 3 = 4$$

$$6 \circ 7 = 3$$



1. פתרו:

$$50 \circ 100 = \text{ז.}$$

$$7 \circ 7 = \text{ד.}$$

$$5 \circ 1 = \text{א.}$$

$$34 \circ 22 = \text{ח.}$$

$$4 \circ 6 = \text{ה.}$$

$$4 \circ 4 = \text{ב.}$$

$$134 \circ 122 = \text{ט.}$$

$$10 \circ 21 = \text{ו.}$$

$$3 \circ 6 = \text{ג.}$$

2. א. מצאו מספר פתרונות מתאימים לכל משוואה

(x מספר טבעי או אפס):

$$32 \circ x = 2$$

$$7 \circ x = 3$$

$$2 \circ x = 0$$

$$x \circ 100 = 1$$

$$x \circ 2 = 1$$

$$3 \circ x = 1$$

ב. נסו למצוא תכונה משותפת לכל הפתרונות השונים שמצאתם לאותה משוואה.



ג. לפניכם חלק מקבוצת הפתרונות של משוואה מסוג המשוואות בסעיף א:

26, 21, 16, 11, 6, 1

נסו למצוא משוואה שאלה הפתרונות שלה.

התוכלו למצוא משוואה מתאימה נוספת?

3. ביום אחד, אביו של דני יצא שוב לתורנות של 10 שעות.

הוא אמר: "אחזור בשעה 7 בערב". מתי יצא האב לתורנות?



תכונות נוספות

סגירות

בפעילות הקודמת הכרנו פעולות בינאריות חדשות, ותכונות שלהן. הכרנו

גם שתי תכונות של פעולות בינאריות: **חילופיות ואיבר ניטרלי**.

תזכורת:

פעולה בינארית בין מספרים היא פעולה בין שני מספרים שנותנת כתוצאה מספר יחיד.

פעולה חילופית היא פעולה בינארית שבה סדר המספרים אינו משפיע על התוצאה.

איבר ניטרלי של פעולה בינארית הוא מספר שפעולה בינו לבין כל מספר נוסף נותנת כתוצאה את המספר הנוסף.

כל הפעולות שהכרנו היו פעולות בינאריות. בשלב זה, נתייחס לאיברים ניטרליים רק בפעולות חילופיות.

4. האם הפעולה $\circ$ היא פעולה בינארית? הסבירו.

האם הפעולה $\circ$ היא חילופית? נמקו.

האם לפעולה $\circ$ יש איבר ניטרלי? אם כן, פרטו מהו. אם לא, נמקו.



מיכאל התלבט בשאלה: האם הפעולות החיבור והחיסור הרגילות הן חילופיות - עבור קבוצת המספרים הטבעיים.

לגבי פעולת החיבור, הוא אמר: "פעולת החיבור היא חילופית.

כלומר, לכל שני מספרים טבעיים a ו- b מתקיים: $a + b = b + a$."

הוא הסביר "אם יש לי שתי חבילות של סוכריות ואני רוצה לאחד את הסוכריות לחבילה אחת, זה לא משנה אם אתחיל מחבילה אחת או מהחבילה השנייה".

לגבי פעולת החיסור, מיכאל התלבט מה לקבוע.

הוא בדק דוגמה: $7 - 3 = 4$ $3 - 7 = -4$

מיכאל שם לב, כי התוצאה של אחד התרגילים איננה מספר טבעי.

הוא הסיק מכך כי זוהי דוגמה נגדית המוכיחה כי פעולת החיסור איננה חילופית.

הגדרה:

קבוצת מספרים נקראת **סגורה** לגבי פעולה בינארית, אם תוצאת הפעולה בין כל שני מספרים שבקבוצה גם כן שייכת לאותה הקבוצה.

דוגמה: קבוצת המספרים הטבעיים היא קבוצה סגורה לגבי פעולת החיבור הרגיל, כי סכום של כל שני מספרים טבעיים הוא תמיד מספר טבעי - כלומר, גם הוא שייך לקבוצה.

לעומת זאת, קבוצת המספרים הטבעיים **איננה** סגורה לגבי פעולת החיסור הרגיל, כי התוצאה של חיסור שני מספרים טבעיים **היא לא תמיד** מספר טבעי.

למשל, תוצאת החיסור של $3 - 7$ איננה מספר טבעי.

5. בכל סעיף, בדקו האם קבוצת המספרים הטבעיים (ללא המספר אפס) סגורה לגבי הפעולה הנתונה.

אם כן, הסבירו מדוע. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. כפל

ב. חילוק

ג. חזקה

ד. ממוצע חשבוני (תזכורת: משמעות הפעולה "ממוצע חשבוני של שני מספרים" היא מחצית סכומם).

6. האם קבוצת המספרים הטבעיים היא קבוצה סגורה לגבי הפעולה $\odot$ שהכרנו בתחילת הפעילות? אם כן, הסבירו מדוע. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

7. התוצאות של הפעולה $\circ$ הן **מחזוריות**. לכן נקרא לפעולה $\circ$ **פעולה עם תוצאות מחזוריות**.
 נסו למצוא דוגמאות מחיי יום יום המצריכות פעולות חשבון עם תוצאות מחזוריות.
 בחרו אחת מדוגמאות אלו.
 א. שאלו עליה שתי שאלות מחיי היום-יום.
 ב. רשמו שני תרגילים שידגימו את הפעולה ואת מחזוריות התוצאות.

קיבוציות

תכונה נוספת של פעולה בינארית וקבוצת מספרים היא תכונת **הקיבוציות**. לפי חוק הקיבוץ סדר ביצוע הפעולה בשרשרת (אותה פעולה פעמיים ושלושה מספרים), איננה משנה את התוצאה. למשל:

$$(10 + 5) + 3 = 10 + (5 + 3)$$

8. האם לדעתכם פעולת החיסור היא קיבוצית?

הגדרה

פעולה בינארית היא **פעולה קיבוצית** אם היא מקיימת את חוק הקיבוץ, כלומר סדר הביצוע בשרשרת של אותה פעולה פעמיים, אינו משנה את התוצאה.

כלומר, פעולה $*$ היא קיבוצית עבור קבוצת מספרים, אם **לכל** שלושה מספרים a, b, c שבקבוצת המספרים המתאימים לפעולה, מתקיים השוויון: $(a * b) * c = a * (b * c)$

מח/2/3: פעולת החיבור הרגיל היא קיבוצית בקבוצת המספרים הטבעיים, כי

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{לכל שלושה מספרים טבעיים מתקיים:}$$

לעומת זאת, פעולת החיסור הרגיל איננה קיבוצית בקבוצת המספרים טבעיים.

$$\text{למשל, } (10 - 5) - 3 = 2 \quad \text{אבל} \quad 10 - (5 - 3) = 8$$

9. האם הפעולה $\odot$ שהכרנו בתחילת הפעילות (סיבוב במעגל על-פי מספר התחנות) היא קיבוצית בקבוצת המספרים הטבעיים ו-0? נמקו את תשובתכם.

10. נתונות שלוש פעולות בינאריות שהכרנו בפעילות הקודמת.

$$a \star b = a^2 + b \quad a \spadesuit b = \frac{a+b}{2} \quad a \blacktriangle b = 2 \cdot a + b$$

לכל פעולה, קבעו האם היא קיבוצית. אם כן, הסבירו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית (כלומר, דוגמה שבה משנים את סדר הביצוע בשרשרת של הפעולה, ומקבלים תוצאות שונות).



11. נתייחס לקבוצת המספרים **השלמים** על ציר המספרים.

נגדיר פעולה M בין שני מספרים שלמים a ו- b באופן הבא:

$a M b$ שווה **למרחק** על ציר המספרים בין a ל- b . שימו לב! מרחק הוא תמיד מספר חיובי.

א. האם הפעולה M היא פעולה בינארית? הסבירו.

ב. האם קבוצת המספרים השלמים סגורה לגבי הפעולה M ?

ג. האם הפעולה M היא חילופית? נמקו.

ד. האם הפעולה M היא קיבוצית?

ה. הסבירו מדוע לפעולה M אין איבר נטרלי.

ו. מצאו קבוצת מספרים סגורה לגבי הפעולה M , שבה יש לפעולה זו איבר נטרלי.

3. פעולות עם תוצאות מחזוריות - חלק ב

קבוצות פעולות ותכונות

חזרו בקצרה **בזוגות** על המושגים והתכונות שעסקנו בהם בשיעורים הקודמים.

חלקו ביניכם את המושגים והתכונות, והסבירו אותם במילים שלכם.

א. פעולה **בינארית**

ב. קבוצה **סגורה** לגבי פעולה בינארית

ג. פעולה **בינארית חילופית**

ד. איבר **ניטרלי** לגבי פעולה בינארית (נתייחס לאיבר ניטרלי רק בפעולה חילופית)

ה. פעולה **בינארית קיבוצית**

ו. פעולה **בינארית עם תוצאות מחזוריות**

1. a ו-b הם שני מספרים שלמים, ו- * היא פעולה ביניהם.

נסו לרשום בעזרת אותיות ומעט מילים את התכונות שבמסגרת.

2. אילו מן התכונות שבמסגרת מתקיימות לגבי המספרים הטבעיים והפעולות הבאות

א. חיבור

ב. ממוצע חשבוני (תזכורת: ממוצע חשבוני של שני מספרים הוא מחצית סכומם).

ג. חזקה

ד. כפל

מספר הופכי

הגדרה:

b הוא מספר הופכי ל-a בפעולת הכפל הרגילה, אם $a \cdot b = 1$.

דוגמה: $\frac{2}{5}$ הופכי ל- $2\frac{1}{2}$, כי $2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 1$.

מכיוון שהכפל היא פעולה חילופית, גם $2\frac{1}{2}$ הופכי ל- $\frac{2}{5}$.

שימו לב: 1 (תוצאת המכפלה של מספרים הופכיים) הוא המספר הניטרלי של פעולת הכפל.

באופן כללי, b נקרא **מספר הופכי** ל-a בפעולה חילופית * שיש לה איבר ניטרלי e

אם $a * b = e$. מכיוון שהפעולה חילופית, גם a הופכי ל-b.

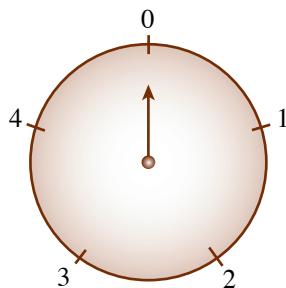
כלומר, a ו-b הופכיים זה לזה.



3. א. השלימו במחברת במילים את ההגדרה:
מספרים הופכיים זה לזה עבור פעולה מסוימת הם מספרים ש...
ב. מהו המספר ההופכי ל-5 בפעולת החיבור הרגיל? האם יש לו שם מקובל אחר ביחס ל-5?
4. א. האם בקבוצת המספרים השלמים עם פעולת הכפל הרגיל, יש מספר הופכי לכל מספר? הסבירו או תנו דוגמה נגדית.
ב. מצאו קבוצת מספרים עם פעולת הכפל הרגיל, כך שלכל מספר בה יש מספר הופכי שגם הוא שייך לקבוצה (זהירות, אפס!).

פעולות עם תוצאות מחזוריות

חיבור מחזורי



בפעילות הקודמת הכרנו את הפעולה $\odot$ כפעולת חיבור על שעון שהכיל 5 נקודות. חיבור זה נותן תוצאות מחזוריות. במקרה זה, גודל המחזור הוא 5.
בדקנו גם תכונות של הפעולה הזאת בקבוצת המספרים הטבעיים ו-0.
נתייחס עתה לפעולה בינארית זו בקבוצת המספרים $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, ונסמן אותה ב- $\oplus_5$.

נרחיב את ההסתכלות גם לשעונים בעלי מספר נקודות שונה - כלומר, נבצע פעולות חשבון בגדלי מחזור שונים.

למשל, נתייחס ל- $\oplus_{12}$ כפעולת חיבור בעלת מחזור 12, על קבוצת המספרים: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. פעולה זו שקולה לפעולת החיבור על שעון שמכיל 12 נקודות.

למשל, $6 \oplus_{12} 3 = 9$ $7 \oplus_{12} 10 = 5$ $9 \oplus_{12} 11 = 8$

5. חשבו:

א. $3 \oplus_{12} 10 =$ ג. $8 \oplus_{12} 5 =$ ה. $8 \oplus_{12} 11 =$
ב. $3 \oplus_{12} 9 =$ ד. $4 \oplus_{12} 3 =$ ו. $7 \oplus_{12} 7 =$

6. חברו שני תרגילים לכל תוצאה.

א. $\blacksquare \oplus_{12} \blacksquare = 0$ ב. $\blacksquare \oplus_{12} \blacksquare = 1$ ג. $\blacksquare \oplus_{12} \blacksquare = 5$

נבדוק תכונות של הפעולה $\oplus_{12}$ בקבוצה $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

7. סמנו נכון / לא נכון והסבירו.

א. הקבוצה הנתונה סגורה לגבי הפעולה $\oplus_{12}$.

ב. הפעולה $\oplus_{12}$ היא פעולה חילופית.

ג. הפעולה $\oplus_{12}$ היא פעולה קיבוצית.

ד. האיבר הניטרלי של הפעולה $\oplus_{12}$ הוא 0.

ה. 8 ו-4 הם מספרים הופכיים זה לזה לגבי הפעולה $\oplus_{12}$.

8. מצאו את ההופכיים למספרים: 0, 11, 3 לגבי הפעולה $\oplus_{12}$

האם יש מספר נוסף שההופכי שלו שווה לו?

כפל מחזורי

9. א. הציעו הגדרה ל**כפל מחזורי** בקבוצה $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. סמנו פעולה זאת כך: $a \odot_5 b$

ב. פתרו לפי הגדרתכם

$$3 \odot_5 2 = \quad 3 \odot_5 4 = \quad 2 \odot_5 3 = \quad 4 \odot_5 3 =$$

ג. התייחסו לתכונות שבמסגרת בראשית הפעילות. בדקו אילו מן התכונות מתקיימות לגבי הפעולה $\odot_5$ שהגדרתם בקבוצה הנתונה?

הגדרה:

נגדיר פעולת $a \odot_5 b$ כפעולת **כפל מחזורי**, בקבוצה $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ כך:

כופלים את a ב-b בכפל רגיל, ומחסרים מהמכפלה כפולות של 5, עד שהתוצאה קטנה מ-5. זוהי תוצאת הפעולה.

$$\text{למשל: } 3 \odot_5 3 = 4 \quad 4 \odot_5 4 = 1$$

10. א. העתיקו למחברת והשלימו את הלוח של הפעולה $\odot_5$.

$\odot_5$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3				4	
4					1

ב. הסבירו כיצד רואים בלוח ש

• שהקבוצה סגורה לגבי הפעולה

• את המספר הניטרלי לגבי הפעולה

• שהפעולה היא חילופית

• זוגות של מספרים הופכיים זה לזה.

ג. האם לכל מספר בקבוצה יש הופכי? הסבירו.

ד. הסבירו מדוע אי-אפשר לראות בלוח אם הפעולה קיבוצית.



11. נגדיר באופן דומה פעולה $a \odot_4 b$ בקבוצה $\{0, 1, 2, 3\}$. הוכיחו כי ל-2 אין הופכי לגבי פעולה זו בקבוצה הנתונה.

תופעות מחזוריות בחיינו

יוסי ומיכל גרים זה מול זה. כל אחד מהם מגדל כלב בדירתו. יוסי מוציא את הכלב שלו לטיול כל 8 שעות, ואילו מיכל מוציאה את הכלב שלה לטיול כל 9 שעות.

12. ביום ראשון יצאו מיכל, יוסי והכלבים לטיול משותף בשעה 7:00.

א. כל כמה שעות ייפגשו יוסי ומיכל במהלך טיוליהם עם הכלבים?

ב. באיזה יום ובאיזו שעה יתקיים הטיול המשותף הבא של יוסי מיכל והכלבים?



הצ'קדה (משמעות המילה Cicada בלטינית היא "צרצר עץ") היא חרק מזמזם המזכיר ארבה. ישנם כ-2.500 מינים שונים של ציקדות. שניים מן המינים הללו חיים רוב הזמן מתחת לפני האדמה, ורק פעם אחת במשך כל תקופת חייהם, הם עולים אל מעל פני השטח - האחד כל 17 שנים, והשני כל 13 שנים. לכן באזורים מסוימים בעולם (למשל, בארה"ב), הציקדות ממינים אלו מופיעות מעל פני האדמה, בקבוצות גדולות מאוד כל 17 (או 13) שנים.

שני מיני הציקדות הללו יוצרות תופעות מחזוריות: האחת כל 17 שנים, והשנייה כל 13 שנים.

כל כמה שנים שני מיני הציקדה יופיעו מעל פני האדמה בעת ובעונה אחת?



13. אם בשנה מסוימת הופיעה ציקדה ממין אחד, ובשנה שאחריה הופיעה הציקדה מן המין השני,

כמה שנים יעברו עד שיופיעו שני מיני הציקדות באותה השנה?

האם יש יותר מתשובה אחת אפשרית? הסבירו מדוע.

4. מהי חבורה?

לפניכם לוח הפעולה $\oplus_7$: חיבור עם תוצאות מחזוריות במחזור 7, על קבוצת המספרים השלמים מ-0 עד 6.

$\oplus_7$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

נחקור את תכונות הקבוצה והפעולה בעזרת הלוח.

1. א. הסבירו כיצד מזהים בלוח את התכונות הבאות של הפעולה $\oplus_7$ והקבוצה $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

- סגירות
- קיום מספר הניטרלי
- חילופיות
- קיום מספר הופכי לכל מספר שבקבוצה.

ב. הפעולה $\oplus_7$ היא פעולה קיבוצית. הדגימו בעזרת שתי דוגמאות.

בפעילויות הקודמות היכרנו פעולות בינאריות שונות, ולמדנו על תכונות שונות שלהן: סגירות, קיבוציות, איבר ניטרלי ואיברים הופכיים. בפעילות זו נלמד על מבנה מתמטי בשם **חבורה חילופית**, שקושר בין התכונות האלה.



הגדרה:

קבוצה של מספרים, או של עצמים מתמטיים אחרים, **עם פעולה** בינארית המוגדרת על כל איברי הקבוצה נקראת **חבורה חילופית**, אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. הקבוצה **סגורה** לגבי הפעולה.

ב. הפעולה היא **קיבוצית**.

ג. בקבוצה קיים **איבר ניטרלי** עבור הפעולה.

ד. לכל איבר בקבוצה יש **איבר הופכי** עבור הפעולה.

ה. הפעולה היא **חילופית**.

הערה: יש גם חבורות שאינן חילופיות, והן אינן מקיימות את התנאי החמישי. בפעילויות שלנו נעסוק רק בחבורות חילופיות.

משפט 1.3:

קבוצת כל המספרים השלמים (חיוביים ושליילים ו-0) עם פעולת החיבור הרגיל היא חבורה.

כדי להראות זאת, נצטרך לוודא שכל התנאים מתקיימים:

● **סגירות:** לכל שני מספרים שלמים a ו- b , הסכום $a + b$ הוא מספר שלם, ולכן נמצא בקבוצה.

● **קיבוציות:** לכל שלושה מספרים שלמים a, b, c , מתקיים: $(a + b) + c = a + (b + c)$

● **איבר ניטרלי:** 0 נמצא בקבוצת השלמים ולכל מספר שלם a מתקיים: $a + 0 = 0 + a = a$.

● **איבר הופכי:** לכל מספר שלם a קיים מספר שלם $(-a)$, כך ש- $a + (-a) = 0$

כלומר, לכל a קיים מספר שסכומו עם a הוא המספר הניטרלי.

● **חילופיות:** לכל שני מספרים שלמים a, b מתקיים: $a + b = b + a$.

2. האם קבוצת המספרים השלמים מ-0 עד 6 עם הפעולה $\oplus_7$ שהוגדרה בתחילת הפעילות היא חבורה חילופית? נמקו.

3. לכל סעיף, מצאו דוגמא לקבוצה עם פעולה בינארית המקיימת את התנאי.

א. הקבוצה **אינה סגורה** לגבי הפעולה.

ב. הפעולה **אינה קיבוצית**.

ג. בקבוצה **אין איבר ניטרלי** עבור הפעולה.

ד. בקבוצה **יש איבר ניטרלי** עבור הפעולה, אך יש איברים בקבוצה שאין להם **איבר הופכי** בקבוצה.



4. לפניכם מספר קבוצות ופעולות.

קבעו אילו מן התכונות מתקיימות בהן ואילו לא. נמקו תשובותיכם.
זהו על-סמך כך, אילו קבוצות ופעולות הן חבורות חילופיות.

התכונה / הקבוצה עם הפעולה	סגירות	קיבוציות	איבר ניטרלי	איבר הופכי	חילופיות	חבורה חילופית?
המספרים הטבעיים עם חיבור						
המספרים השלמים עם כפל						
המספרים הטבעיים עם הממוצע החשבוני						
המספרים $\frac{m}{n}$ (n, m מספרים שלמים, שונים מ-0) עם כפל						
קבוצת המספרים (0, 1, 2, 3, 4) עם חיבור מחזורי $\oplus_5$		✓				
קבוצת המספרים (0, 1, 2, 3, 4) עם כפל מחזורי $\odot_5$		✓				
קבוצת המספרים (1, 2, 3, 4) עם כפל מחזורי $\odot_5$		✓				
קבוצת המספרים (0, 1, 2, 3) עם חיבור מחזורי $\oplus_4$		✓				
קבוצת המספרים (1, 2, 3) עם כפל מחזורי $\odot_4$		✓				



זיהוי ובניית לוח פעולה של חבורה חילופית

$\odot_6$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

5. לפניכם לוח של הפעולה כפל 6 מחזורי על קבוצת המספרים $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

א. אילו מן התנאים הדרושים לקיום חבורה חילופית מתקיימים בקבוצה עם הפעולה הבינארית $\odot_6$?

ב. לכל תנאי שאינו מתקיים תנו דוגמה נגדית.

ג. האם הקבוצה עם הפעולה הנתונה היא חבורה חילופית? נמקו.

6. בכל סעיף' בדקו האם הקבוצה עם הפעולה הנתונה מהווה חבורה חילופית? הסבירו את תשובתכם.

ב. הקבוצה $\{a, b, c\}$

הפעולה $\blacklozenge$

$\blacklozenge$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	c	a

א. הקבוצה $\{a, b\}$

הפעולה $\blacklozenge$

$\blacklozenge$	a	b
a	a	b
b	b	b

5. וקטורים

בארבע הפעילויות האחרונות, למדנו מושגים בקבוצות של מספרים ולמדנו תכונות של פעולות במספרים.

נדון בפעולה בינארית מסוג אחר: פעולה בין עצמים מתמטיים שאינם מספרים.

הערה: העבודה על פעילות זו דורשת עבודה על דף נקודות או על דף משבצות גדולות.

מהו וקטור?

הגדרה:

וקטור במישור מיוצג על-ידי חץ בעל אורך וכיוון,

ומסומן על-ידי אותיות גדולות המציינות את שמות הנקודות שבזנב ובראש החץ ($\overrightarrow{AB}$) או על-ידי אות קטנה ($\underline{u}$).

שימו לב! בסימון $\overrightarrow{AB}$ חשוב להקפיד על סדר האותיות. האות שבזנב החץ רשומה ראשונה משמאל, והאות שבראש החץ מימינה.

למשל, הוקטור $\underline{w}$ מסומן גם בסימון $\overrightarrow{FE}$ ולא $\overrightarrow{EF}$

שני וקטורים שיש להם אותו אורך ואותו כיוון נקראים וקטורים שווים.

למשל, $\underline{u} = \underline{v}$ הם וקטורים שווים. מסמנים: $\underline{u} = \underline{v}$

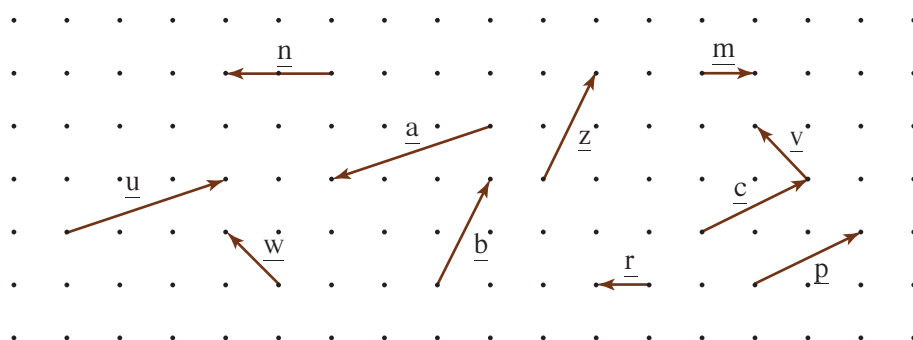
שני וקטורים שווים באורכם, אך מנוגדים בכיוונם נקראים וקטורים נגדיים.

למשל, $\underline{u} = -\underline{v}$ הם וקטורים נגדיים. מסמנים: $\underline{w} = -\underline{v}$

וקטור המתחיל ומסתיים באותה נקודה נקרא וקטור האפס, ומסומן: $\underline{0}$

1. בשרטוט הבא נתונים וקטורים.

א. מצאו זוגות של וקטורים שווים.



ב. מצאו זוגות של וקטורים שווים באורכם, אך לא בכיוונם.

ג. מצאו זוג וקטורים שווים בכיוונם, אבל לא באורכם.

ד. מצאו זוגות של וקטורים נגדיים.

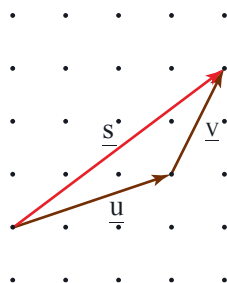


חיבור וקטורים

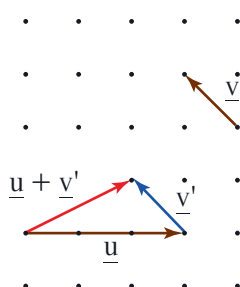
הוקטורים מתארים תנועה ישירה בכיוון מסוים ולמרחק מסוים.

הגדרה:

נגדיר את פעולת החיבור + בין וקטורים כסיכום התנועה.



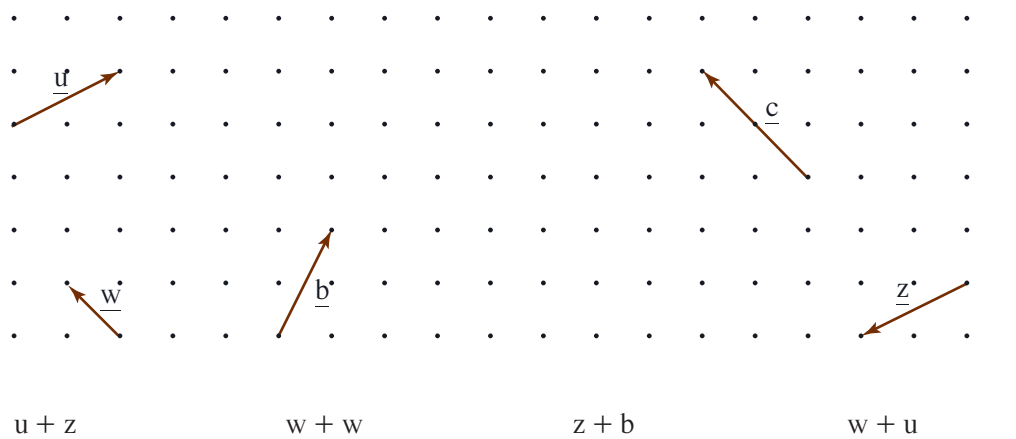
כדי לחבר וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, כלומר כדי לקבל את הוקטור $\underline{u} + \underline{v}$, נתקדם תחילה לפי האורך והכיוון של $\underline{u}$, ולאחר מכן ננוע לפי האורך והכיוון של $\underline{v}$. תוצאת הפעולה היא וקטור $\underline{s}$ המשקף את סיכום התנועה שלנו, מנקודת ההתחלה של הוקטור הראשון לנקודת הסיום של הוקטור השני (ללא ציון נקודות ביניים ופניות שעברנו בדרך).



אם הוקטור $\underline{v}$ אינו בהמשכו של הוקטור $\underline{u}$, אפשר להזיז את הוקטור $\underline{v}$ (מבלי לשנות את אורכו או את כיוונו), כך שיהיה בהמשכו של הוקטור $\underline{u}$. כלומר, במקרה זה אפשר לשרטט וקטור $\underline{v'}$ השווה ל- $\underline{v}$, כך שזנבו יהיה בראש הוקטור $\underline{u}$.

במקרה זה, $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{v'}$.

2. נתונים חמישה וקטורים וארבעה תרגילים של חיבור וקטורים.

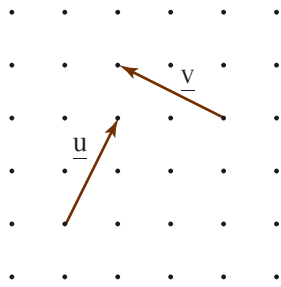


א. עבדו על דף נקודות או על דף משבצות גדולות.

בכל תרגיל, שרטטו את זוג הוקטורים המחוברים ואת תוצאת פעולת החיבור של כל זוג.

ב. לכל זוג וקטורים מסעיף א, מצאו בין הוקטורים הנתונים וקטור השווה לתוצאת החיבור ביניהם.

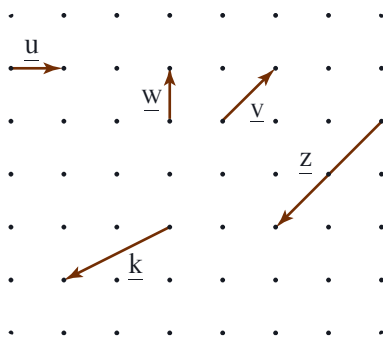
3. בצעו על דף נקודות את החיבור של הווקטורים $\underline{u} + \underline{v}$.



4. בשרטוט נתונים חמישה וקטורים.

בטאו אם אפשר, את הסכומים הבאים בעזרת הווקטורים הנתונים, או הנגדיים להם.

3/מח: $\underline{u} + \underline{w} = \underline{v}$



א. $\underline{k} + (-\underline{w}) =$

ב. $\underline{z} + (\underline{v}) =$

ג. $\underline{z} + \underline{w} =$

ד. $\underline{v} + \underline{w} =$

ה. $(\underline{z} + \underline{v}) + \underline{v} =$

ו. $(\underline{z} + \underline{w}) + \underline{u} =$

ז. $\underline{z} + (\underline{w} + \underline{u}) =$

5. שרטטו וקטור כלשהו במחברת או על דף נקודות.

שרטטו שלושה זוגות וקטורים שסכומם הוא הוקטור ששרטטתם.

6. נתון תרגיל של שתי פעולות חיבור ושלושה וקטורים.

האם לדעתכם, ניתן לשרטט ישירות את וקטור התוצאה, מבלי לשרטט תחילה סכום של שניים מהם? הסבירו.

7. א. שרטטו שני וקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ על דף נקודות.

ב. שרטטו את הסכום $\underline{a} + \underline{b}$ ואת הסכום $\underline{b} + \underline{a}$

מה מצאתם?



תזכורת

- קבוצת איברים עם פעולה בינארית המוגדרת על איבריה היא חבורה חילופית לגבי הפעולה, אם מתקיימים התנאים הבאים.
- הקבוצה סגורה לגבי הפעולה - כלומר, תוצאת הפעולה על כל שני איברים בקבוצה גם היא איבר בקבוצה.
 - הפעולה היא קיבוצית.
 - בקבוצה קיים איבר נטרלי לגבי הפעולה.
 - לכל איבר בקבוצה יש איבר הופכי שגם הוא בקבוצה, כך שהפעולה בין כל איבר וההופכי לו נותנת כתוצאה את האיבר הניטרלי.
 - הפעולה היא חילופית.

8. האם קבוצת כל הווקטורים **במישור** עם פעולת החיבור בין וקטורים היא חבורה חילופית? הסבירו במילים או/ו בעזרת שרטוט כל שלב בבדיקה שלכם. אם יש תנאים שאינם מתקיימים, הציגו דוגמאות נגדיות.

9. נתונה קבוצת כל הווקטורים **על ציר המספרים**, ונתונה פעולת החיבור בין וקטורים. האם קבוצה זו היא חבורה חילופית? הסבירו במילים או/ו בעזרת שרטוט כל שלב בבדיקה שלכם. אם יש תנאים שאינם מתקיימים, הציגו דוגמאות נגדיות.





הפעילות שבהמשך הינה חלק מתכנית בינלאומית "מתמטיקה בהתכתבות"

לפרטים נוספים:

www.weizmann.ac.il/zemed/mbm



חוברת זו מופקת בשלוש רמות כאשר רמה 3 מיועדת
לתלמידי חטיבות הביניים

חוברת זו פורסמה בשנת תשס"ד

© הזכויות בחומר המוגש בדפים אלו שייכות למכון דוידסון לחינוך מדעי שליד מכון ויצמן למדע.
אין להשתמש בחומר לצורך הוראה בתשלום או מכירה, ואין להעתיקו ו/או להפיצו בכל דרך אחרת, בין
בתמורה ובין ללא תמורה ללא אישור בכתב ממכון דוידסון לחינוך מדעי.

לשבור את המימד!

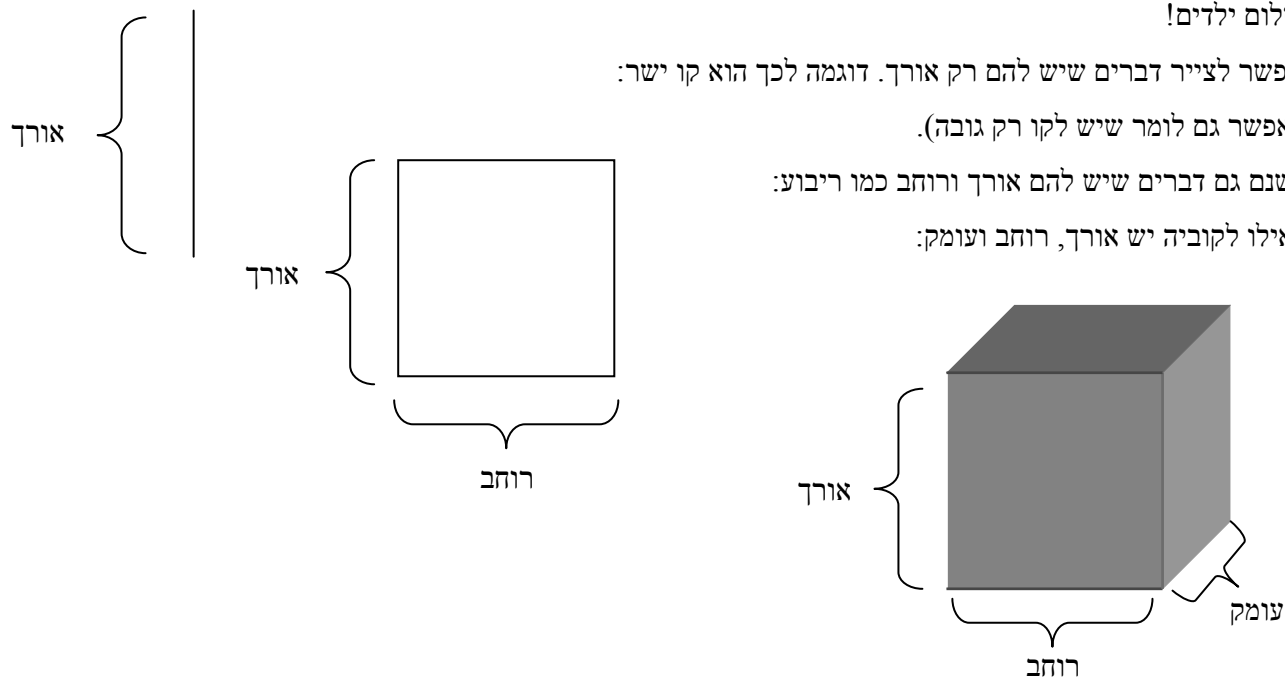
שלום ילדים!

אפשר לצייר דברים שיש להם רק אורך. דוגמה לכך הוא קו ישר:

(אפשר גם לומר שיש לקו רק גובה).

ישנם גם דברים שיש להם אורך ורוחב כמו ריבוע:

ואילו לקוביה יש אורך, רוחב ועומק:



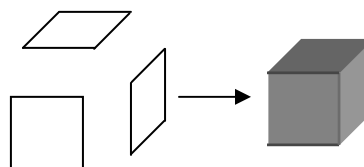
אם נקרא ל: "אורך", "רוחב" ו- "עומק" בשם: **מימד**, הרי נאמר שלקו יש **מימד** אחד (אורך או גובה),

לריבוע יש שני **מימדים** (אורך ורוחב) ולקוביה שלושה **מימדים** (אורך, רוחב ועומק).

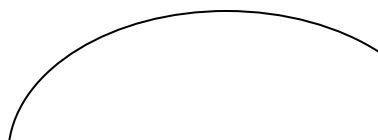
שימו לב שאי אפשר לצייר קוביה אמיתית על דף נייר כי לדף עצמו יש רק שני מימדים – אורך ורוחב ("עומק" או יותר נכון עובי הדף הוא קטן מאוד מאוד). למרות זאת, אנו מציירים קוביה באמצעות ריבוע

ושתי מקביליות והמוח שלנו גורם לכך שנראה את זה בצורת קוביה "תלת מימדית" (עם שלושה

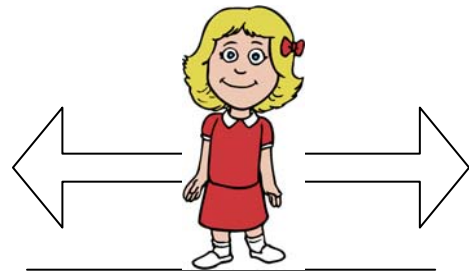
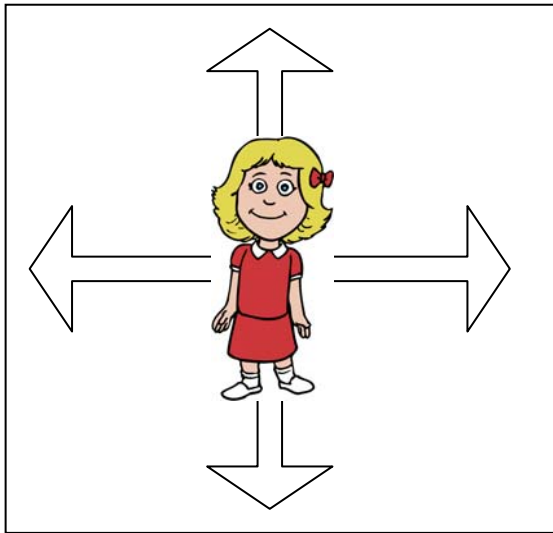
מימדים):



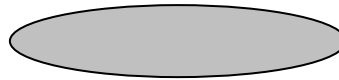
לפעמים קשה לדעת בדיוק מהו המימד של צורה מסוימת. דוגמה מצוינת לכך הוא הקו העקום:



כדי למצוא את מספר המימדים של צורה, מספיק לשאול את השאלה: "אילו הייתי יכול ללכת על גבי הצורה, באלו כיוונים אני יכול ללכת?". אם אפשר ללכת רק קדימה ואחורה (כמו על גבי קו עקום) – אזי יש לצורה מימד אחד. אם אפשר ללכת גם ימינה ושמאלה כמו על גבי משטח ריבועי, אזי יש שני מימדים ואם אפשר גם ללכת למעלה ולמטה, אזי יש שלושה מימדים.



1. רשמו כמה מימדים יש לצורות הבאות:



א. אליפסה:



ב. גליל:



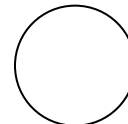
ג. קו עקום:

ד. בן אדם: _____

ז. פני כדורסל: _____

ו. מעטפת כדור הארץ (האדמה עליה כולנו דורכים): _____

ז. נקודה: _____



ח. היקף העיגול:

עולם דו-מימדי

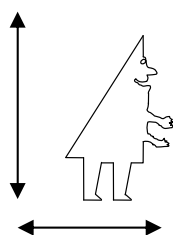
הרבה פעמים משתעשעים מתמטיקאים בכל מיני דברים דמיוניים. שני מקרים מוזרים במיוחד הם העולמות הדמיוניים שהמציאו (כל אחד בנפרד) המתמטיקאים צ'רלס הינטון (Charles Hinton) ו- אדווין אבוט (Edwin Abbott). הם פרסמו את עבודותיהם בספרים עלילתיים שנמכרו בעותקים רבים! שני העולמות הדמיוניים שהם המציאו היו זהים בדבר אחד – הם היו עולמות שבהם כל הדברים היו שטוחים!

עולם "שטוח"

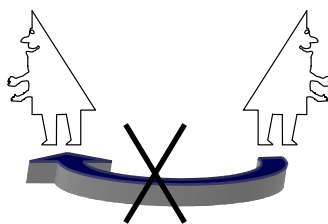
כל דבר בעולם "שטוח" הוא שטוח כמו דף נייר – כך שלכל דבר יש גובה (אורך) ורוחב (בדומה קצת ל "קומיקס").



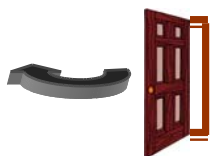
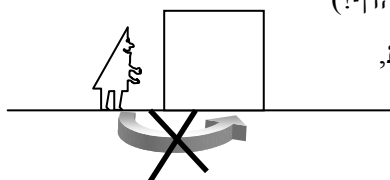
עולם כזה, בו יש אורך ורוחב אך לא עומק הוא עולם עם שני מימדים – (אורך ורוחב) עולם דו-מימדי.



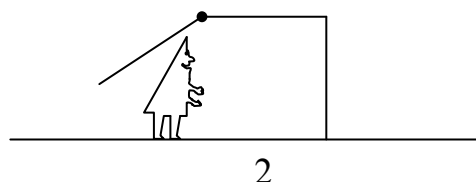
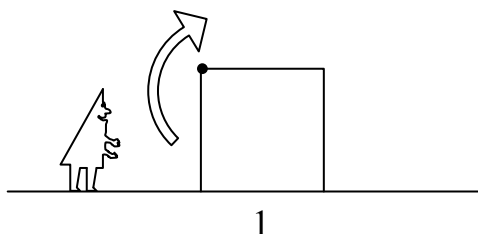
כך למשל צייר צ'רלס הינטון בן אדם בעולם שכזה: היה לו אורך (גובה) – והוא יכול לקפוץ למעלה ולמטה. היה לו רוחב – והוא יכול ללכת ימינה ושמאלה... אבל אין לו עומק! "מותר" לו לזוז רק על פני הדף בכיוונים למעלה, למטה ימינה ושמאלה, אבל אסור לו לצאת מהדף – ולכן הוא לא יכול להסתובב עם הפנים לכיוון השני (שמאל) – כי כדי להסתובב חייבים לצאת מהדף!



איך יראה בית בעולם דו-מימדי? הבית בציור אינו יכול להיות בית כזה, שכן אין לאיש הדו-מימדי שום דרך להיכנס לתוכו – הוא נתקע בקיר! (הוא כמובן לא יכול לצאת מהדף!) צריך כמובן להוסיף לבית דלת – אבל בעולם כזה, אין דלתות רגילות, שכן דלת רגילה נפתחת תמיד לעומק:

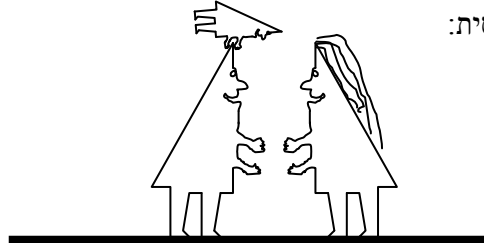


לכן, צריך דלת מיוחדת שעולה ויורדת כך:



אבוט, מנהל בית ספר בלונדון, אנגליה, פרסם את ספרו "Flatland" (או בעברית "ארץ שטוחה") בשנת 1884. הינטון היה גם כן לונדוני, אך לאחר שהתחתן (עם בת של מתמטיקאי מפורסם אחר), עבר לגור בארצות הברית, שם כיהן כפרופסור למתמטיקה באוניברסיטת פרינסטון (Princeton).

ספרו, "פרק בחיי ארץ שטוחה" (An Episode of Flatland), יצא לאור בשנת 1907. הינטון קרא לכוכב הלכת הדו-מימדי אסטריה. מכיוון שאנשי אסטריה לא יכלו להסתובב, הגברים נולדו כאשר הם פונים תמיד ימינה והנשים נולדו כשהן פונות שמאלה. כך יכלו הגברים והנשים להיפגש פנים מול פנים! הנה ציור של משפחה אסטריאנית טיפוסית:



אחר צהריים טיפוסי בחיי משפחה אסטריאנית

2. א. האם הילד/ילדה שמטפס/ת על ראשו של האבא הוא בן או בת? נמקו! _____

ב. האנשים באסטריה אינם יכולים להסתובב. כיצד בכל זאת יוכל אסטריאני להסתכל אחורנית? _____

ג. תארו איך שני אסטריאנים יכולים לעקוף אחד את השני! _____

ד. איך איש אסטריאני נראה בעיני איש אסטריאני אחר? _____

ה. האם יכולות להיות לבית שתי דלתות, אחת מצד שמאל ואחת מצד ימין? אם כן, מה יקרה כאשר שתי הדלתות תהיינה פתוחות בו-זמנית? (רמז: בעולם דו-מימדי כל דבר חייב להיות מחובר לאדמה לפחות במקום אחד, אחרת הוא יפול!) _____

ו. האם יש צינורות באסטריה? _____

הינטון סיפר שאנשי אסטריה חיים (ומהלכים) על גבי "כוכב הלכת" אסטריה שמסתובב מסביב לשמש ביקום הדו-מימדי. כוכב הלכת הוא בצורת מעגל (כמובן שהוא לא יכול להיות כדור כמו כדור הארץ!) והוא מחולק לשתי יבשות. היבשת הדרומית שנקראת היבשת האנטיפודלית לא הייתה מאוישת (לא גרו עליה אנשים) והיא הופרדה מהיבשת השנייה, הצפונית, ע"י שני ימים – הים הלבן והים השחור. האסטריאנים הקדמונים לא ידעו שכוכב הלכת שלהם הוא מעגל והם חשבו שהוא פשוט קו. (נזכיר לכם שגם קדמונו כאן על כדור הארץ חשבו שהעולם הוא שטוח ולא כדורי). תושבי אסטריה גרו כולם ביבשת הצפונית בשתי מדינות שכנות בשם "יונאה" ו-"ציתיה". אנשי שתי המדינות לא במיוחד הסתדרו זה עם זה, ולעיתים קרובות פרצה מלחמה בין שתיהן.



3. א. במלחמות בין היונאים לציתיים נלחמו רק הגברים ולרוב ניצחו הציתיים. מדוע? _____

ב. מאז שהמדענים היונאים גילו שכוכב הלכת "אסטריה" הוא עגול החלו היונאים לנצח במלחמות. מדוע? _____

4. לפניכם שלוש פעולות, מתוכן רק אחת מהן ניתנת לביצוע באסטריה. איזו היא, תארו איך מבצעים אותה וענו: מדוע לא ניתן לבצע את הפעולות האחרות?

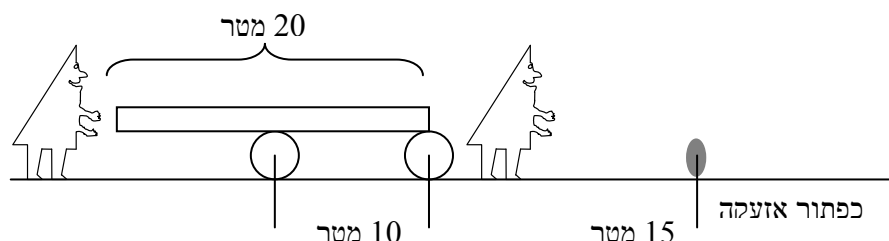
- לקשור קשר בחוט
- לרכב על אופניים
- לטוס במטוס מיוחד שעף בעזרת כנפיים מיוחדות הדומות בתנועתן לכנפי ציפור

5. שני אסטריאנים פושעים ניסו לגנוב זהב מהמכרה המלכותי. הם מלאו קופסא קופסא-זו קונוטציה תלת ממדית באורך 20 מטר במטילי זהב, והניחו אותה מעל שני גלגלים מעגליים, כאשר המרחק בין מרכזי הגלגלים הוא 10 מטר והגלגל הראשון מונח מתחת לקדמת הקופסא. פושע אחד עמד לפני הקופסא והשני עמד מאחורי הקופסא והם החלו לגלגל את הקופסא ע"י זה שהפושע שעמד מאחורה דחף את הקופסא קדימה (באותו זמן גם הגלגלים מסתובבים כמובן) ולאחר שהגלגלים התקדמו 10 מטר, הוא הרים את הגלגל האחורי וזרק אותו לפושע שעמד מקדימה. הפושע שעמד מקדימה הניח את הגלגל על הרצפה במרחק 10 מטר לפני מרכז הגלגל הראשון. כך הם התחילו לברוח עם מטילי הזהב, ע"י התהליך המסורבל הזה של דחיפת הקופסא, זריקת הגלגל האחורי והנחתו לפני הגלגל הקדמי שוב ושוב. הם התקדמו לעבר שער המכרה כשלתע שמו לב שבמרחק 15 מטר ממרכז הגלגל הראשון ישנו כפתור אזעקה מחובר לרצפה.

א. מדוע הם מגלגלים את הקופסא בצורה כל כך מסורבלת ולא משתמשים במריצה? _____

ב. כאשר הגלגלים מתקדמים 10 מטר, מה המרחק שמתקדמת הקופסא? (רמז: זה לא 10 מטר ולא תלוי בגודל הגלגלים. המלצה: נסו לבצע ניסוי בעזרת מטבע) _____

ג. כמה גלגלים (אם בכלל) יעברו מעל כפתור האזעקה? נמקו! (התשובה אינה תלויה בקוטר הגלגלים!) _____



מימדים נוספים

בדומה לעולם דו-מימדי ניתן גם לדמיין עולמות עם מימדים נוספים. עולם חד-מימדי הוא עולם בו היצורים החד-מימדיים הם פשוט קווים (עם עין אחת בקצה הקו!). בעולם כזה – אי אפשר בכלל לצייר את האדמה או את כוכב הלכת (זכרו: גם האדמה וגם פני השטח של הכוכב בעולם דו-מימדי הם קווים חד-מימדיים). למרות זאת, ננסה לתאר מספר תכונות של יצורים בעולם שכזה.

6. א. ציירו יצור חד-מימדי!

ב. באלו כיוונים יכול יצור חד-מימדי לנוע?

ג. האם יצור חד-מימדי יוכל לעקוף יצור אחר (שנע על אותו קו)? נמקו!

7. נניח שיצורים יכולים למסור הודעות ליצורים אחרים רק כשהיצורים צמודים אחד לשני.

א. האם יצור דו-מימדי יכול למסור הודעה לחמישה יצורים אחרים בבת-אחת? אם כן, כיצד?

אם לא – למה לא?

ב. האם יצור חד-מימדי יכול למסור הודעה לחמישה יצורים אחרים בבת-אחת? אם כן, כיצד?

אם לא – למה לא?

האם ניתן לתאר גם עולמות שיש להם יותר משלושה מימדים (למשל עולם ארבע-מימדי)? התשובה היא בפרוש כן – אך יש להגדיר למה בדיוק אנחנו מתכוונים כאשר אנו אומרים ארבעה מימדים.

יהיו כאלה בוודאי שיאמרו שאנחנו בעצם כבר חיים בעולם שכזה בו בנוסף למימדי האורך, רוחב ועומק יש מימד רביעי והוא הזמן. תאור כזה הוא לא מדויק מכמה סיבות, אך לא כאן המקום להרחיב עליהן. רק נרמז שיש בעצם זהות מסוימת בין זמן וחלל תלת-מימדי: כאשר אנו מסתכלים לשמיים הרחק בתוך החלל – אנו למעשה גם מביטים אחורה בזמן – וזאת בגלל שהאור שמגיע אלינו מכוכב רחוק (בגלל זה אנו בכלל רואים את הכוכב) יצא ממנו לפני שנים רבות מאוד.

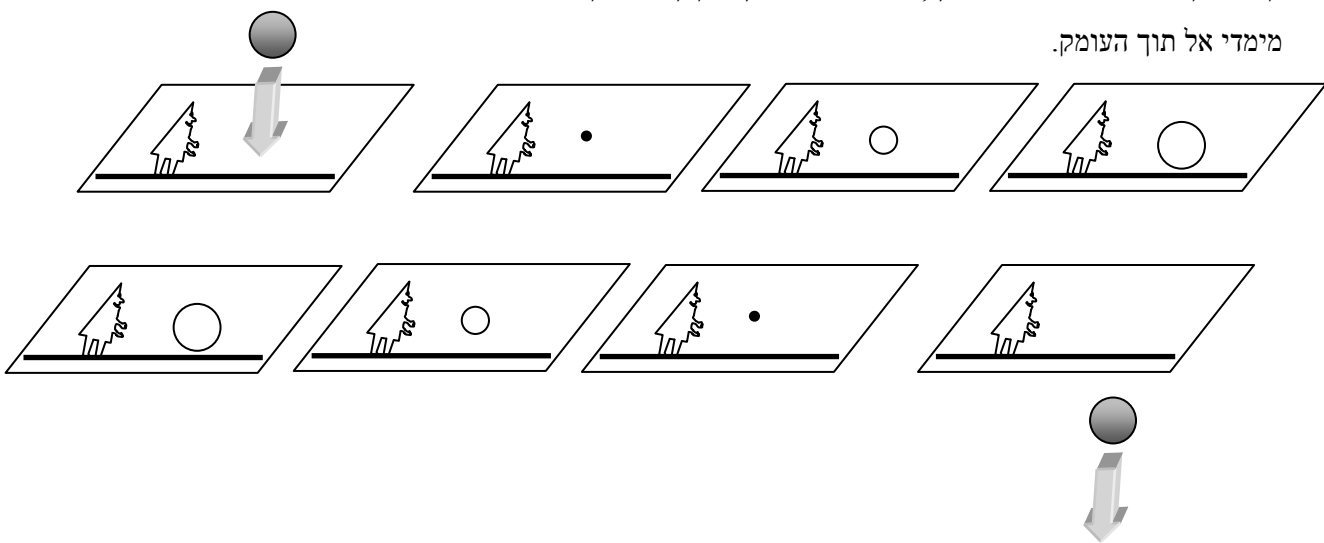
האמת היא שבאופן מתמטי ניתן לתאר עולם ארבע-מימדי ואפילו לדמיין כיצד יראו צורות הנדסיות בעולם שכזה, מבלי להשתמש בכלל במימד של זמן – אלא במימד נוסף (דמיוני) של אורך.

הידעתם?



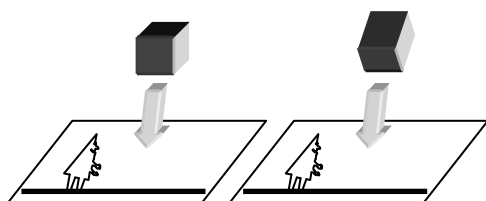
אפשר להבין קצת על מימדים גבוהים (מימדים גדולים מ-3) אם נראה מהם היתרונות של יצור תלת-מימדי על פני חברו הדו-מימדי. היצור הדו-מימדי רואה רק קדימה. הוא אינו רואה בכלל את תוכנם של הדברים בעולם הדו-מימדי. הוא אפילו לא רואה את גופו המשולש או את גופם של היצורים הדו-מימדיים האחרים כמו שיצור תלת-מימדי (כמונו) רואה אותו. אנחנו, כיצורים תלת-מימדיים, יכולים ממימד העומק שלנו לראות "לתוך" העולם הדו-מימדי ולראות מה יש בתוך כל דבר שיש בעולם הזה! אנחנו יכולים "לתלות" את העולם הדו-מימדי על הקיר כמו תמונה ולראות כל מה שיש בו – אבל היצורים החיים בעולם הדו-מימדי לא יודעים כלל מה יש למשל בתוך הבתים. אם נהיה "חוצפנים" נוכל אפילו "לשלוף" יצור דו-מימדי מתוך הבית שלו אל המימד השלישי ולהחזיר אותו למקום אחר בעולם הדו-מימדי! היצורים בעולם הדו-מימדי לא יבינו לאן נעלם חברם! הם אינם יודעים כלל על עולם תלת-מימדי או על קיומו של מימד העומק ורק יראו יצור משלהם "נעלם" מתוך ביתו ומופיע במקום אחר כאילו מתוך האויר! באותו אופן, אילו באמת היה עולם ארבע מימדי עם יצורים ארבע מימדיים, הם היו יכולים להוציא בן אדם מתוך עולמו התלת-מימדי ודרך המימד הרביעי להניח אותו במקום אחר בעולם באופן מיידי. אנחנו, בעולמנו היינו פשוט רואים איש נעלם כלא היה ממקום אחד ומופיע כאילו מתוך האויר במקום אחר! אבל זה כבר מדע בדיוני....

מה קורה אם זורקים כדור תלת מימדי לתוך עולם דו-מימדי? הכדור יחתוך את המשטח (העולם הדו-מימדי) ויצא מהצד השני. אלו צורות ישאיר הכדור במשטח הדו-מימדי כשהוא "חותך" אותו? כאשר הכדור יפגע בעולם הדו-מימדי הוא יראה כנקודה. הנקודה "מתנפחת" לעיגול שהולך וגדל עד שיהיה לו קוטר כקוטרו של הכדור. אחר כך, העיגול "מתכווץ" וקטן עד לנקודה – ואז עוזב הכדור את העולם הדו-מימדי אל תוך העומק.



8. א. תאר את הצורות שיוצרת עיגול דו-מימדי שמבקר בעולם חד-מימדי.

ב. תארו את הצורות שיוצרת קוביה תלת-מימדית שמבקרת בעולם דו-מימדי כשהיא מגיעה ישרה וכשהיא מגיעה מוטה על צלע אחת.

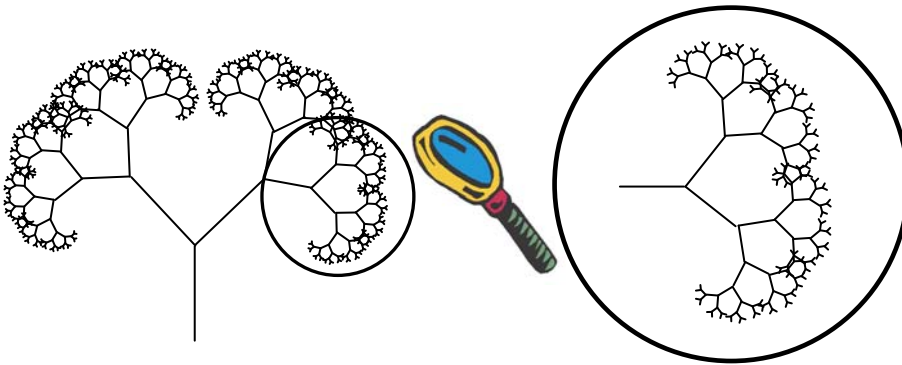


פרקטלים



האם שמתם לב אי פעם לכך שבחיים האמיתיים אין כמעט צורות הנדסיות "מושלמות" כמו עיגולים, פירמידות, קוביות? תחשבו על כך רגע! ניקח לדוגמה את הכרובית:

ניתן לומר שלכרובית יש צורה מאוד מאוד מסובכת ומורכבת. נוכל גם לשים לב שאם נסתכל דרך זכוכית מגדלת על חלק קטן של הכרובית – פקעת אחת לבנה – הוא יהיה דומה מאוד בצורתו לכל הכרובית. דוגמה נוספת – הענפים של שיח. גם צורה זו מאוד מאוד מסובכת – ואם נסתכל דרך זכוכית מגדלת על חלק קטן ממנו, נקבל צורה שדומה (אבל לא זהה) לצורת העץ השלם.



רק בשנות השבעים של המאה העשרים, התחילו מתמטיקאים להרהר באפשרות להיעזר במתמטיקה כדי לתאר צורות מסובכות שקיימות בעולם! הם כינו צורות כאלה בשם הכולל: **פרקטלים**.

פרקטל הוא כל דבר שיש לו שתי תכונות:

- "מורכביות אינסופית" – כלומר צורה מאוד מסובכת ומורכבת.
- "דמיון עצמי" – אם מגדילים חלק קטן של הצורה, הוא יהיה דומה באופן כללי לצורה עצמה.



אחד המתמטיקאים המבריקים ביותר שגילה את הקשר בין מתמטיקה, מחשבים, פרקטלים וטבע הוא פרופסור בשם בנואה מנדלברוט. מנדלברוט נולד בפולין בשנת 1924, ואחר כך עבר לצרפת ובהמשך לארצות הברית שם עבד כפרופסור בכמה מהאוניברסיטאות הבולטות בעולם, ביניהם הרווארד, ייל ומכון המחקר של י. ב. ס. הוא עדיין חי ופעיל היום בתחום חקר הפרקטלים. בין השאר גילה מנדלברוט שגם לצלילים יש מבנים פרקטלים! כאשר אנחנו מאזינים ליצירות מוזיקליות בקונצרט – אנו שומעים אוסף של צלילים מאוד מסובך, אבל גם שמים לב הרבה פעמים שיש ליצירה "אופי" מסוים – כך שחלק קטן מהיצירה דומה באופן כללי ליצירה השלימה!

גם קצב דפיקות הלב שלנו הוא פרקטל (הקצב איננו קבוע – זאת אומרת שהלב שלנו לא דופק כל $\frac{1}{2}$ שנייה בדיוק – רק **בערך** כל $\frac{1}{2}$ שנייה). מתמטיקאים הצליחו להשתמש במתמטיקה של פרקטלים כדי

לעזור לרופאים לטפל יותר טוב בחולים הסובלים ממחלות לב! גם בהוליווד התעניינו מאוד בפרקטלים! בטח לא תאמינו אבל זו האמת! יוצרי סרטים משתמשים במחשבים ובמתמטיקה כדי ליצור נופים (למשל של הרים) שנראים אמיתיים – אבל למען האמת הם רק פרקטלים שיצר מחשב! הנה דוגמה לתמונת נוף שיצר אמן מחשב בשם: קן מוסגרייב (Ken Musgrave) מתוך אתרו: http://www.kenmusgrave.com/art_gallery.html (ניתן גם לרכוש תוכנה שיוצרת תמונות פרקטליות כאלה מ: <http://www.pandromeda.com/>)

9. סמנו $\sqrt{\quad}$ ליד הדברים שהם פרקטלים:

- | | | |
|--|---|---|
| ☐ א. שולחן | ☐ ב. עננים | ☐ ג. הרים |
| ☐ ד. חסה | ☐ ה. השמש | ☐ ו. מפת הכבישים של הארץ |
| ☐ ז. פני השטח של הירח | ☐ ח. תקתוק של שעון | |

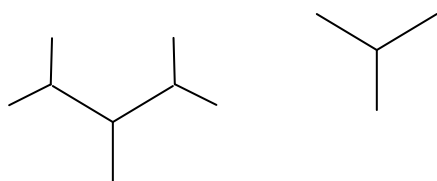
המתמטיקה של פרקטלים היא מאוד מסובכת – אבל בכל זאת קל מאוד ללמוד לצייר פרקטל מסוג מיוחד – פרקטל מתמטי.

פרקטל מתמטי הוא פרקטל שאפשר לצייר אותו בצורה פשוטה כך:

- א. מציירים צורה התחלתית כלשהי.
- ב. בוחרים מספר נקודות על גבי הצורה ועליהם מציירים בדיוק את אותה הצורה – רק יותר קטן – וממשיכים לעשות כך הרבה שלבים!



האמת היא שכבר ראיתם פרקטל מתמטי: הפרקטל של העץ בעמוד הקודם! מאוד קל לצייר פרקטל כזה!



10. נצייר את פרקטל העץ בצורה הבאה:

שלב א: מציירים את הצורה "Y":

שלב ב: מציירים על כל ענף צורת "Y" קטנה יותר:

א. המשיכו לצייר צורת "Y" על כל ענף עד שלבסוף תקבלו עץ יפה. ככל שתציירו "Y" התחלתי צר יותר, כך העץ הסופי יהיה צר יותר. המשיכו את העץ עוד חמישה שלבים.

ב. אחד הפרקטלים המפורסמים ביותר נקרא "קו קוך".

שלב א: מתחילים מקו כזה:



שלב ב: ממשיכים את הפרקטל ע"י החלפת כל קו ישר: — מארבעת הקווים הישרים



המרכיבים את הצורה בשלב א' בצורה זו :

לכן, בשלב השני מקבלים את הצורה:



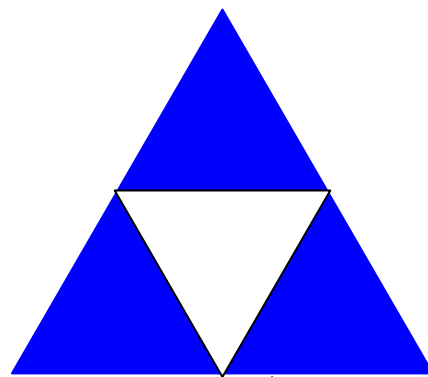
המשיכו את הפרקטל עוד שני שלבים.

11.

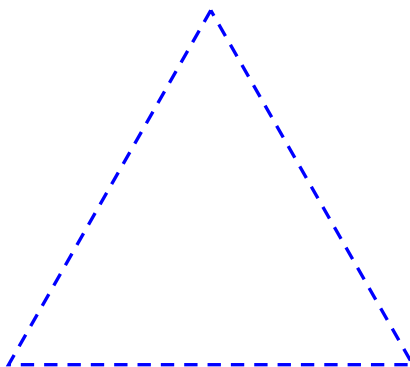
פרקטל אינו חייב להתחיל מקו ישר. "משולש סירפינסקי" הוא פרקטל המבוסס על משולשים.

לפניכם ארבעה משולשים שמהווים שלבים עוקבים ביצירת "משולש סירפינסקי".

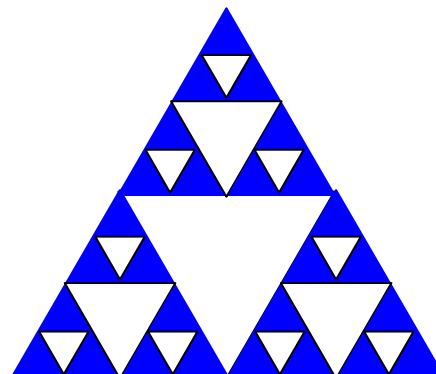
השלב השני והשלב הרביעי חסרים. השלימו אותם!



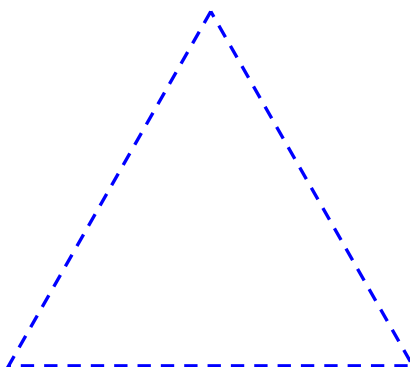
משולש סירפינסקי א'



משולש סירפינסקי ב'

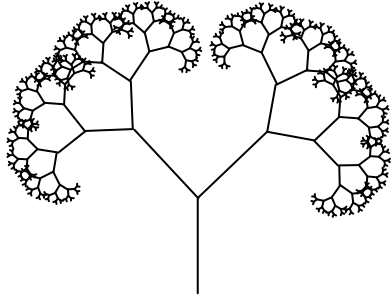


משולש סירפינסקי ג'



משולש סירפינסקי ד'

נשאלת השאלה: מהו המימד של פרקטל? נסתכל על השטח שהפרקטל "תופס". האם הוא דומה למשהו חד-מימדי כמו קו, משהו דו-מימדי כמו ריבוע או משהו תלת-מימדי כמו קוביה? כדי לענות על השאלה הזו, נזכור שניתן לחשב כמה מימדים יש לצורה מסוימת גם לפי מספר הכיוונים שאפשר "ללכת" עליו. על קו ניתן ללכת רק קדימה ואחורה – לכן הוא חד-מימדי. על משטח ריבועי (כמו דף נייר) ניתן ללכת קדימה אחורה, למעלה ולמטה – ארבעה כיוונים – ולכן הוא דו-מימדי.



ניקח כדוגמה את העץ:

מצד אחד, כולו עשוי מקווים ישרים. אילו היינו יכולים "ללכת" עליו, בוודאי היינו יכולים ללכת רק קדימה או אחורה.

אם כך נראה שהמימד שלו צריך להיות אחד.

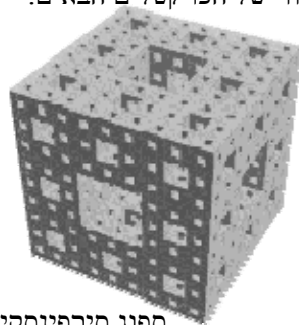
מצד שני – העץ הפרקטלי לא "נראה" לנו צורה חד-מימדית!

הוא "תופס" כמעט שטח של ריבוע שהוא דו-מימדי!

ההיגיון אומר שהמימד של פרקטל ה "עץ" צריך לפיכך גדול יותר מ-1 וקטן מ-2. אבל האם ייתכן דבר כזה – מימד שאינו מספר שלם?!

מנדלברוט ומתמטיקאים נוספים הסתכלו על הפרקטלים והבינו פתאום שהתשובה לשאלה הזו היא חיובית! הפרקטלים הם באמת צורות בעלי מימדים שאינם מספר שלם! למימד של פרקטל קוראים "**מימד שבור**" והוא מספר מעורב – מספר שחלק ממנו הוא שלם וחלק ממנו – שבר! לכל הפרקטלים יש מימדים שבורים וישנה נוסחה מתמטית המחשבת מה ערכו של המימד הזה. הנוסחה הזאת נכונה גם עבור פרקטלים בטבע שאינם פרקטלים מתמטיים, אך היא מסובכת ולא נלמד אותה כאן. למרות זאת, מהסתכלות על פרקטל (לאחר מספר שלבי פיתוח) ניתן לנחש בערך מה המימד הפרקטלי – או לפחות לנחש בין אלו שני מספרים שלמים המימד נמצא.

12. נחשו בין אלו שני מספרים שלמים יהיה המימד הפרקטלי השבור של הפרקטלים הבאים:



ספוג סירפינסקי

א. פרקטל העץ: מימד שבור בין 1 ל- 2 .

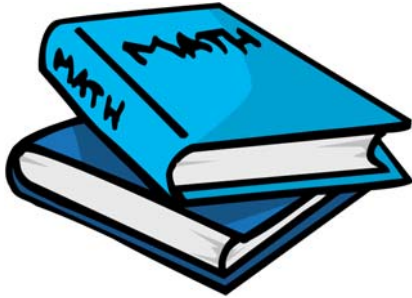
ב. "קו קוך": מימד שבור בין ____ ל- ____ .

ג. "משולש סירפינסקי": מימד שבור בין ____ ל- ____ .

ד. "ספוג סירפינסקי": מימד שבור בין ____ ל- ____ .

ה. "קו קנטור": מימד שבור בין ____ ל- ____ .

ביבליוגרפיה וחומר רקע



ספרים:

חוברות מתמטיקה של היחידה לפעולות נוער של מכון וייצמן למדע
חומר מקור של יוסי ומיכל אלרן

The Unexpected Hanging, Martin Gardner
Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers, Martin Gardner

אתרי אינטרנט:

<http://math.rice.edu/~lanius/frac/index.html>
<http://www.alcyone.com/max/lit/flatland/>
<http://www.calormen.com/Flatland/>
http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/dimension.shtml
<http://www.shodor.org/interactivate/lessons/pattern2.html>
<http://www.kenmusgrave.com/>

משלימים לוחות

כללי המשחק:

0	0	0
0	0	0
0	0	0

לפניכם לוח 3×3 . בכל משבצת של הלוח כתובה הספרה 0.
לוח כזה נקרא "לוח אפס".
בכל שלב של המשחק בוחרים לוח 2×2 מהלוח הנתון,
ולכל מספר הרשום בו מחברים את המספר 1.

1	1	0
1	1	0
0	0	0

ארנן כתב בשלב הראשון לוח כזה:



1	1	0
1	2	1
0	1	1

בשלב השני התקבל הלוח שלפניכם:

א. איזה לוח 2×2 בחר ארנן בשלב השני?

ב. כתבו את כל האפשרויות

שיכולות להתקבל

בשלב השלישי.

ג. בחרו את אחד הלוחות מסעיף ב. המשיכו וכתבו עבורו אפשרויות לשלושת השלבים הבאים.

השתמשו בדף הלוחות המופיע בסוף החוברת.

ד. לפניכם לוחות שכתבה שירה.

3	5	2
6	9	3
3	4	1

$$3 + 2 = 5$$

1	3	2
3	5	2
2	2	0

$$1 + 2 = 3$$

4	5	1
6	10	4
2	5	3

$$4 + 1 = 5$$

שירה שמה לב שבשורה הראשונה של כל אחד מהלוחות שהיא השלימה, הסכום של שני המספרים הקיצוניים שווה למספר האמצעי.
האם הקשר הזה מתקיים גם בלוחות שלכם?
האם הקשר הזה מתקיים בכל לוח כזה?
הסבירו מדוע.

ה. נסו למצוא קשרים נוספים בין המספרים בכל הלוחות שלכם.

האם הקשרים שמצאתם מתקיימים בכל הלוחות האפשריים במשחק הזה?

כיצד להגיע ללוח הנתון?

2

א. איציק התחיל למלא לוח אפס וביצע 5 שלבים.

מה אפשר לדעת על הלוח שקיבל איציק?

נסו לכתוב בלוח שלפניכם את המספרים שהתקבלו בשלב החמישי.

ב. בכל סעיף נתון לוח.

האם ייתכן שאיציק קיבל את הלוח הזה

בשלב כלשהו? אם לא – הסבירו מדוע.

אם כן – ציינו באיזה שלב התקבל הלוח,

וכתבו דרך אפשרית להגיע ללוח הנתון.

אם יש דרכים נוספות – תארו אותן.

1

2	3	1
4	6	0
2	3	5

2

2	1	1
1	5	4
1	2	3

3

1	3	2
1	5	4
0	2	2

1

1	4	3
3	7	4
2	3	1

2

2	5	3
5	9	4
3	4	1

3

4	6	2
5	8	3
1	2	1

ג. לכל לוח נתון קבעו באיזה שלב

במשחק הוא נכתב, וכתבו דרך

אפשרית להגיע אליו.

אם יש דרכים נוספות – תארו אותן.

ד. בכל סעיף נתון לוח.

האם ניתן לקבל את הלוח הזה

בשלב כלשהו של המשחק?

אם לא – הסבירו מדוע.

אם כן – כתבו דרך אפשרית

להגיע ללוח הנתון.

1

1	3	2
3	4	1
2	1	2

2

2	7	5
5	6	7
2	2	2

3

0	4	4
2	7	5
2	3	1

משחק זוגות – "להגיע למספרים"

3

1

	7	
5		

הוראות המשחק: מתחילים בלוח אפס. כל שחקן בתורו רושם מספרים בלוח לפי כללי המשחק המופיעים בעמ' 15. מטרת שחקן א היא ליצור בלוח את צירוף המספרים הנתון. מטרת שחקן ב היא למנוע זאת ממנו.

2

7		5

- א. שחקו את המשחק במטרה ליצור את לוח 1.
- האם יש לשחקן א אסטרטגיה מנצחת? נמקו.
 - האם יש לשחקן ב אסטרטגיה מנצחת? נמקו.
- ב. החליפו תפקידים ושחקו את המשחק במטרה ליצור את לוח 2. לאיזה שחקן יש אסטרטגיה מנצחת במשחק זה?

לשחזר מספרים חסרים בלוח

4

1	3	2
2		2
1	1	0

3	5	2
7	10	3
		1

- א. אחרי ארבעה שלבים קיבל דני את הלוח שלפניכם. הציעו דרך למצוא את המספר המחוק בלוח. האם אפשר למצוא את המספר בלי לשחזר את שלבי המשחק? הסבירו.
- ב. רינה ביצעה מספר שלבים וקיבלה את הלוח שלפניכם. נסו לשחזר את המספרים המחוקים.

משחק זוגות – "לשחזר מספרים בלוח"

5

- כל תלמיד בונה לעצמו 10 לוחות, שלב אחרי שלב, לפי כללי המשחק המופיעים בעמ' 15.
- בכל לוח כדאי לבצע מספר שונה של שלבים.
- שחקן א מחליט כמה מספרים חסרים הוא מוכן לשחזר בלוח של שחקן ב. שחקן ב מוחק את המספרים בלוח בהתאם להחלטה של שחקן א, ומראה את הלוח לשחקן א. שחקן א צריך לגלות מהם המספרים שנמחקו. עבור כל מספר נכון שגילה הוא מקבל נקודה אחת. לאחר מכן השחקנים מתחלפים בתפקידים.
- השחקן שקיבל נקודות רבות יותר הוא המנצח.
- המנצח הכיתתי הוא השחקן שקיבל את מרב הנקודות.
- נקודות למחשבה לפני תחילת המשחק:
- כמה מספרים כדאי שהשחקן יחליט למחוק?
 - היכן כדאי למחוק מספרים בלוח?

משתמשים במשתנים

6

בלוח שלפניכם המספרים בפינות הלוח מסומנים באמצעות המשתנים a, b, c, d .

b		a
c		d

א. השלימו את הלוח: בטאו את המספרים במשבצות הריקות

באמצעות המשתנים a, b, c, d .

ב. בטאו באמצעות המשתנים a, b, c, d את הסכום של כל המספרים בטבלה.

האם ייתכן שהסכום יהיה שווה ל-8? ל-11? ל-26?

אם לא – הסבירו מדוע.

אם כן – כמה שלבים צריך לבצע כדי לקבל את הסכום הזה?

7

א. השלימו את הלוח: בטאו את המספרים במשבצות הריקות

b	a	
	c	
		d

באמצעות המשתנים a, b, c, d .

ב. האם ייתכן ש- $a = 7, b = 8, c = 0, d = 11$?

אם לא – הסבירו מדוע.

אם כן – כמה שלבים צריך לבצע כדי לקבל לוח זה?

ג. האם ייתכן ש- $c = a + b$? הסבירו את תשובתכם.

8

א. איזה מהמשתנים a, b, c, d, k בלוח שלפניכם מייצג

את המספר הגדול ביותר?

איזה משתנה מייצג את המספר הקטן ביותר?

ב. השלימו את הלוח. בטאו את המספרים במשבצות הריקות

b	d	
a	c	k

באמצעות המשתנים a, b, c, d, k .

ג. כתבו קשרים רבים ככל האפשר בין המשתנים a, b, c, d, k .



המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence
through Education

מצוינות
בחסות קרן סקירבול

המכון למצוינות בהוראה

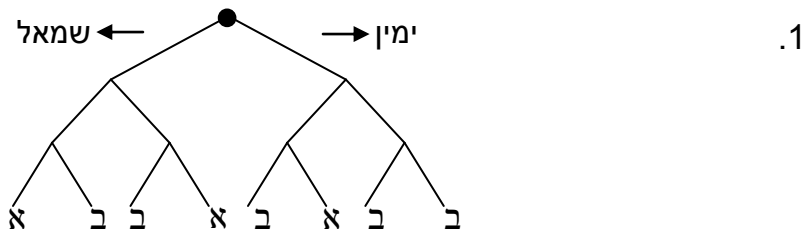
על משחקים ועצים

גלי שמעוני, צבי שלם
ד"ר חיים שפירא

מערכת: גלי שמעוני, ד"ר אבי פולג

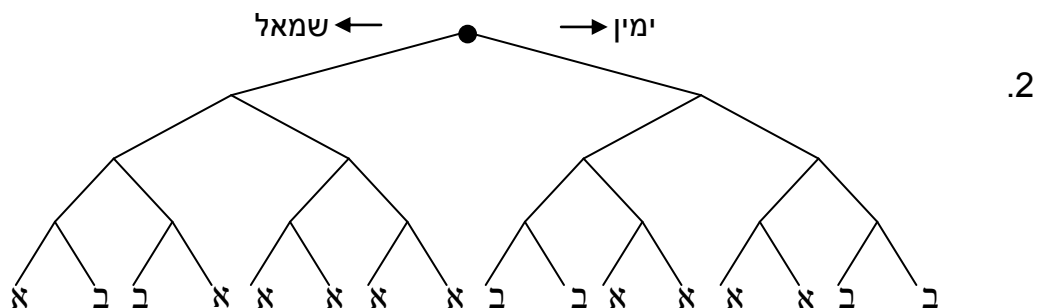
ב. אסטרטגיות בעצי משחק יסודיים

התבוננו בעצי המשחק הבאים, המתארים משחקים של שני שחקנים. כל משחק מתחיל בקדקוד העליון של העץ (מודגש בנקודה). השחקן הפותח בוחר את אחת משתי הדרכים לרדת אל הצומת הבא. בשלב הבא בוחר השחקן השני את אחת משתי הדרכים לרדת את הצומת הבא. כך נמשך המשחק, עד אשר מגיעים לקצהו של אחד מענפי העץ. אם בקצה זה רשומה האות א, הרי שהניצחון הוא של השחקן הפותח. אם רשומה האות ב, הניצחון הוא של השחקן השני. עליכם למצוא למי משני השחקנים יש דרך לנצח במשחק. תארו במילים את תכנון הניצחון (השתמשו במילים ימין ושמאל):



השחקן שיכול לתכנן ניצחון הוא: _____

תיאור שיטת הניצחון: _____

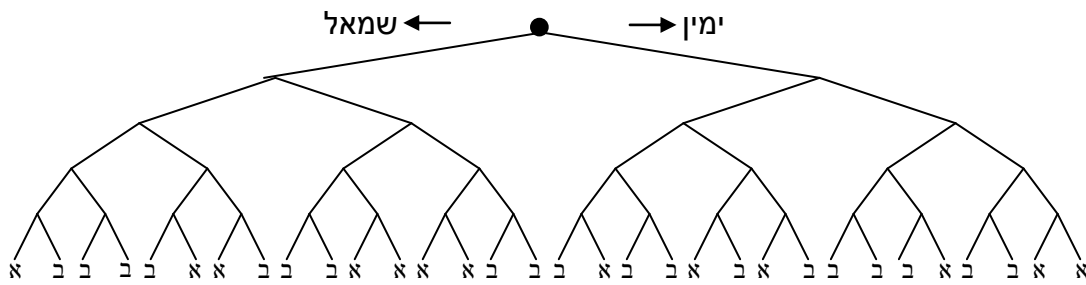


השחקן שיכול לתכנן ניצחון הוא: _____

תיאור שיטת הניצחון: _____



3.

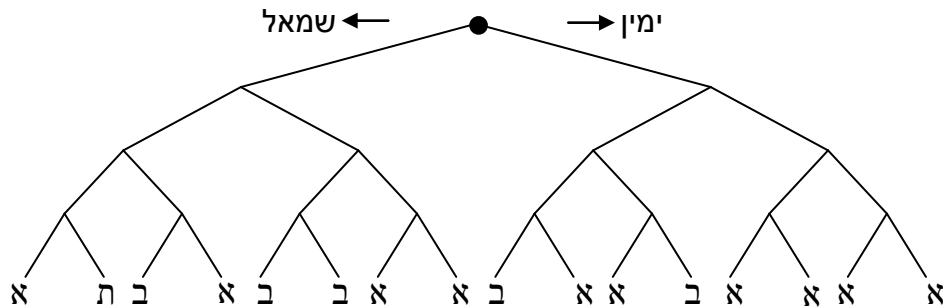


השחקן שיכול לתכנן ניצחון הוא: _____

תיאור שיטת הניצחון: _____

במשחק הבא הוספנו בתחתית העץ אלמנט נוסף. האות "ת" מסמנת מצב בו המשחק מסתיים בתיקו.

4.



השחקן שיכול לתכנן ניצחון הוא _____ (מלאו רק אם לדעתכם יש כזה)

תיאור שיטת הניצחון או הסבר למה אין כזו _____

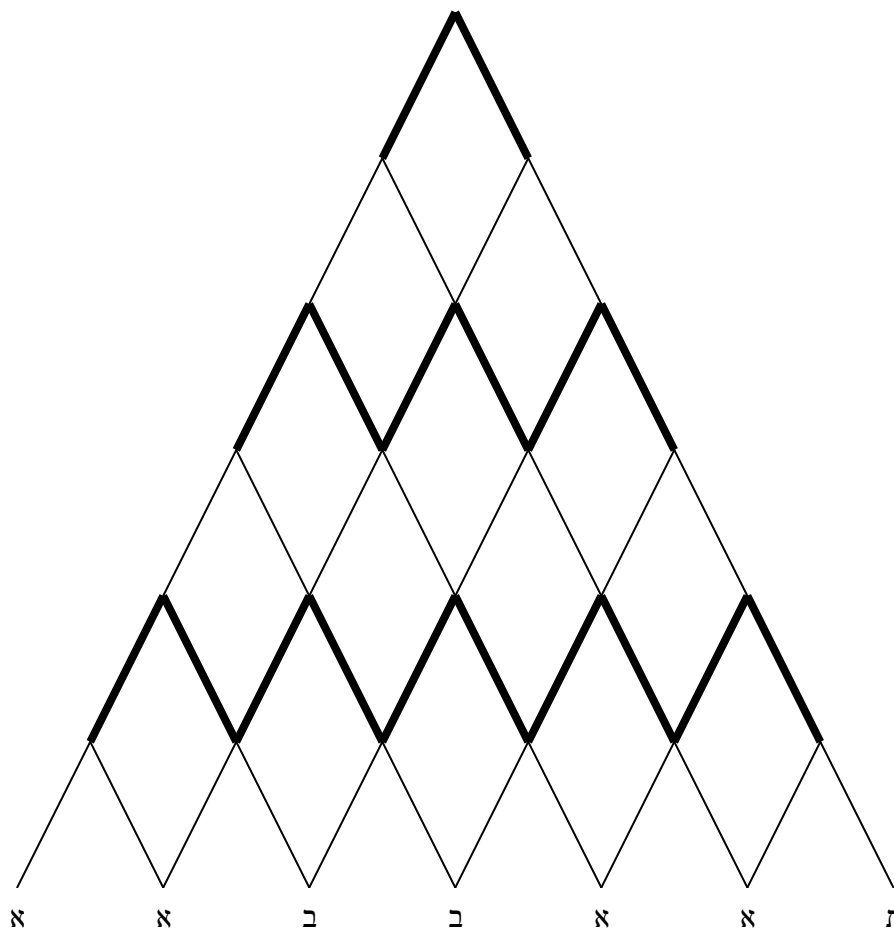


דף תלמיד 2

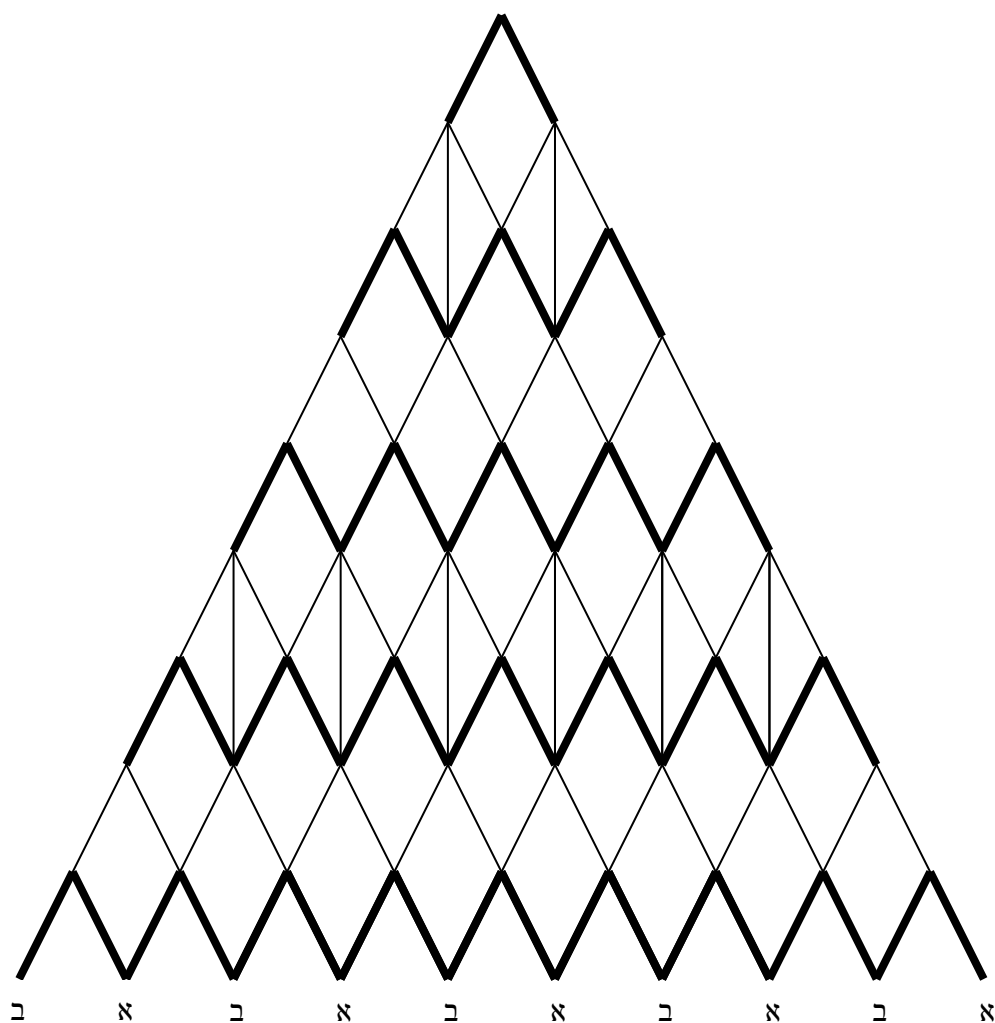
ג. אסטרטגיות בעצי משחק מורכבים

עצי המשחק המופיעים בשאלות הבאות מורכבים יותר מקודמיהם. הענפים שלהם משתלבים אלה באלה. כמו במשחקים הקודמים, שחקן א הוא זה הפותח במשחק. בכל משחק עליכם לגלות למי משני השחקנים יש דרך לנצח במשחק. כמו כן עליכם למצוא אסטרטגיה זו ולדעת להסביר אותה.

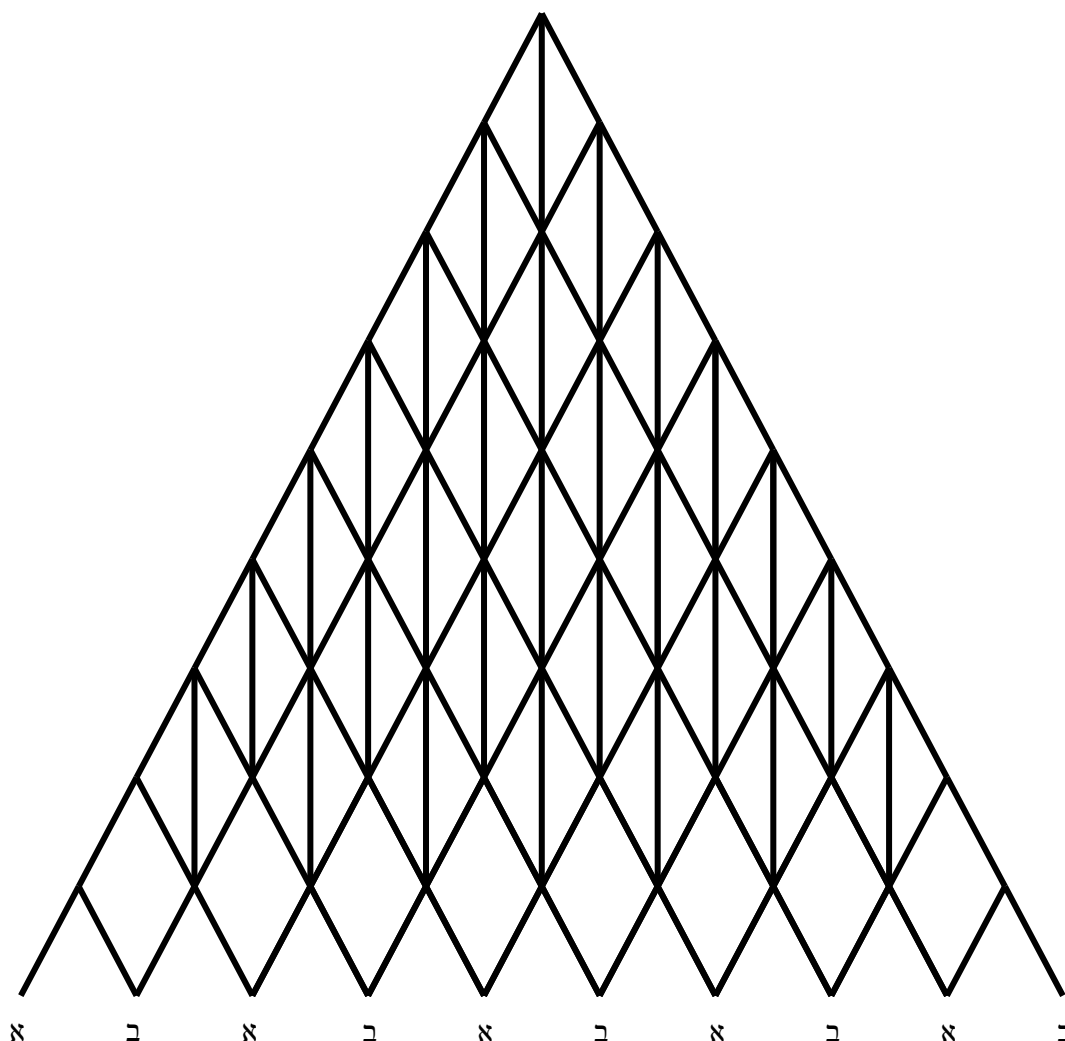
1.



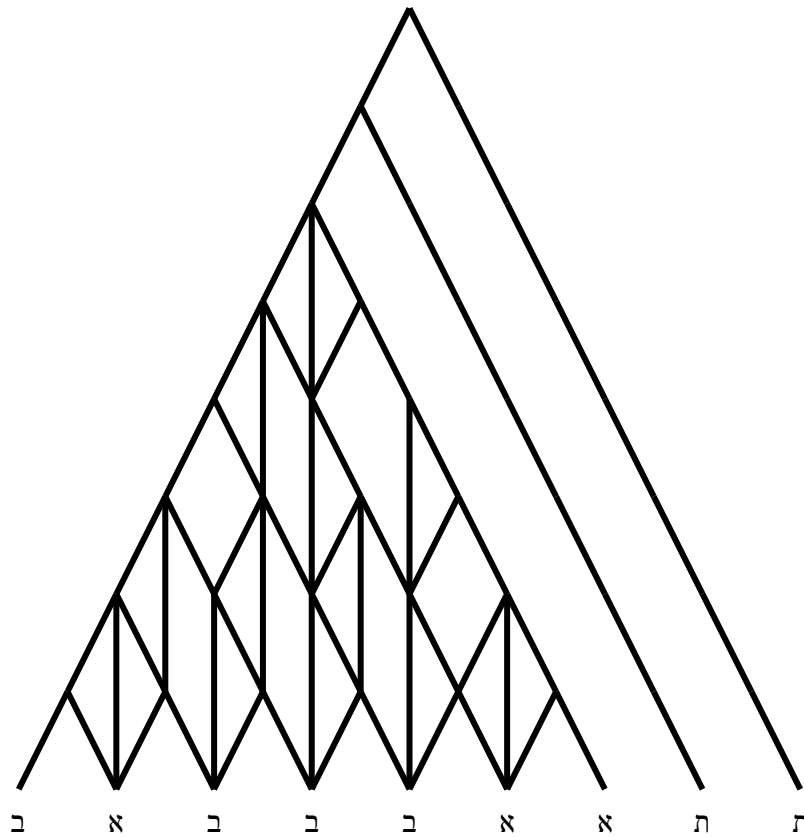
2.



3.



4.



דף תלמיד 3

משחק הצ'ומפ

במשחק הצ'ומפ, כל שחקן בתורו בוחר משבצת שעדיין אינה מחוקה, ועליו למחוק אותה ואת כל המשבצות שמעליה ומימינה. המפסיד הוא זה שנאלץ למחוק את המשבצת המסומנת באות A. המשחק הזה חייב להסתיים בניצחון של אחד משני השחקנים והתפקיד שלכם הוא לשחק את המשחקים ולנסות לגלות: למי מהשחקנים יש אסטרטגיה לניצחון, ומהי?

משחק 1 – לוח 5×5

A				

A				

A				

A				

A				

A				

A				

A				

משחק 2 – לוח 2×7

A							

A							

A							

A							

A							

A							



פיבונאצ'י

סדרת פיבונאצ'י בעולם החי

1. בתחילת כיתה ז' למדתם בנושא "חוקיות" על סדרות של מספרים.

(א) בנו סדרה של מספרים לפי ההוראות האלה:

המספר הראשון הוא 1, וכך גם המספר השני;

המספר השלישי הוא סכום שני המספרים שקדמו לו;

המשיכו בדרך זו: כל מספר נוסף בסדרה יהיה הסכום של שני המספרים שלפניו.

רשמו את שנים-עשר המספרים הראשונים של הסדרה.

_____ 1 _____

רמז: בכדי לענות על סעיפים ב' ו-ג' עליכם לחשב לפי סימני ההתחלקות.

(ב) הסתכלו על הסדרה משמאל לימין, סמנו כל מספר שלישי.

מה משותף לכל המספרים שסימנתם?

(ג) סמנו כל מספר רביעי בסדרה, משמאל לימין. מה משותף לכל המספרים שסימנתם?

(ד) כל מספר חמישי בסדרה הוא כפולה של 5. תנו דוגמאות לכך.

(ה) סכום הריבועים של כל שני מספרים עוקבים בסדרה הוא תמיד מספר אחר בסדרה.

תנו שלוש דוגמאות על כך _____

(ו) במה מתחלק הסכום של עשרה מספרים עוקבים בסדרה? (בדקו את שלושת הסכומים

האפשריים למספרים שכתבתם.)



הסדרה המעניינת שבניתם וחקרתם מעט, נקראת "סדרת פיבונאצ'י"

על שמו של המתמטיקאי ליאונרדו פיבונאצ'י.

ליאונרדו פיזנו פיבונאצ'י נולד בעיר פיזה שבאיטליה, כנראה, בשנת

1175 למשפחה עשירה.

כאשר נשלח אביו לשמש איש מֶכֶס באלג'יריה מטעם העיר פיזה, לקח

אתו את בנו. בהמשך ביקר פיבונאצ'י בקונסטנטינופול, במצרים, בסוריה,

בסיציליה ובפרובנס. הוא למד מתמטיקה אצל מורים ערביים והיה ער

לקלות בה הצליחו הסוחרים לנהל את חשבונותיהם. הסוחרים השתמשו

בשיטה החשבונית ההינדו-ערבית ובה הספרות אחת עד עשר. בשיטה זו אנו משתמשים עד היום.

עד אז נהוג היה באירופה לנהל את החשבונות בשיטת הספרות הרומיות.

פיבונאצ'י

סדרת פיבונאצ'י בעולם החי

עם שובו לאיטליה בשנת 1202 כתב פיבונאצ'י את ספרו החשוב ביותר "ליבר אבצי" (Liber Abaci). בספר זה עסק באלגברה ופרסם את השימוש בשיטת החישוב על-בסיס 10 לחישובים במספרים שלמים ובשברים. כדרכם של חידושים רבים גם חידושיו של פיבונאצ'י לא נקלטו מיד, ורק במאה ה-15 הפכה השיטה לנחלת הכלל.

ספרו נפתח במילים האלה: "תשע הספרות ההודיות הן: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9". בעזרת תשע הספרות הללו בתוספת הספרה אפס אפשר לכתוב כל מספר. נוסף על כך, השתמש פיבונאצ'י במספרים שליליים, עסק בפתרון משוואות והיה הראשון שרשם שברים כאשר קו שבר מפריד בין המונה למכנה. ספר חשוב נוסף המיוחס לפיבונאצ'י הוא "גאומטריה פרקטיקה" (Practica Geometria) ללימוד הגאומטריה האוקלידית.

2. תארו לכם שאתם חיים בזמנו של פיבונאצ'י (המאה ה-12), ועליכם לחשב מספר חישובים.

התנסו בשתי שיטות החישוב: הרומית והעשרונית.

מדדו בעזרת השעון את משך הזמן שאורך החישוב בכל אחת מהשיטות.

לפניכם שני מספרים: הראשון – MMCCCXXI ; השני – MMCDXLIX.

א) חברו את המספרים בשיטה הרומית.

ב) "תרגמו" את המספרים לשיטה העשרונית, ובצעו בהם את פעולת החיבור. (מי ששכח את הסימון בספרות רומיות, יכול להיעזר בערך "ספרות רומיות" באתר ויקיפדיה.)



_____ = MMCCCXXI

_____ = MMCDXLIX

האם התוצאה מתאימה לתשובתכם בסעיף א'?

ג) רשמו תרגיל כפל או חילוק של מספר תלת-ספרתי במספר דו-ספרתי.

דמיינו כיצד הרומאים ביצעו פעולה זו.

ד) מהי מסקנתכם? _____

ה) מהם היתרונות של השיטה העשרונית? _____

פיבונאצ'י

סדרת פיבונאצ'י בעולם החי

1. מרשם אוכלוסין במושבת הארנבות

לפניכם סדרת מספרי פיבונאצ'י
 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ...
 מה הביא את פיבונאצ'י "להמציא" את רצף המספרים הזה?
 ובכן, מעשה שהיה, כך היה. פיבונאצ'י ניסה לחשב את קצב הריבוי של קבוצת ארנבות, על-פי כמה השערות:
 חודש הוא הזמן הדרוש לזוג ארנבות צעירות להתבגר; בהגיע הזוג לגיל חודשיים, הוא ממליט זוג ארנבים חדש, ואז יש זוג אחד בוגר וזוג אחד צעיר. (בהנחה שאף ארנבת אינה מתה בתקופת הנסוי).
 מושבת הארנבות מתחילה מזוג אחד של ארנבות צעירות. בחודש הבא הזוג הזה הופך לזוג בוגר (אלה הם שני האיברים הראשונים בסדרה). בחודש הבא כבר יהיו שני זוגות – אחד בוגר ואחד צעיר. בחודש הבא יהיו שלושה זוגות – אחד שהיה בוגר כבר בחודש הקודם, ולו זוג צאצאים צעיר, ואחד שהיה צעיר בחודש הקודם וכעת הוא בוגר.

נציג את התהליך בשתי דרכים: (1) סימון באותיות, (2) איור.

דרך 1: סימון באותיות.

זוג צעיר יסומן באות **צ** (צעיר), וזוג בוגר באות **ב** (בוגר).

כדי לעבור לחודש הבא יש לבצע בכל חודש **החלפה כזו**:

צ ← ב

ב ← בצ

לפניכם ארבעת מחזורי ההתרבות הראשונים. השלימו עוד חמישה מחזורים.

חודש	זוגות הארנבות	מספר הזוגות
א	צ	1
ב	ב	1
ג	בצ	2
ד	בצב	3
ה		
ו		
ז		
ח		
ט		

(א) מה הקשר בין שרשרת האותיות בחודש מסוים לבין האותיות בחודש הבא?

(ב) חשבו מה יהיה מספר זוגות הארנבות כעבור 12 חודשים. היעזרו במודל האותיות.

פיבונאצ'י

סדרת פיבונאצ'י בעולם החי

דָּרָךְ 2: ציור.

(ג) כל טור מייצג חודש.

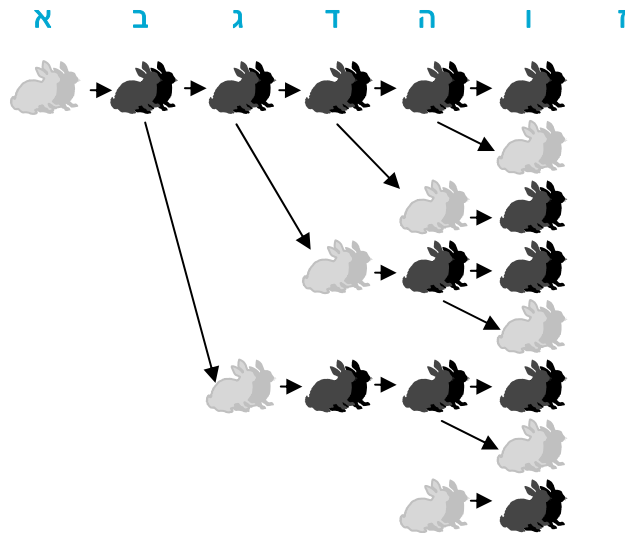
הארנבות בצבע בהיר מייצגות זוג צעיר.

הארנבות בצבע כהה מייצגות זוג בוגר.

ציירו את הארנבים של החודש השביעי.

כמה זוגות של ארנבונים יהיו? _____

→ חודשים



2. מסתורין בממלכת הדבורים

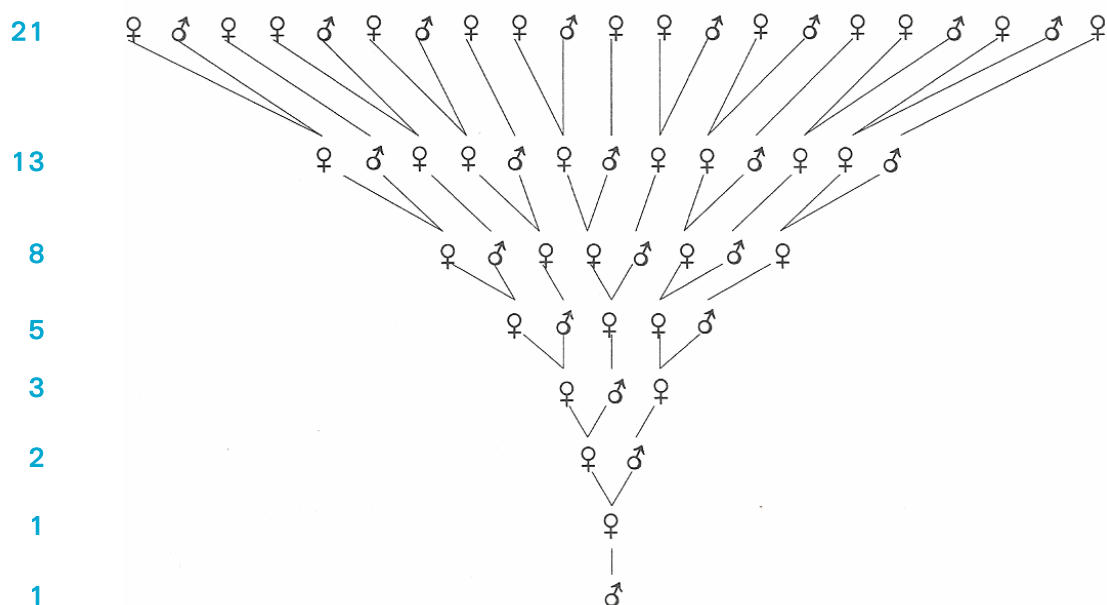
הנה כמה עובדות שאולי לא ידעתם על הדבורים, אותם חרקים חברתיים המביאים תועלת רבה לאדם. בכורות נמצאים המלכה שתפקידה להטיל ביצים, הפועלות המייצרות דבש ודואגות לטפל במלכה, והזכרים. הזכר בוקע מביצית לא-מופרית שהמלכה מטילה, ואילו הפועלות והמלכה בוקעות מביצים מופרות. פירוש הדבר הוא שלזכר יש רק הורה אחד – אימא, ואילו למלכה ולפועלות שני הורים – זכר ונקבה.

א) בציר שלמטה מתואר אילן היוחסין של הזכר שבדבורים. בתחתית נמצא הזכר, זהו האיבר הראשון בסדרה. כמה הורים יש לו? כמה סבים וסבתות יש לו? מה מינם?

רשמו את מספר האבות והאמהות שקדמו לו שבעה דורות אחורנית.

ב) התבוננו באילן היוחסין של הדבורים. כמה דבורים יש בכל דור? מה מזכירים לכם מספרים אלה?

ג) הוסיפו שני דורות תוך כדי שמירה על הכלל הזה: לכל זכר יש רק אם, ולכל נקבה זוג הורים. מה מספר הדבורים בדורות שהוספתם? האם גם הם איברים בסדרת פיבונאצ'י?



סימון מקובל לזכר ♂ סימון מקובל לנקבה ♀

האיור לקוח מהספר "מספרים מכושפים" של אלי מיטב

פיבונאצ'י מצא את המספרים הבונים את הסדרה בעקבות מחקרו על התרבות הארנבונים, אך הוא לא הכיר את כל תכונותיה של הסדרה כפי שהתגלו מאוחר יותר. במאה ה-19 נתן המתמטיקאי לוקס לסדרה את שמה "סדרת פיבונאצ'י", והשתמש בה למחקר הקשור למספרים ראשוניים. הוא הגדיר סדרה דומה הקרויה על שמו, "סדרת לוקס", שאיבריה הם 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29,

1. א) מה החוקיות של סדרת לוקס? _____
מה הקשר בינה לבין סדרת מספרי פיבונאצ'י? _____

ב) מה יהיה האיבר השמיני? _____ האיבר העשירי? _____

2. יחס הזהב

א) היעזרו במחשבון כדי למלא את הטבלה שלפניכם. (עגלו את התוצאות לספרה הרביעית אחרי הנקודה העשרונית).

מנת שני המספרים	זוג מספרים עוקבים בסדרת פיבונאצ'י
$5 : 3 =$	3, 5
$8 : 5 =$	5, 8
$13 : 8 =$	8, 13
$21 : 13 =$	13, 21
$34 : 21 =$	21, 34
$55 : 34 =$	34, 55
$89 : 55 =$	55, 89
$144 : 89 =$	89, 144
$233 : 144 =$	144, 233
$377 : 233 =$	233, 377

ב) מה גיליתם? _____

ג) בחרו זוג נוסף של מספרים עוקבים בסדרה. _____
האם גם בהם מתקיימת אותה חוקיות? האם קורה תופעה דומה בסדרת לוקס?

אם היטבתם לחשב, בוודאי גיליתם שככל שמתקדמים בסדרה, המנה של כל שני מספרים עוקבים

מתקרבת למספר 1.618....

יחס זה שבין כל שני מספרים עוקבים בסדרת פיבונאצ'י נקרא "יחס הזהב".

מתברר שאפשר לחשב את היחס הזה גם בדרכים אחרות, והן יובאו בהמשך.

מסמנים את "יחס הזהב" באות היוונית Φ .

ד) היכנסו לאתר "ויקיפדיה", לערך "יחס הזהב", וענו על השאלות.

יחס הזהב הוא מספר אי-רציונלי. מה פירוש הדבר?

מי גילה לראשונה את יחס הזהב? לפני כמה שנים?

אילו כינויים נוספים יש ליחס הזהב?

מדוע נהוג לסמן את יחס הזהב באות היוונית Φ ?

כתבו לחבר מה אתם זוכרים מהשיעור.

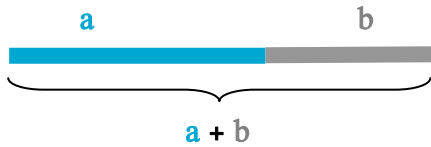


שלח

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

יחס הזהב, חיתוך הזהב, מלבן הזהב

היוונים עסקו הרבה ביחסים בין מידות אורך של קטעים. הם גם חקרו שוויון יחסים מסוג מיוחד, שיש לו מקום נכבד בגאומטריה ובאמנות. זהו "יחס הזהב" או "חיתוך הזהב".



מהו "יחס הזהב", וכיצד מקבלים יחס זה?

לפניכם קטע המורכב משני קטעים a ו- b . אורך הקטע הוא $a + b$.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

יחס הזהב מתקבל אם מתקיימת הנוסחה $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. במילים אחרות, יחס הזהב מתקיים אם היחס בין סכום הקטעים a ו- b לבין הקטע הגדול יותר שווה ליחס שבין הקטע הגדול לקטע הקטן.

כיצד מחשבים את המספר המייצג את יחס הזהב?

נניח ש- $b = 1$.

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

נניח את a על-ידי המשתנה x , ונקבל את המשוואה:

לאחר הרחבה למכנה משותף מתקבלת המשוואה: $x^2 - x - 1 = 0$. הפתרון של משוואה זו הוא: $x = 1.618034 \dots$, זהו "יחס הזהב".

הפלא ופלא, קיבלנו את המספר שהתקבל בסדרת פיבונאצ'י.

1. (א) בחרו זוג מספרים עוקבים מסדרת פיבונאצ'י. סמנו את הגדול מביניהם באות a ואת הקטן באות b .

סרטטו את הקטע הבנוי משני קטעים אלה.

הציבו את המספרים בנוסחה שלמעלה, ובדקו אם התוצאה מתקרבת ליחס הזהב. (ככל שתבחרו זוג מספרים גדול יותר, כך תקבלו תשובה מדויקת יותר.)

(ב) סרטטו קטע שאורכו 21 ס"מ. חלקו את הקטע לשני קטעים (שאינם שווים באורכם) על-ידי סימון נקודה, כך שאם תחלקו את אורך הקטע כולו באורך הקטע הארוך יותר, תהיה התוצאה שווה לחילוק של הקטע הארוך בקצר.

היכן מיקמתם את נקודת החלוקה?

(ג) חזרו על התרגיל הקודם, כאשר אורך הקטע הוא 34 ס"מ.

רמז: היעזרו בסדרת פיבונאצ'י.

"מלבן הזהב"



חזית מקדש הפרתנון היווני, יחס הזהב בחזית הפרתנון

- לפניכם צילום של המקדש הנקרא פרתנון.

חפשו אודותיו בספרות או באינטרנט.

היכן נמצא מקדש זה?

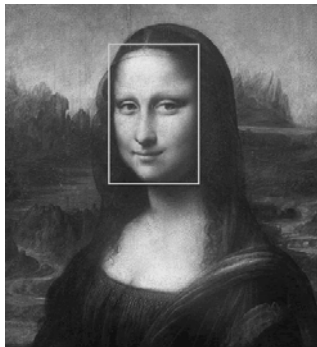
- לאיזה אל או אלה יווניים הוקדש המקום?

- צילום המקדש היווני חסום במלבן.

מדדו את אורכו, מדדו את רוחבו, חלקו את אורכו ברוחבו.

מה המספר שקיבלתם?

גם בין הצלעות של מלבן זה קיים יחס מסוים. בעיני היוונים סימל "מלבן הזהב" את פסגת היופי והשלמות.



"המונה ליזה", ליאונרדו דה וינצ'י

יופי זה יושם באדריכלות היוונית הקלאסית, על מבנים שונים, ביניהם הפרתנון.

"מלבן הזהב" הוא הצורה המלבנית הפופולרית ביותר באמנות, בארכיטקטורה

ובחיי היום-יום. על-פי המחקרים, אנשים מתרבויות שונות מעדיפים אותו על

פני מלבנים בעלי פרופורציות אחרות.

גם בציורו המפורסם של ליאונרדו דה-וינצ'י, "המונה ליזה", אפשר לתחום את

פניה של העלמה ב"מלבן הזהב".

גם כיום ממשיכים להשתמש בפרופורציה של ב"מלבן הזהב" באדריכלות

ובגרפיקה. מספר בניינים מודרניים נבנו בעולם לפי יחס הזהב.

2. גובהו של בניין האו"ם הוא 152 מטר, רוחב הבניין 95 מטר.

מה היחס בין הגובה לרוחב? לאיזה מספר הוא קרוב?

3. מדדו בדיוקנות את האורך ואת הרוחב של אחד הכרטיסים המגנטיים שברשותכם, ומצאו את היחס ביניהם. האם הוא קרוב ליחס הזהב?

4. סרטטו שני מלבנים שונים, כך שהיחס בין אורכם לרוחבם יהיה קרוב ליחס הזהב.

במה תוכלו להיעזר כדי לקבל מהר את המידות הנכונות?

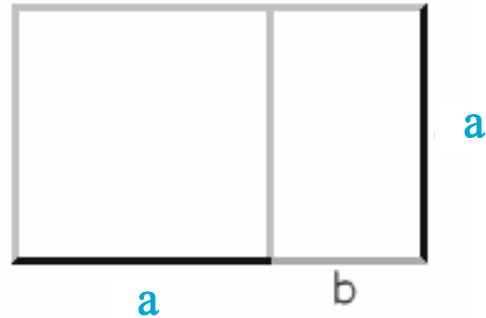
5. קחו דף נייר, וסרטטו עליו "מלבן זהב" שאורכו 21 ס"מ ורוחבו 13 ס"מ.

חתכו מן המלבן ריבוע שאורך צלעו 13 ס"מ.

איזו צורה נותרה? _____ מה מידותיה? _____

האם גם עכשיו מתקיים יחס הזהב בין האורך והרוחב? _____

חזרו על התהליך פעמיים נוספות.



6. פעלו לפי ההוראות, ובנו גם אתם מלבן זהב.

אורך קטע היחידה בסרטוט הוא 10 ס"מ.

א. בנו ריבוע שאורך צלעו הוא קטע יחידה.

ב. העבירו קו מקביל לשני בסיסים נגדיים, כך שיחצה את הריבוע לשני מלבנים, כל אחד בגודל 1

יחידה $\times 0.5$ יחידה (10 ס"מ $\times 5$ ס"מ).

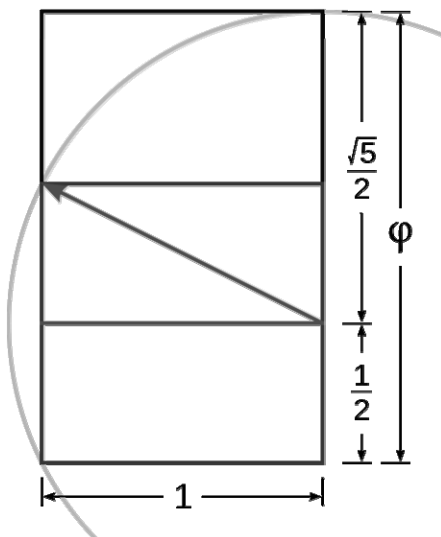
ג. קבעו את חוד המחוגה בקצה הימני של הקו שסרטטתם. פתחו את המחוגה, והקצו מעגל

שרדיוסו כאורך האלכסון של המלבן. הקשת שציירתם "תפגוש" את המשך הצלע של הריבוע.

השלימו את הצלעות של המלבן החדש.

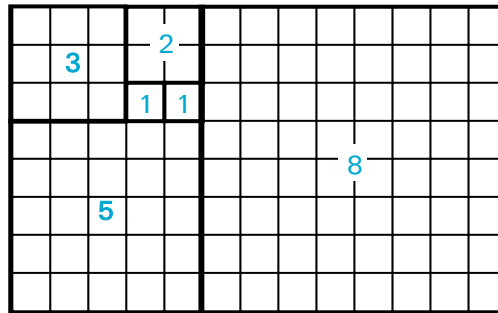
ד. מדדו את אורך הצלעות. חלקו את אורך המלבן החדש ברוחבו.

מה המספר שהתקבל? _____



1. בניית "ספירלת זהב"

(א) לפניכם סרטוט של מלבן. העתיקו אותו לדף נייר.



(ב) המלבן הזה נבנה מריבועים, תחילה נבנה הריבוע הפנימי הקטן שאורך צלעו 1 ס"מ. לידו נבנה

עוד ריבוע באותן מידות. כיצד נבנה הריבוע הבא?

וזה שאחריו?

(ג) המשיכו לבנות ולהגדיל את המלבן. איזה ריבוע תוסיפו עכשיו? מה מידותיו?

(ד) הניחו את חוד העיפרון על הפינה השמאלית העליונה של הריבוע הפנימי השמאלי (1x1),

מתחו קשת קמורה בין שני קדקודים נגדיים בכל ריבוע, והמשיכו אל הריבוע הבא הגובל

בריבוע הראשון. עברו בצורה כזו מריבוע לריבוע, מן המרכז כלפי חוץ.

כשתחברו את כל הקשתות, תתקבל "ספירלת הזהב". צורה זו מופיעה בטבע, למשל,

בצדפים ובקונכיות, באצטרובל ובפרחי החמנייה.



קונכיית החילזון נאוטילוס
הבנויה בצורת ספירלה



מוזיאון "גוגנהיים" בניו יורק
הבנוי הצורת ספירלה

פֶּנְטָגְרָם

הסמל הסודי של פיתגורס וחבורתו היה הפנטגרם. זהו כוכב מחומש, הבנוי מחמישה משולשים זהים, ובין המשולשים קיים "יחס הזהב". פירוש המילה היוונית פנטגרם הוא "חמישה קווים". הפנטגרם מתואר כבר בכתבים העתיקים של חכמי ארם נהריים, שנכתבו לפני כ- 5,000 שנה. הפנטגרם נחשב, בעיני היוונים, צורה בעלת יחסי מידות מושלמים. הבבלים והיוונים הקדומים ייחסו לפנטגרם כוחות על-טבעיים ויכולת כישוף, ורבים נהגו בעת העתיקה לענוד תכשיט שיש בו סמל הפנטגרם, כי הם האמינו שכך הם יהיו מוגנים מפני רוחות רעות. בשל יחסי המידות המיוחדים של הפנטגרם, אפשר לחזור על צורה זו של כוכב מחומש בתוך עצמה אין-סוף פעם.



צורה זו מופיעה גם בטבע, למשל בפרח ההיביסקוס, בכוכב הים ובחתך פרי הקרמבולה.

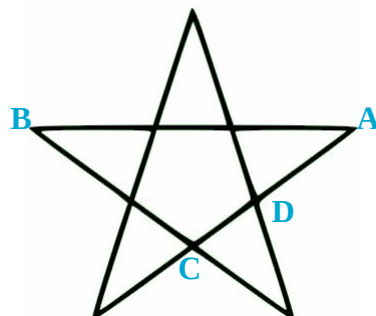
2. היכנסו לערך "פנטגרם" באתר "ויקיפדיה", וענו על השאלות.

א) איך מכונה הפנטגרם ביהדות? _____

ב) הפנטגרם שימש כסמלה של עיר מפורסמת בשנים 300 – 150 לפנה"ס. איזו עיר? _____

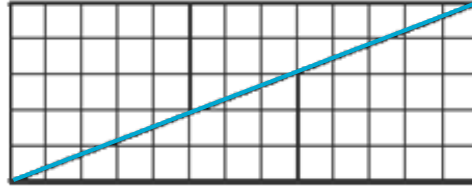
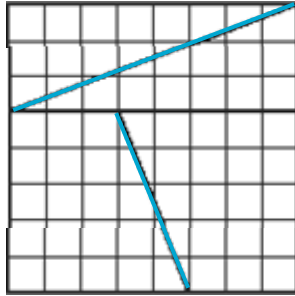
בדגל של אילו מדינות מופיע כיום הפנטגרם? _____

ג) חשבו את היחסים $\frac{AB}{BC}$, $\frac{BC}{AD}$, $\frac{AD}{CD}$ בסרטוטים שלפניכם. מה קיבלתם?



3. איזה קסם!

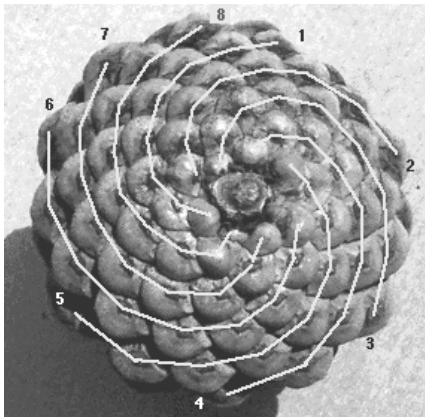
בספרו "מספרים מכושפים" מביא אלי מיטב חידה מפורסמת המיוחסת לחידונאי האמריקאי סם לוויד הבן.



- (א) משמאל מסורטט ריבוע. מה אורך צלעו? מה שטחו? _____
- (ב) ציירו ריבוע דומה על דף נייר משובץ, וסמנו עליו את קווי החיתוך.
- (ג) גזרו את הריבוע לפי החלקים המסומנים עליו, והניחו אותם, כך שיתקבל מלבן.
- (ד) מה אורך המלבן? מה רוחבו? מה שטחו? _____
- (ה) מה מפתיע בממצאים שלכם? _____
- (ו) מה הקשר בין ממצאים שלכם לבין מספרי פיבונאצ'י? _____
- (ז) התבוננו בציור שלהלן. האם מסקנתכם תסייע במציאת השטח שנעלם? _____



4. פיבונאצ'י בטבע



(א) לפניכם צילום של איצטרובל.

קשקשי האצטרובל מסודרים בצורת ספירלות בשני כיוונים.

בצילום מסומנות הספירלות שבכיוון השעון.

כמה ספירלות מסומנות? _____

בעזרת עט צבעוני סמנו גם את הספירלות בכיוון המנוגד

לשעון. כמה ספירלות מצאתם? _____

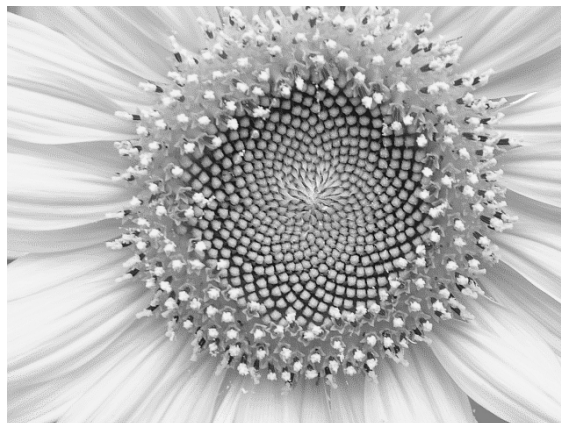
האם המספרים הללו מוכרים לכם? מנין?

(ב) הפרחים בתפרחת החמנייה ערוכים בספירלות. סמנו בעט את כל הספירלות בכיוון השעון,

ובקשו מחבר לסמן על הציור שלו את הספירלות בכיוון מנוגד לשעון.

כמה ספירלות ספרתם? _____

האם שני המספרים שקיבלתם הם מספרים עוקבים בסדרת פיבונאצ'י? _____



כתבו לחבר מה אתם זוכרים מהשיעור.

שלח



מהו מספר?

האם השברים הם מספרים?

נסו לדמיין עולם ללא מספרים. מה היה קורה?

בפרק זה נעמיק את ההיכרות עם **עולם המספרים**.

בתחילת האנושות החלו לעסוק במספרים טבעיים $(1, 2, 3, \dots)$ ולהשתמש בהם למניית פריטים בקבוצה.

לשם כך השתמשו באבנים קטנות וחיברו וחסירו מספרים בעזרתן.

לאחר מכן החלו להתייחס למספרים כאל עצמים מופשטים. עולם המספרים ריתק את האנשים, ופילוסופים רבים חקרו עולם מרתק זה. פעמים רבות ייחסו למספרים גם תכונות מיסטיות וניסו להסביר באמצעותם תופעות טבע. למשל, פיתגורס - פילוסוף ומתמטיקאי יווני שנוולד בשנת 570 לפני הספירה והקים בית ספר הידוע בשם "החבורה הפיתגורית" - ייחס משמעות למספרים וקשר אותם למושגים "בלתי מחולק" (המספר 1), "שמים וארץ" (המספר 2), "טבע - דומם, צומח וחי" (המספר 3) ו"יסודות - אש, מים, אוויר ואדמה" (המספר 4). סכום המספרים $1 + 2 + 3 + 4$ היה המספר המושלם 10.

לאחר שהחלו להשתמש בפעולות החשבון - חיבור, חיסור, כפל וחילוק - עלה הצורך להכיר יותר את עולם המספרים. למשל, הבינו שבחיבור או בכפל של שני מספרים טבעיים, תתקבל תמיד תוצאה שהיא מספר טבעי, אך בחיסור או בחילוק של שני מספרים טבעיים לא בהכרח תתקבל תוצאה טבעית. לדוגמה, אם נחסיר 3 מ-1 לא נקבל מספר טבעי.

לפני שהתחילו להשתמש במספרים השליליים, אפשר היה לדמיין את התוצאה (-2) , אך לא הייתה לכך משמעות. קיומם של המספרים השלילים היה תאורטי בלבד במשך יותר מאלפיים שנה.

אם נחלק 1 ב-3, נקבל תוצאה שלא שייכת לעולם המספרים הטבעיים. מתן משמעות ל**שברים** התאפשר בעיקר הודות לשימוש במדידות: השימוש ביחידות זמן, ביחידות אורך, בשטח ובנפח וכן בגלל הצורך בחלוקת היחידות השונות ליחידות קטנות יותר.

כבר במצרים העתיקה, בשנת 1600 לפני הספירה, נמצאו עדויות לשימוש בשברים.

פיתגורס וחבריו עסקו, בין היתר, בלימוד ובחקר של עולם המספרים. נכון לתקופה ההיא הכירו את המספרים השלמים (חיוביים ושליליים) וכן את השברים אשר תיארו יחס בין המספרים השלמים.

חברי הקבוצה גילו תכונות רבות של מספרים. המשפט המקשר בין מידות הניצבים של משולש ישר-זווית לבין מידת היתר הוא המשפט המפורסם ביותר, והוא ידוע בשם "משפט פיתגורס". הפיתגורים האמינו שאפשר להסביר כל תופעה בעולם באמצעות מספרים שלמים ושברים - מספרים הידועים בשם **מספרים רציונליים**. אלה מספרים שאפשר להציגם כמנה של שני מספרים שלמים. קיימת סברה שאחד מחברי הקבוצה, היפאסוס, גילה לראשונה את קיומם של **מספרים אי-רציונליים** (מספרים שאי-אפשר להציגם על-ידי שני מספרים שלמים). מסופר שהיפאסוס הוכיח לראשונה ש- $\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי, וכתוצאה מהגילוי, סולק היפאסוס מהחבורה הפיתגורית, וליתר ביטחון הוא אף הוטבע על-ידי חברי הקבוצה.

מספרים ממשיים

קבוצות מספרים

הגדרות

מספרים טבעיים - אוסף המספרים $1, 2, 3, 4, 5, \dots$.
נהוג לסמן את קבוצת המספרים הטבעיים באות $\mathbb{N}$.

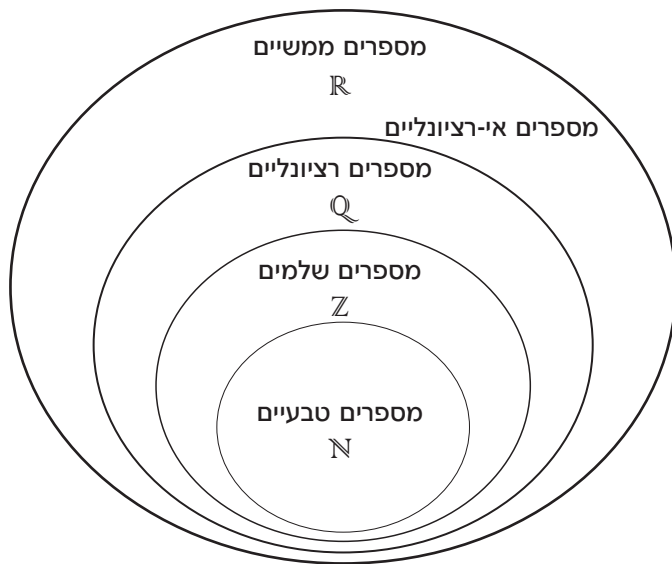
מספרים שלמים - קבוצת המספרים המכילה את המספרים הטבעיים, את המספרים השליליים ואת 0.
נהוג לסמן את קבוצת המספרים השלמים באות $\mathbb{Z}$.

מספר רציונלי - מספר שאפשר להציגו כמנה של שני מספרים שלמים. נהוג לסמן את קבוצת המספרים הרציונליים באות $\mathbb{Q}$.
דוגמה: $\frac{1}{3}, \frac{7}{8}$ הם מספרים רציונליים.

הערה: קבוצת המספרים העשרוניים היא תת-קבוצה של $\mathbb{Q}$. לפעמים מסמנים אותה באות $\mathbb{D}$.
דוגמה: 0.5 הוא מספר רציונלי, מכיוון שאפשר לייצגו באמצעות השבר $\frac{1}{2}$.

מספר אי-רציונלי - מספר שאי-אפשר להציגו על-ידי שני מספרים שלמים.
דוגמה: נוכיח בהמשך שהמספר $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

מספר ממשי - מספר שאפשר לייצגו על-ידי נקודה על ציר המספרים, בין שמכירים דרך למקם אותו בדיוק על הציר ובין שלא.
בקבוצה זו נכללים כל המספרים שראינו עד כה: מספרים טבעיים, מספרים שלמים, מספרים רציונליים ומספרים אי-רציונליים. נהוג לסמן את קבוצת המספרים הממשיים באות $\mathbb{R}$.
דוגמה: $\frac{1}{2}, -3, 0, \sqrt{2}, -7.21221222122221, \dots$ הם מספרים ממשיים.



מספרים ממשיים

קבוצות מספרים

כדי להוכיח ש- $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי, נוכיח כאן כמה עובדות על מספרים שלמים.

1. (א) נתון מספר שלם n . האם המספר $2n$ הוא זוגי או אי-זוגי? _____

(ב) האם המספר $2n + 1$ הוא זוגי או אי-זוגי? _____

2. (א) נתון מספר זוגי k . האם קיים מספר שלם n , כך שיתקיים $k = 2n$? נמקו את תשובתכם, ותנו דוגמה. _____

(ב) נתון מספר אי-זוגי s . האם קיים מספר שלם n , כך ש- $s = 2n + 1$? נמקו את תשובתכם, ותנו דוגמה. _____

3. (א) ידוע ש- k הוא מספר זוגי. מה אפשר לומר על המספר k^2 ? כתבו הוכחה, שיהיה בה אחד הביטויים המופיעים בשאלה 2. _____

(ב) ידוע ש- s הוא מספר אי-זוגי. מה אפשר לומר על המספר s^2 ? כתבו הוכחה שיהיה בה אחד הביטויים המופיעים בשאלה 2. _____

4. ידוע שהמספר k^2 הוא מספר זוגי. האם ייתכן שהמספר k הוא מספר אי-זוגי? הסבירו את תשובתכם. _____

5. נתון ש- $m^2 = 2k^2$. האם ייתכן כי המספר m הוא מספר אי-זוגי? _____

אם כן, כתבו דוגמה ל- m ול- k מתאימים. אם לא, הסבירו מדוע. _____

6. (א) מה יש יותר: מספרים טבעיים או מספרים טבעיים זוגיים? _____

(ב) מה יש יותר: מספרים טבעיים אי-זוגיים או מספרים טבעיים זוגיים? _____

(ג) נסו לפתור את סעיפים א' ו-ב' על-ידי התאמת כל מספר טבעי למספר זוגי בסעיף א', ועל-ידי התאמת כל מספר _____

טבעי אי-זוגי למספר טבעי זוגי בסעיף ב'. _____

מספרים ממשיים

$$\sqrt{2}$$

טוענים שהמספר $\sqrt{2}$ הוא המספר האי-רציונלי העתיק ביותר.

ישנם קירובים רבים של $\sqrt{2}$ באמצעות שברים.

למשל, $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{8119}{5741} \dots$ הם הקירובים של $\sqrt{2}$.

המספר 1.41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85696 71875 37695

הוא $\sqrt{2}$ המעוגל עד חמישים הספרות הראשונות אחרי הנקודה העשרונית.

נראה שהמספר $\sqrt{2}$ הוא מספר ממשי על-ידי כך שנסמן את המספר על ציר המספרים.

על-גבי ציר המספרים נסמן קטע באורך של יחידה אחת (ראו סרטוט).

ניעזר במשפט פיתגורס כדי לבנות קטע באורך $\sqrt{2}$.

נבנה משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים, שמידת כל אחד מניצביו היא 1. לפי משפט פיתגורס, מידת היתר

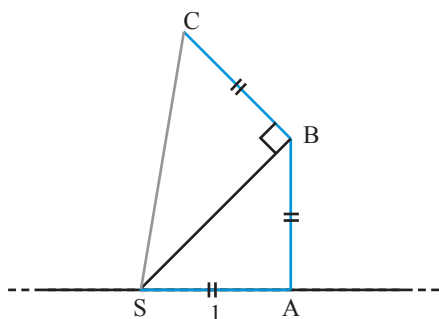
$$\text{במשולש תהיה שווה ל-} \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$



לאחר שבנינו את המשולש, ניעזר במחוגה, ונקצה על-גבי הציר קטע באורך השווה ליתר המשולש.

קצה אחד יהיה על ראשית הציר, והקצה השני יגיע למקום של $\sqrt{2}$ על גבי ציר המספרים.

הוכחנו על-ידי מיקום $\sqrt{2}$ על ציר המספרים, ש- $\sqrt{2}$ הוא מספר ממשי. קיימות הוכחות נוספות לכך.



1. במשולש ישר-זווית ושווה-שוקיים SAB, נתון ש- $SA = 1$.

א) מהו אורך הקטע CS? _____

הסבירו את תשובתכם. _____

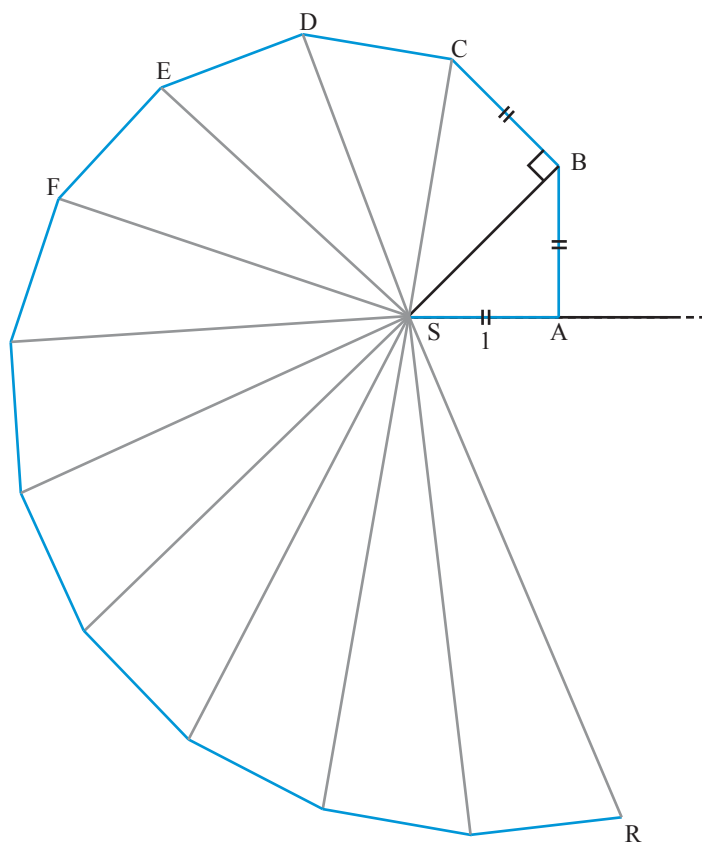
ב) היעזרו בסרטוט בסעיף א', ובנו קטע באורך $\sqrt{5}$.

הסבירו את דרך בנייתכם. _____

מספרים ממשיים

$$\sqrt{2}$$

2. הסרטוט שכאן בנוי בשיטה המופיעה בתרגיל הקודם: כל המשולשים ישרי-הזווית שווים, וכל הקטעים הכחולים שווים.



- (א) התבוננו במשולש SEF. מהם אורכי הניצבים במשולש זה? מהו אורך היתר?
- (ב) כתבו את הסדרה של המספרים, שהם אורכי היתרים של המשולשים, מהקטן לגדול.

- (ג) הסדרה שכתבתם היא סדרה אין-סופית. מהו המספר הבא בסדרה, לדעתכם?
- (ד) בנו בסרטוט קטע שאורכו שווה לאיבר הבא בסדרה שכתבתם.

- (ה) הראו כי $\sqrt{3} < \sqrt{5} < \sqrt{7}$.

מספרים ממשיים

$$\sqrt{2}$$

נראה שהמספר $\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי, כלומר אי-אפשר להציגו כמנה של שני מספרים שלמים. נוכיח את הטענה הזו בדרך של שלילה: נניח כי הטענה נכונה, ותתקבל סתירה. לפיכך נסיק כי הטענה אינה נכונה.

להלן ההוכחה בדרך השלילה.

נניח כי המספר $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונלי, כלומר קיימים שני מספרים m ו- n , כך שמתקיים: $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$. נניח גם שהשבר $\frac{n}{m}$ הוא שבר מצומצם, כלומר אין אף גורם משותף, חוץ מ-1, שמחלק גם את m וגם את n ללא שארית.

כאמור, הנחנו ש- $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$. לאחר שנעלה את שני האגפים בריבוע, יתקבל $2 = \frac{n^2}{m^2}$. ולאחר שנכפיל את שני האגפים ב- m^2 , יתקבל $2m^2 = n^2$.

כעת שני האגפים של השוויון הם מספרים זוגיים. האגף השמאלי הוא מספר זוגי, מכיוון שהוא כפולה של 2; והאגף הימני הוא זוגי, כי הוא שווה לאגף השמאלי. אם הביטוי n^2 הוא זוגי, גם המספר n הוא זוגי. נכתוב: $n = 2k$, ונציב בשוויון $2m^2 = n^2$.

$$2m^2 = (2k)^2$$

$$2m^2 = 4k^2$$

$$m^2 = 2k^2$$

ובכן, m^2 הוא מספר זוגי, לכן גם m הוא מספר זוגי.

כלומר גם m וגם n הם מספרים זוגיים, לכן $\frac{n}{m}$ אינו שבר מצומצם.

אבל כזכור, ההנחה הייתה ש- $\frac{n}{m}$ הוא שבר מצומצם. לפיכך זו סתירה.

כלומר ההנחה ש- $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונלי, הובילה לסתירה. לכן המספר $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

1. בשיעור הוכחנו ש- $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

א) הוכיחו שהמספר $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

מספרים ממשיים

$$\sqrt{2}$$

(ב) הוכיחו שהמספר $\sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.

(ג) האם אפשר להוכיח בדרך דומה, שגם המספר $\sqrt{4}$ הוא מספר אי-רציונלי? נמקו את תשובתכם.

2. לפניכם הוכחה לכך שסכום של מספר רציונלי (a) ומספר אי-רציונלי (b) לא יכול להיות מספר רציונלי (c).
ההוכחה היא בדרך השלילה.

נניח ש- c רציונלי. $a + b = c$, לכן $b = c - a$, אבל הפרש בין שני מספרים רציונליים הוא מספר רציונלי, לכן ההנחה לא נכונה. לפיכך נתקבלה סתירה.

נדב ויואל מנסים להחליט אם ייתכן שהמספר $4 - 9\sqrt{2}$ הוא מספר רציונלי.

נדב אומר שקל להוכיח שמכפלה של $\sqrt{2}$ במספר שלם היא מספר אי-רציונלי. לכן המספר הנתון הוא אי-רציונלי.

(א) האם נדב צודק? _____

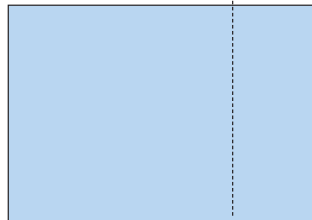
(ב) הוכיחו שהמכפלה של $\sqrt{2}$ במספר שלם היא מספר אי-רציונלי, על-ידי הוכחה דומה להוכחה הנתונה.

(ג) נמקו את תשובתכם לסעיף א'. רמז: השתמשו בהוכחה דומה להוכחה הנתונה.

מספרים ממשיים

$\sqrt{2}$ ודפי A4

אפשר לומר כי המספרים π , ϕ ו- $\sqrt{2}$ הם המספרים האי-רציונליים המפורסמים והשימושיים ביותר. השימוש הנפוץ ביותר של $\sqrt{2}$ נמצא כל יום לפנינו: דף הצילום וההדפסה מסוג A4.



1. במשימה שלפניכם יתגלה מהו מקור המידות של דף A4.

(א) קחו שני דפי A4. (כדאי שהדפים יהיו בשני צבעים שונים, ולא - אפיינו אחד מהדפים על-ידי קווים או ציור אחר.)

גזרו מדף אחד רצועה מלבנית.

(ב) בצעו את הפעולות I - IV בחלק הגדול של הדף הגזור ובדף השלם.

I. גזרו כל דף לשני חלקים שווים. חלקו את הצלע הגדולה יותר לשניים.

II. הניחו בצד חצי אחד מכל דף, והמשיכו לבצע את הפעולות בחצי השני.

III. חזרו על פעולות I ו-II לפחות שמונה פעמים.

(שימו לב! בכל פעם מחלקים את הצלע הגדולה.)

IV. קיבלתם שתי מערכות של חלקים שהולכים וקטנים.

סדרו את הדפים זה על זה מהגדול לקטן לאורך הצלע

הגדולה, כך שהקצה שלהם בקדקוד הימני התחתון.

אם פעלתם נכון, התקבלו שני דגמים כאלה:

(ג) מהו, לדעתכם, ההבדל בין שני הדגמים? _____

(ד) מלאו את הטבלה בנתונים של דף A4 שלם כך: A - אורך הדף המקורי; B - רוחבו.

שלב	0	1	2	3	4	5	6	7	8
אורך - a	A	B	$\frac{A}{2}$						
רוחב - b	B	$\frac{A}{2}$	$\frac{B}{2}$						
היחס $\frac{a}{b}$									

(ה) התבוננו בשורה האחרונה בטבלה, וקבעו באיזה תנאי היחס נשאר קבוע. _____

לפי תנאי זה, מה צריכות להיות המידות של A ושל B, כדי ששטח הדף יהיה בדיוק 1 מ"ר?

לפי מידות אלה, מהן המידות של הדף בשלב 4? _____

מספרים ממשניים

π - פאי

π - פאי

המספר π מייצג יחס קבוע בין היקף המעגל לבין קוטרו.

הוא מספר אי-רציונלי מפורסם שייצוגו העשרוני עד חמישים ספרות ראשונות הוא

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510.

הקירוב של π כשבר הוא $\frac{22}{7}$ או $3\frac{1}{7}$.

משתמשים במספר π בנוסחאות לחישוב היקף מעגל, שטח עיגול, שטח אליפסה, נפח כדור, שטח פנים של כדור, נפח גליל, שטח פנים של גליל, נפח חרוט ובעוד נוסחאות רבות אחרות.

בפרק זה נכיר שיטות לחישוב של π . הדרך לחישוב של π העסיקה מתמטיקאים כבר מתקופות עתיקות. ישנה התייחסות לנושא גם במקורות יהודיים וגם במקורות אחרים. במקרא, בספר מלכים א', מתוארים היקף מעגל וקוטרו, והיחס העולה מהתיאור הוא אחת לשלוש.

גם בסין העתיקה עסקו בנושא זה. לפני כ-2,000 שנה חישובו הסינים את היחס בין היקף מצולע חסום במעגל לבין קוטרו, וכך הגיעו ישירות לקירובים של π . המתמטיקאי הסיני ליה-הוי (Li Hui), שחי לפני כ-1,700 שנה חסם בשלב ראשון משושה משוכלל במעגל, ובכל שלב הוא הכפיל את מספר הצלעות של המצולע כדי להתקרב להיקף המעגל. כך הוא קיבל מצולעים של 12, של 24, של 48 ושל 96 צלעות. את אורך צלעות המצולעים הוא חישב באמצעות משפט פיתגורס.

קירובים ל- π לפי ליה-הוי:

מספר הצלעות	6	12	24	48	96
היחס: היקף/קוטר	3	3.105	3.133	3.139	3.141

בשיטת ליה-הוי ברור כי ערך ה- π גדול מכל קירוב שמתקבל, אך לא ידוע בכמה.

המתמטיקאי היווני ארכימדס, שחי בשנות 212 - 287 לפנה"ס, פיתח את שיטת ליה-הוי. ארכימדס השתמש לא רק במצולעים חסומים במעגל, אלא גם במצולעים חוסמים. הוא חסם מצולע משוכלל במעגל, וגם חסם את המעגל במצולע משוכלל בעל אותו מספר צלעות. לאחר מכן הכפיל בכל שלב את מספר צלעות המצולעים, וכך היו שני ההיקפים כמעט כמו היקף המעגל. בדרך זו כלא את π בין שני ערכים, אחד גדול ממנו ואחד קטן ממנו. ולאחר שעבד במצולע של 96 צלעות, הגיע ארכימדס לתוצאה הזו:

$$3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$$

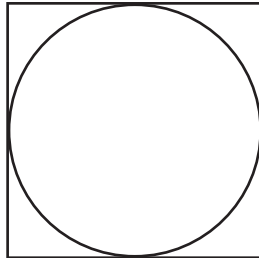
מספרים ממשיים

π - פאי

קיימות מספר שיטות נוספות לחישוב של π , ונכיר אחת מהן.

1. חישוב π באמצעות שיטה סטטיסטית - שיטת מונטה-קרלו.

בציור שלפניכם מופיע ריבוע שבתוכו חסום מעגל. (קוטר המעגל שווה לצלע הריבוע).



(א) מהו היחס בין שטח העיגול לבין שטח הריבוע? הציגו את התשובה באמצעות π .

(ב) דמיינו שיוורים חצים מקשת לעבר מטרה שהיא הריבוע המופיע בסרטוט. החצים אינם מכוונים למקום מסוים בתוך הריבוע, אלא כל נקודה בתוך הריבוע היא מטרה. סמנו על-גבי הציור באופן אקראי נקודות במקומות אפשריים של פגיעת החצים. (סמנו לפחות 50 נקודות שמפוזרות בצורה אחידה ככל האפשר.)

(ג) מצאו יחס בין מספר הנקודות שנמצאות בתוך העיגול לבין סך-כל הנקודות.

(ד) היעזרו בסעיף א', והציעו דרך לחישוב מקורב של π באמצעות היחס שמצאתם בסעיף ג'. הסבירו את תשובתכם.

(ה) חשבו את π באמצעות השיטה מסעיף ד'.

(ו) הציעו דרך להעלות את רמת הדיוק של החישוב בשיטת מונטה-קרלו.

(ז) סכמו את השיטה במילים: כיצד אפשר לחשב את המספר π בשיטת מונטה-קרלו?

מספרים ממשיים

π - פאי

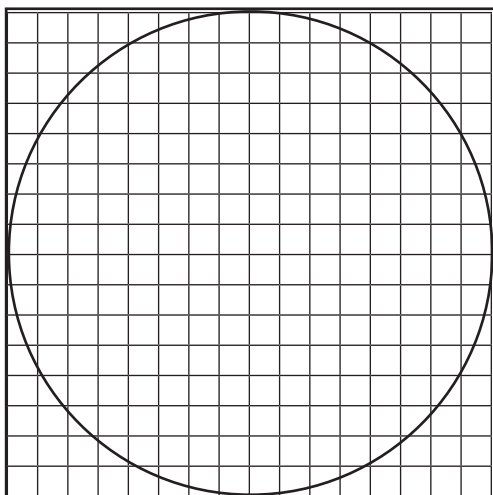
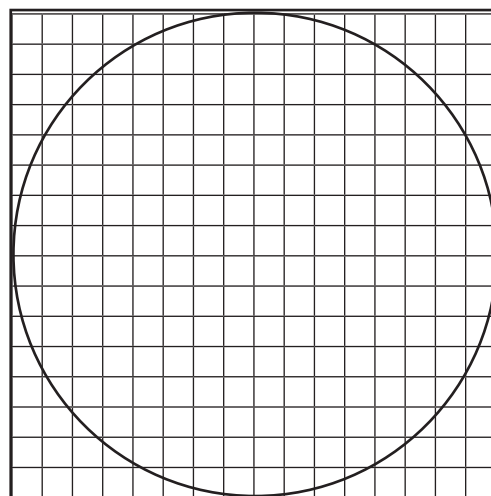
2. דנה טוענת: "היחס בין שטחו של רבע עיגול לבין שטח הריבוע הבנוי על רדיוס העיגול הוא $\frac{\pi}{4}$ ".

א) האם הטענה של דנה נכונה? הסבירו את תשובתכם. (היעזרו בתרגיל 1.)

ב) הציעו שיטה לחשב את π באמצעות הטענה של דנה ובדרך הדומה לשיטת מונטה-קרלו.

היעזרו בדף נייר משובץ, בסרגל, במחוגה ובנקודות שתציירו.

תיאור השיטה:



ג) הציעו שיטה לחישוב π באמצעות סרטוט דומה על-גבי דף

משובץ, אך ללא ציור הנקודות. הסבירו את תשובתכם.

מה יכול להחליף את הנקודות?

מספרים ממשיים

מספרים ממשיים ושבירים

הצגת שבר כמספר עשרוני

אפשר להציג כל שבר באמצעות מספר עשרוני. לשם כך קיימות שתי דרכים.

דרך א: הרחבת השבר כך שהמכנה שלו יהיה חזקה של 10.

$$\text{דוגמה: } \frac{1}{80} = \frac{1 \cdot 125}{80 \cdot 125} = \frac{125}{10,000} = 0.0125$$

דרך ב: חישוב המנה על-ידי חילוק.

0.714285714285.....

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 7} \\ \underline{40} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \dots \end{array}$$

דוגמה: $\frac{5}{7} = ?$

נחלק 5 ב-7 באמצעות החילוק הארוך.

קעת נבדוק באילו מקרים אפשר להשתמש בשיטת ההרחבה, ובאילו מקרים חייבים להיעזר בחילוק ארוך כדי להפוך את השבר למספר עשרוני.

נתייחס לשבר המצומצם $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

טענה 1: כאשר $b = 2^m \cdot 5^n$, אפשר להפוך את השבר $\frac{a}{b}$ למספר עשרוני באמצעות הרחבת השבר, כך שבמכנה תתקבל חזקה של 10. (כאשר לא קיים גורם הרחבה שבאמצעותו תהיה במכנה חזקה של 10, אי-אפשר להשתמש בתהליך ההרחבה).

דוגמה: בשבר $\frac{1}{80}$, $a = 1$, $b = 2^4 \cdot 5^1$. לפיכך אפשר להפוך את השבר למספר עשרוני באמצעות הרחבה.

1. נימוק טענה 1

- (א) כתבו מספר טבעי שהמחלקים היחידים שלו הם מכפלות של חזקה של 2 בחזקה של 5. _____
- (ב) באיזה מספר טבעי אפשר לכפול את 40, ותתקבל חזקה של 10? _____
- (ג) באיזה מספר טבעי אפשר לכפול את $c = 2^3 \cdot 5^4$, ותתקבל חזקה של 10? _____
- (ד) האם קיים מספר טבעי שבמכפלתו ב-70 תתקבל חזקה של 10? _____ נמקו את תשובתכם.

מספרים ממשיים

מספרים ממשיים ושברים

2. כתבו את המספרים שלפניכם בשיטה העשרונית.

$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{55}$	
$\frac{11}{8}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{2}{9}$

3. כתבו חמישה שברים שונים שאפשר להפוך אותם למספר עשרוני באמצעות הרחבה. כתבו את ההרחבות המתאימות.

כיצד אפשר למצוא את גורם ההרחבה?

טענה 2: כאשר אפשר להפוך שבר למספר עשרוני בעזרת הרחבה, מתקבל מספר עשרוני סופי (כלומר יש לו מספר סופי של ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

4. הסבר טענה 2.

(א) תנו שתי דוגמאות המתאימות לטענה.

(ב) נמקו את הטענה.

5. האם אפשר לכתוב את השברים שכאן כמספרים עשרוניים סופיים?

(א) $\frac{1}{2}$	(ב) $\frac{2}{3}$
(ג) $\frac{5}{200}$	(ד) $\frac{3}{400,000,000}$

מספרים ממשיים

מספרים ממשיים ושברים

מספר עשרוני הוא **אין-סופי**, אם כותבים את החלק השברי בעזרת מספר אין-סופי של ספרות השונות מ-0.

מסמנים מספר אין-סופי על-ידי נקודות ... מימין למספר. דוגמה: $35.1578219\dots$

מספר עשרוני הוא **אין-סופי מחזורי**, אם בחלק השברי שלו מופיעה סדרה של מספרים החוזרת על עצמה מיד לאחר הנקודה העשרונית או לאחר כמה ספרות שונות מהסדרה.

מסמנים מספר עשרוני **אין-סופי מחזורי** על-ידי קו $\overline{\quad}$ מעל סדרת המספרים החוזרת על עצמה.

דוגמאות: $4.25252525\dots = 4.\overline{25}$ $13.22235353535\dots = 13.\overline{22235}$

טענה 3: כאשר **אי-אפשר** להפוך שבר למספר עשרוני בעזרת הרחבה, מתקבל מספר עשרוני אין סופי מחזורי.

6. א) כתבו שלושה שברים שונים **שאי-אפשר** להפוך אותם למספרים עשרוניים באמצעות הרחבה.

ב) הפכו את השברים מסעיף א' למספרים עשרוניים. כתבו חמש עשרה ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

ג) האם קיבלתם מספרים עשרוניים סופיים? מספרים עשרוניים אין-סופיים? מספרים עשרוניים אין-סופיים מחזוריים?

7. א) כאשר מחלקים מספר כלשהו ב-7, אילו שאריות עשויות להתקבל?

כמה מספרים כתבתם?

ב) כתבו את השבר $\frac{3}{7}$ כמספר עשרוני בדיוק של עד 20 ספרות לאחר הנקודה העשרונית.

ג) האם כדי לענות על סעיף ב' היה צורך לבצע 20 שלבי חילוק ארוך? אולי אפשר היה לסיים את העבודה במספר קטן

יותר של שלבי חילוק? הסבירו את תשובתכם.

מספרים ממשיים

מספרים ממשיים ושברים

ד) מהו אורך החלק המחזורי במספר העשרוני בסעיף ב'?

ה) האם ייתכן שבר מהצורה $\frac{a}{7}$, כך שהחלק המחזורי של המספר העשרוני המתאים יהיה ארוך יותר מזה שבסעיף ד'? הסבירו את תשובתכם.

8. לפניכם שבר מצומצם $\frac{5}{11}$. היעזרו במסקנות מהתרגילים הקודמים, וענו על השאלות.

א) האם המספר העשרוני המתאים לשבר הנתון הוא שבר סופי או שבר אין-סופי?

ב) אם קבעתם כי המספר העשרוני הוא אין-סופי, האם הוא מחזורי? הסבירו את תשובתכם.

ג) אם קבעתם כי השבר האין-סופי הוא מחזורי, מהו האורך המרבי האפשרי של החלק המחזורי? הסבירו את תשובתכם.

ד) חשבו את המספר העשרוני המתאים, ובדקו אם השערותיכם מסעיפים א' - ג' נכונות.

9. היעזרו בתרגילים 7 ו-8, והשלימו את המסקנה הכללית:

כשהופכים שבר מצומצם $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) למספר עשרוני, אם יתקבל מספר עשרוני אין-סופי, הוא בהכרח יהיה מחזורי, ואורך

החלק המחזורי לא יהיה יותר מ-_____.

מספרים ממשניים

מספרים ממשניים ושברים

10. נתון תרגיל חילוק: 216 : 34. ענו על השאלות א' - ג' ללא חישוב.

א) האם תוצאת החילוק היא מספר עשרוני סופי? מספר עשרוני אין-סופי? מספר עשרוני אין-סופי מחזורי? הסבירו את תשובתכם.

ב) אם קבעתם כי התוצאה היא מספר עשרוני מחזורי, מהו האורך המרבי האפשרי של החלק המחזורי? הסבירו את תשובתכם.

ג) בצעו את החילוק בפועל, ובדקו אם צדקתם בסעיפים א' - ב'.

11. כתבו שלושה שברים בעלי מכנה אי-זוגי, שלאחר המעבר למספר עשרוני יתקבל מספר עשרוני אין-סופי מחזורי, שבחלק המחזורי שלו יהיו בהכרח פחות מ- 20 ספרות. הסבירו את תשובתכם.

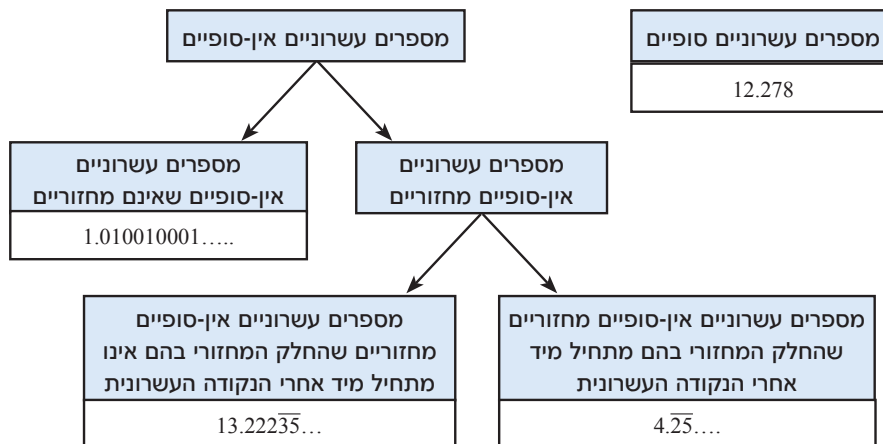
מספרים ממשיים

מספרים אי-רציונליים

סוגי מספרים עשרוניים

אפשר להציג כל מספר באמצעות מספר עשרוני.

מספרים עשרוניים נחלקים לכמה סוגים.



כל המספרים העשרוניים שאפשר לייצגם על-ידי שבר, הם **מספרים רציונליים**. (RATIO בלטינית = יחס).

לכן מספרים עשרוניים אין-סופיים שאינם מחזוריים הם **מספרים אי-רציונליים**.

בפרק זה נלמד להפוך מספרים עשרוניים לשברים.

מקרה 1: הפיכת מספר עשרוני סופי לשבר.

נשתמש בהגדרה של מספר עשרוני כדי להפוך מספר עשרוני לשבר: $12.278 = 12\frac{278}{1,000} = 12\frac{139}{500}$. בצורה דומה אפשר להפוך כל מספר עשרוני סופי לשבר.

מקרה 2: הפיכת מספר עשרוני מחזורי לשבר.

נהפוך את המספר המחזורי $14.2\overline{35}$ לשבר. נעבוד רק בחלק השברי של המספר.

המטרה היא "להיפטר" מהחלק המחזורי. לשם כך נשתמש במכפלה בחזקות של 10, וניצור שני מספרים

שהחלק המחזורי שלהם שווה ומתחיל מיד אחרי הנקודה העשרונית.

במקרה שלנו נסמן $x = 0.2\overline{35}$. ניעזר בכפולות של חזקות של 10, וניצור שני מספרים שהחלק המחזורי שלהם זהה.

$10x = 2.\overline{35}$. במספר זה הסדרה המחזורית מופיעה מיד לאחר הנקודה העשרונית.

$$1,000x = 235.\overline{35}$$

נחסר בין המספרים כדי "להיפטר" מהחלק המחזורי.

$$1,000x - 10x = 235.\overline{35} - 2.\overline{35}$$

$$990x = 233$$

$$x = \frac{233}{990}$$

$$14.2\overline{35} = 14\frac{233}{990}$$

בצורה דומה אפשר להפוך כל מספר עשרוני מחזורי למספר מעורב.

מספרים ממשיים

מספרים אי-רציונליים

1. הפכו את המספרים שלפניכם למספרים מעורבים.

- (א) 0.123 _____
(ב) 1.27 _____
(ג) 213.6667 _____

2. הפכו את המספרים שלפניכם למספרים מעורבים.

- (א) $0.\overline{235}$ _____
(ב) $1.\overline{17}$ _____
(ג) $24.\overline{24}$ _____
(ד) $123.123\overline{45678}$ _____

3. נטע טוענת כי לא ייתכן שהייצוג העשרוני של השבר $\frac{3}{11}$ הוא $0.\overline{23456787654}$.

בלי להפוך את השבר לייצוג העשרוני, נמקו את הטענה של נטע.

4. דינה וגלי משחקות במשחק המספרים. הן מְטילות מטבע. כאשר מתקבלת "תמונה", כל אחת צריכה לכתוב בתורה

מספר רציונלי; וכאשר מתקבל "מספר", כל אחת צריכה לכתוב בתורה מספר אי-רציונלי.

(א) בהטלה האחרונה התקבל "מספר", ודינה כתבה: $1.000001111111...$

האם דינה צודקת? _____

(ב) בהטלת מטבע התקבלה "תמונה", וגלי כתבה: 19. האם גלי צודקת? _____

(ג) בהטלת מטבע התקבלה "תמונה", ודינה כתבה: 0. האם דינה צודקת? _____

(ד) בהטלת מטבע התקבל "מספר", וגלי אמרה: " נכתוב את המספר $1.1111111...$, לאחר מכן נחליף חלק מהספרות

ב- 0 כך: פעם אחת אחרי דילוג אחד, אחר-כך אחרי שני דילוגים, אחר-כך אחרי שלושה דילוגים וכן הלאה. בסוף

נקבל: $1.1011011101111011110...$. האם גלי צודקת? _____

(ה) הציעו דוגמאות נוספות לשברים אין-סופיים לא-מחזוריים, המייצגים מספרים אי-רציונליים. הסבירו מדוע בדרך

שאתם מציעים מובטח שהשברים אכן לא-מחזוריים.



המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence
through Education

מצוינות 2000
בחסות קרן סקירבול

המכון למצוינות בהוראה

עניין של אופטימיזציה

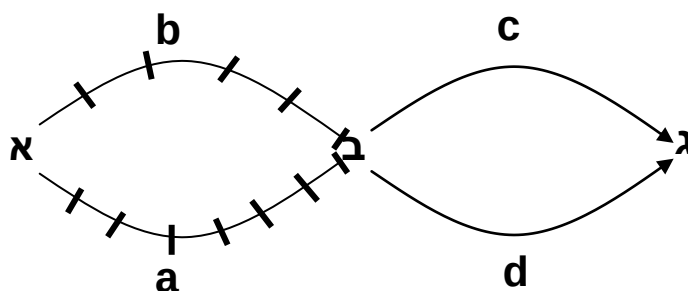
מאת: אמנון זקוב

מערכת: גלי שמעוני, ד"ר אבי פולג



תיאור המשימה

בפני עמיר מוצג האתגר הבא: עליו להגיע מנקודה א' לנקודה ג' לפי הכללים הבאים:



1. לרשותו יעמדו 70 ₪ במטבעות של 10 ₪ בלבד. בדיוק בשעה 8⁰⁰ בבוקר הוא יתניע את מכוניתו בנקודה א' וייסע אל נקודה ב' דרך כביש a או דרך כביש b.
 2. בכביש a קיימים 7 קטעי נסיעה ו-7 מחסומים. מחיר המעבר בכל מחסום הוא 3 ₪. לפקיד במחסום מותר לתת עודף של מטבע אחת בלבד: 5 ₪ או שקל אחד, ולכן ייתכן שהתשלום ייצא גבוה מ-3 ₪. כל קטע נסיעה, כולל זמן המחסום שבסופו, נמשך 11 דקות.
 3. בכביש b קיימים 5 קטעי נסיעה ו-5 מחסומים. זמן הנסיעה בכל קטע, כולל זמן המחסום שבסופו, הוא 15 דקות. בכל מחסום יש לשלם 6 ₪, ולפקיד מותר להחזיר עד 3 מטבעות של 5 ₪ או של שקל אחד (הוא יכול להחזיר עודף שבו מטבעות משני הסוגים). גם כאן ייתכן שייצא תשלום גבוה מ-6 ₪.
 4. כאשר מגיעים לנקודה ב', שהיא תחנת רכבת, ישנן 2 אפשרויות:
 - לבחור ברכבת c היוצאת פעם בשעה, בשעות 06:30, 07:30, 08:30 ... זמן הנסיעה ברכבת זו 25 דקות ומחיר הנסיעה 30 ₪.
 - לבחור ברכבת d שזמני היציאות שלה אינם נתונים אך ידוע שההפרש ביניהם הוא בדיוק 20 דקות. אם למשל יוצאת רכבת בשעה 06:22 אז הרכבת הבאה יוצאת בשעה 06:42 וזו שאחריה יוצאת בשעה 07:02 וכך הלאה. אך כאמור, לא נתונים זמני היציאות של הרכבת (ייתכן אפילו שזמני היציאות הם לא בדקות עגולות). לעומת זאת, נתון שזמן הנסיעה ברכבת זו הוא 27 דקות ומחיר הנסיעה הוא 27 ₪.
- בסוף המשימה, כאשר יגיע עמיר לנקודה ג', יתבצע התגמול הבא:

- עמיר יחזיר תחילה את השקלים שנותרו לו מ-70 השקלים שניתנו לו בתחילה. על כל שקל שיחזיר יקבל 20 ₪.
- עבור כל דקה בה יקדים להגיע לפני השעה 10^{00} יקבל 100 ₪.
- עבור כל איחור של דקה אחרי 10^{00} ישלם 200 ₪.

שימו לב לתנאי נוסף:

לפני שעמיר יוצא למשימה עליו להחליט מראש באיזו מארבע הדרכים הבאות הוא בוחר: a-c או b-c או a-d או b-d.

שאלות

1. מה יהיה התגמול של עמיר אם יבחר את המסלול a-c?
 2. מה יהיה התגמול של עמיר אם יבחר את המסלול b-c?
- מסלולים a-d ו-b-d עושים שימוש ברכבת d שזמני הנסיעה המדויקים שלה אינם ידועים. מי שבחר במסלולים אלה תלוי גם במזל. במקרה הטוב ביותר מבחינתו, הוא יגיע לנקודה ב' בדיוק ברגע שרכבת d תגיע לשם, ויעלה עליה מיד. במקרה הגרוע ביותר, הוא יגיע לנקודה ב' בדיוק ברגע שרכבת d עזבה אותה ואז יאלץ להמתין לרכבת הבאה 20 דקות.
3. מה יהיה התגמול של עמיר אם יבחר את המסלול a-d ויתמזל מזלו, כלומר, רכבת d תגיע לנקודה ב' בדיוק באותו הזמן בו הוא יגיע לשם?
 4. מה יהיה התגמול של עמיר אם יבחר את המסלול a-d ולרוע מזלו יגיע לנקודה ב' בדיוק כשרכבת d עזבה את התחנה, ולכן יאלץ להמתין 20 דקות?
 5. מה יהיה התגמול של עמיר אם יבחר את המסלול b-d ויתמזל מזלו, כלומר, רכבת d תגיע לנקודה ב' בדיוק באותו הזמן בו הוא יגיע לשם?
 6. מה יהיה התגמול של עמיר אם יבחר את המסלול b-d ולרוע מזלו יגיע לנקודה ב' בדיוק כשרכבת d עזבה את התחנה, ולכן יאלץ להמתין 20 דקות?
 7. באיזו מארבע הדרכים הייתם ממליצים לעמיר לבחור?



שבילים למצוינות

מתמטיקה לכיתה ח
מטח

■ אופטימיזציה בחיי יומיום



אופטימיזציה בחיי יומיום

1 אמיר קונה בגדים

אמיר קיבל 310 ש"ח כדמי חנוכה. הוא החליט לקנות מספר מרבי של פריטי ביגוד – חולצות וסוודרים. מחיר כל חולצה הוא 15.90 ש"ח ומחיר כל סוודר 29.95 ש"ח.

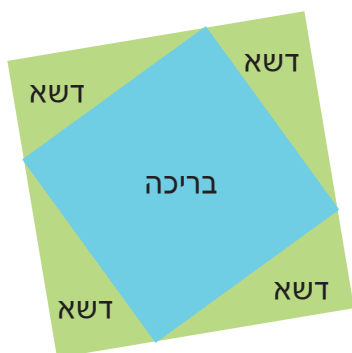
- א. אם אמיר מעוניין לנצל את הסכום שברשותו כך שישאר לו סכום כסף קטן ככל האפשר – כמה חולצות וכמה סוודרים כדאי לו לקנות?
- ב. אם אמיר מעוניין לנצל את הסכום שברשותו לקניית פריטים רבים ככל האפשר – כמה חולצות וכמה סוודרים כדאי לו לקנות?

 **לביצוע החישובים אפשר להיעזר בתוכנת excel .**

במצבים שונים בחיי היומיום עלינו לבחור מתוך מגוון רחב של אפשרויות את האפשרות האחת המתאימה ביותר לצרכינו השונים.
לבעיות מסוג זה ולתהליך מציאת האפשרות היעילה ביותר מתוך מגוון רחב של אפשרויות נהוג לקרוא **אופטימיזציה**.

3

תכנון בריכה



במועדון הספורט מתכננים לבנות בריכה על מגרש בצורת ריבוע שצלעו 100 מ'. הבריכה צריכה להיות ממוקמת על המגרש כמו שמתואר בתרשים שמשמאל. כל משולשי הדשא צריכים להיות חופפים זה לזה.

א. מהי צורתה של הבריכה? הסבירו.

ב. הציעו כמה אפשרויות שונות לתכנון הבריכה בהתאם לדרישות. לכל אפשרות שהצעתם חשבו את שטח הבריכה ואת שטח הדשא.

ג. שערו כיצד צריך לתכנן את הבריכה במסגרת הדרישות אם רוצים:

- 1 ששטח הבריכה יהיה הגדול ביותר האפשרי.
- 2 ששטח הדשא יהיה הגדול ביותר האפשרי.
- 3 ששטח הדשא יהיה גדול משטח הבריכה.

בסעיף ג בדקתם כמה אפשרויות לבחירת אורכי הצלעות של משולשי הדשא: חיבתם והשוויתם את שטחי הבריכה שיתקבלו במקרים השונים וכן את שטחי הדשא שיתקבלו. כדי לחקור באופן כללי יותר כיצד לתכנן את הבריכה לפי הדרישות והצרכים השונים, ניעזר בפונקציות.

ד. סמנו ב־ x (מטרים) את אורך הניצב הקצר במשולשי הדשא.

כתבו ביטויים לשתי פונקציות:

- פונקציה $f(x)$ המתארת את שטח הדשא בהתאם ל־ x .
- פונקציה $g(x)$ המתארת את שטח הבריכה בהתאם ל־ x .



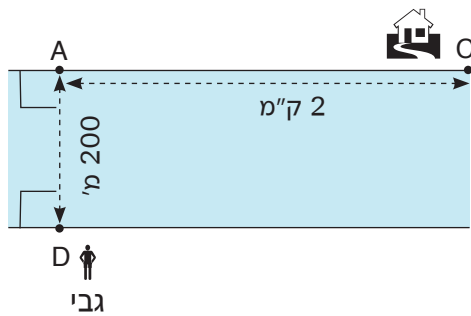
השתמשו ביישומון **הצגת פונקציות** מהילקוט הדיגיטלי חט"ב

(<http://juniorofek.cet.ac.il/units/he/math/unit202/act1.aspx>)

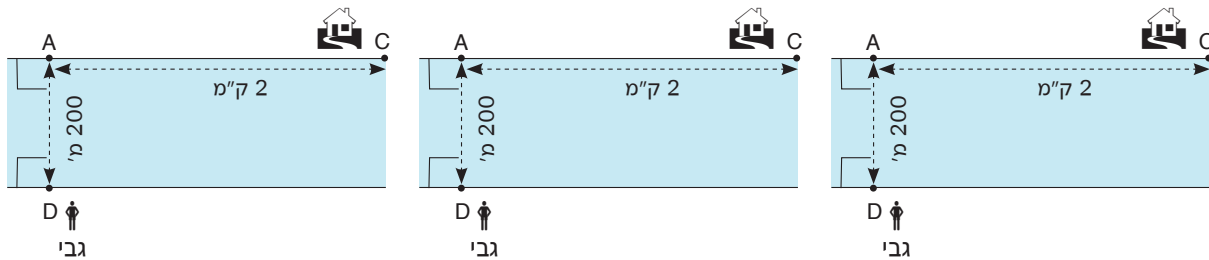
וענו שנית על השאלות שבסעיף ג.

בחירת מסלול

4



גבי נמצא על גדת אגם שרוחבו 200 מ' (בנקודה D בתרשים).
גבי מעוניין להגיע לביתו, שנמצא על הגדה
האחרת של האגם (נקודה C בתרשים), במרחק
של 2 ק"מ מהנקודה A. (הנקודה A נמצאת
בדיוק מול גבי מעבר לאגם - ראו תרשים).
הסירה של גבי שטה במהירות של 45 מטר לדקה.
מהירות ההליכה של גבי על היבשה היא 75 מטר לדקה.
א. סרטוט 3 דרכים שונות שבהן יכול גבי להגיע הביתה.
סמנו נקודה B בין A ל-C, במקום שבו גבי יורד מהסירה בכל אחת מהדרכים.



ב. באיזו דרך גבי ילך ברגל מרחק קטן ככל האפשר? היכן תהיה הנקודה B בדרך הזו?
באיזו דרך גבי ישוט מרחק קטן ככל האפשר? היכן תהיה הנקודה B בדרך הזו?
איזו דרך היא הקצרה ביותר? היכן תהיה הנקודה B בדרך הזו?
ג. גבי מעוניין להגיע הביתה מהר ככל האפשר. שער איזו דרך תהיה המהירה ביותר.

ד. בדקו כמה זמן תארך כל אחת מהדרכים האלה:

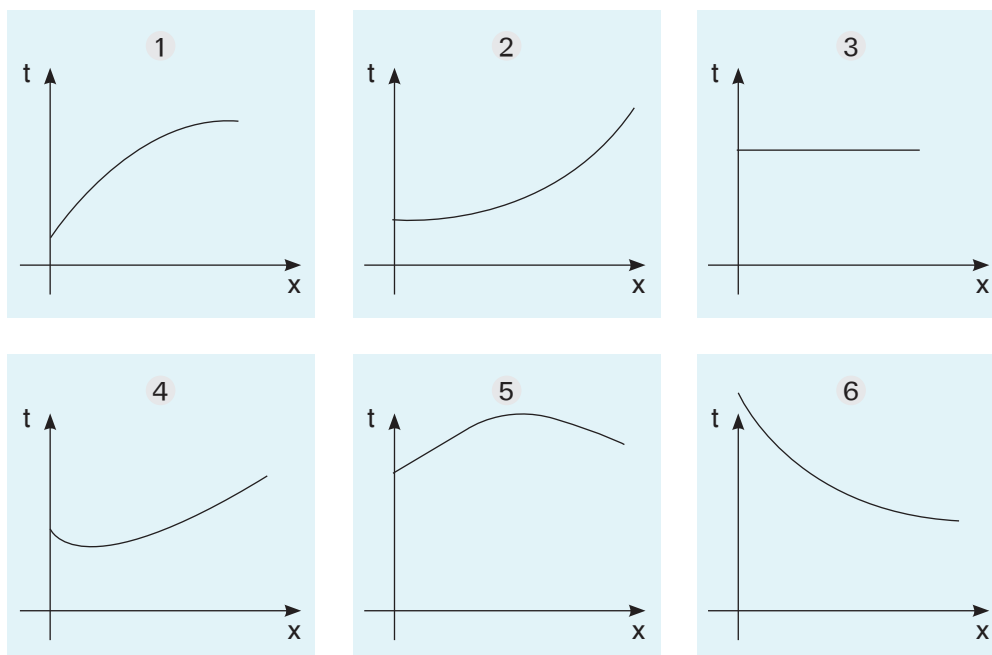
- 1 גבי ישוט עד לנקודה A ואחר כך ילך לאורך הגדה.
 - 2 גבי ישוט ישר הביתה.
 - 3 גבי ישוט עד אמצע הדרך בין A ל-C ואחר כך ילך לאורך הגדה עד הבית.
- איזו משלוש הדרכים תהיה המהירה ביותר? נסו למצוא דרך מהירה עוד יותר.

ה. נסמן ב-x (מטרים) את המרחק מהנקודה A עד לנקודה B (המקום שבו גבי ירד מהסירה).

- נסמן ב-t(x) (דקות) את הזמן שיידרש לגבי כדי להגיע לביתו.
 - לאיזו דרך של גבי מתאים הערך $x = 0$? והערך $x = 2000$?
 - האם קיים ערך כזה של הפונקציה? הסבירו.
- 1 $t(288.4)$ 2 $t(-2)$ 3 $t(5000)$

המשך

ו. איזה מהגרפים יכול להיות גרף הפונקציה $t(x)$?



ז. כתבו באמצעות x ביטויים מתאימים:

- 1 לאורך הדרך שגבי שט.
- 2 לאורך הדרך שגבי הלך ברגל.
- 3 לפרק הזמן שגבי שט.
- 4 לפרק הזמן שגבי הלך ברגל.
- 5 לפונקציה $t(x)$.



ח. השתמשו ביישומון **הצגת פונקציות** מהילקוט הדיגיטלי חט"ב

(<http://juniorofek.cet.ac.il/units/he/math/unit202/act1.aspx>)

- 1 סרטטו את גרף הפונקציה ובדקו אם הוא דומה לגרף שבחרתם בסעיף ו. (כדי לציין $\sqrt{x}$ במחשב יש לרשום $\text{sqrt}(x)$, ואם מחפשים שורש ריבועי של ביטוי אלגברי יש לרשום את הביטוי בתוך סוגריים במקום x).
- 2 העריכו כמה זמן תארך הדרך המהירה ביותר.
- 3 תארו את הדרך המהירה ביותר.

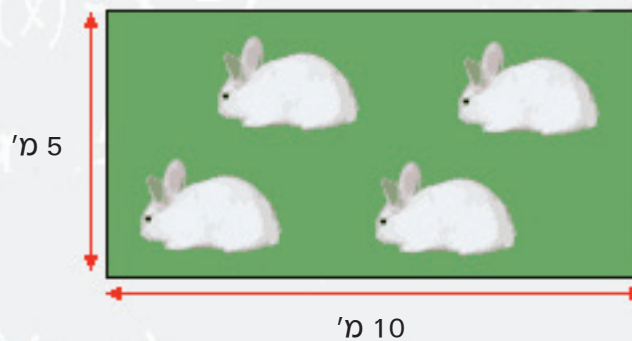


שטח לארנבים: בעיית אופטימיזציה

בתחומים רבים בחיים נתקלים בבעיות שבהן צריכים לבחור את האפשרות הטובה ביותר (האפשרות האופטימלית) מבין מגוון אפשרויות העומדות בפנינו. בעיות כאלה נקראות בעיות אופטימיזציה. במשימה זו תעסקו בבעיית אופטימיזציה הקשורה לגידור שטח.

1. גידור לארנבים

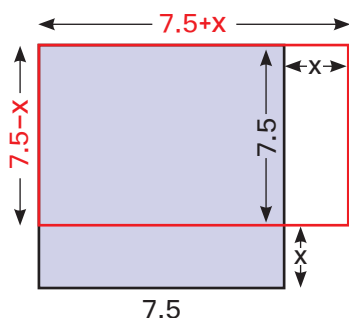
ליום הולדתה קיבלה רונית, שמשפחתה גרה במושב, ארנבים שתוכל לגדל. הוריה קנו סליל גדר באורך 30 מטר, כדי לגדר שטח בגינה שיהיה ביתם של הארנבים. אביה של רונית הציע את התכנית הבאה לבניית בית הארנבים:



על-פי תכנית זו, יהיה לארנבים שטח של 50 מ' מרובע.

בעזרת השרטוט הדינמי שתמצאו בקישור שלמעלה אפשר לתאר תכניות רבות לגידור שטח מלבני בעזרת גדר באורך נתון. על ידי הזזת הנקודה C אפשר לשנות את אורך הגדר, ועל ידי הזזת הנקודה B אפשר לשנות את תכנית-הגידור מבלי לשנות את אורך הגדר.

המשך



2. רון טוען שהשטח המלבני הגדול ביותר מתקבל

כאשר המלבן הוא ריבוע, כי אם מנסים להפוך את הריבוע למלבן בעל אותו היקף – השטח קטן.

בסרטוט שלפניכם כל האורכים נתונים במטרים.

א. הראו שהיקף המלבן האדום שווה להיקף הריבוע הסגול.

ב. הראו ששטח המלבן האדום קטן משטח הריבוע הסגול.

ג. האם אפשר להסיק מהסעיפים הקודמים, שמבין כל המלבנים

שהיקפם 30 מ' – הריבוע (שצלעו 7.5 מ') הוא בעל השטח הגדול ביותר?



3. המשימה נמצאת בילקוט הדיגיטלי חט"ב

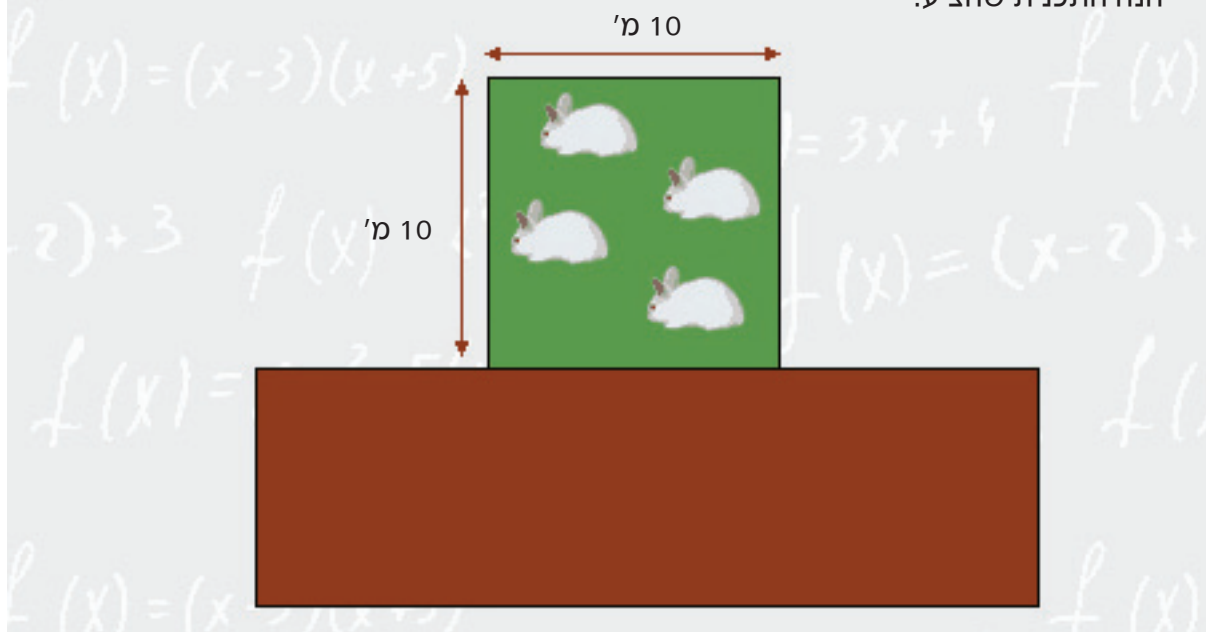
(<http://www.cet.ac.il/math/function/square/multi/multi6.htm>)

שטח לארנבים: בעיית אופטימיזציה

2. ההצעה של עמרי

עמרי, אחיה של רונית, העלה את ההצעה הבאה: אפשר להשתמש באחד הקירות של המחסן הגדול העומד בחצר בתור צלע לבית הארנבים, וכך לא יהיה צורך לגדר את אחת הצלעות.

הנה התכנית שהציע:



הסרטוט הדינמי שתמצאו בקישור שלמעלה מאפשר לתאר תכניות שונות לגידור, המשתמשות ברעיון של עמרי.



הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

עקרון שובר היונים

תכנית המצוינות במתמטיקה

הטכניון



כל הזכויות שמורות

חיפה

יולי, 2012

עקרון שובר היונים

תכנית המצוינות במתמטיקה

הטכניון

ראש התכנית וייעוץ מדעי ופדגוגי

פרופ' אורית זסלבסקי

מנהלת התכנית

ד"ר איריס זודיק

צוות הפיתוח

אירינה גורביץ', ד"ר איריס זודיק, ד"ר עליזה מלק

ייעוץ מתמטי

ד"ר עליזה מלק

חלק מהבעיות בפרק הזה חוברו בהשראת בעיות המופיעות בחוברות "משימות לפיתוח חשיבה מתמטית", שפותחו במסגרת פרויקט "טל"מ – הטכניון לעידוד המתמטיקה"

עקרון שובר היונים

מבוא

פרק זה עוסק בפתרון בעיות מתמטיות. הבעיות שונות מבחינת הנושאים המתמטיים והשאלות שהן כוללות. חלק מהבעיות ניתן לפתור בדרכים שונות, אולם בכל זאת יש משהו משותף לכולן. מטרת הפרק היא ללמוד על המשותף ביניהן, ובאמצעותן ללמוד על עקרון מתמטי פשוט, שבאופן מפתיע מסייע לפתרון בעיות לגמרי לא פשוטות.

בעיה 1

בשקית אטומה שמים גרביים כחולות ואדומות. בכל פעם מוציאים מן השקית גרב אחד ואי אפשר לראות את צבע הגרב שמוציאים.

- א. כמה גרביים חייבים להוציא כדי להבטיח שנקבל זוג תואם?
- ב. האם יש חשיבות למספר הגרביים שיש מכל צבע?

נסו להסביר את תשובותיכם בדרכים שונות.

בעיה 2

נרחיב במקצת את בעיה 1:

בשקית אטומה שמים גרביים כחולות, אדומות, ירוקות ולבנות. בכל פעם מוציאים מן השקית גרב אחד ואי אפשר לראות את צבע הגרב שמוציאים.

- א. כמה גרביים חייבים להוציא כדי להבטיח שנקבל זוג תואם? הסבירו.
- ב. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף א' אם בשקית יהיו בנוסף, גם גרביים שחורות? הסבירו.
- ג. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ב' אם יש בשקית בדיוק 4 גרביים מכל צבע? הסבירו.
- ד. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ג' אם יש בשקית בדיוק 5 גרביים מכל צבע? הסבירו.
- ה. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ד' אם יש בשקית: 3 גרביים כחולות, 4 אדומות, 7 ירוקות, 2 לבנות ו- 10 שחורות? הסבירו.
- ו. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ה' אם יש בשקית: 3 גרביים כחולות, 4 אדומות, 7 ירוקות, 2 לבנות ורק אחת שחורה? הסבירו.
- ז. נסו להכליל את הבעיה ולמצוא לה פתרון כללי. הסבירו.

בעיה 3

לסבתא יש שמונה נכדים. כל נכד מבקר אותה פעם אחת בשבוע בשעה 16:00.

- א. האם ייתכן שבמשך שבוע אף שני נכדים לא ייפגשו אצל סבתא? הסבירו.
- ב. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף א' אם לסבתא היו 10 נכדים? 7 נכדים? 5 נכדים? הסבירו.
- ג. מהו המספר המינימלי של נכדים שצריכים להיות לסבתא, כדי להבטיח שבכל שבוע לפחות שניים מהם ייפגשו אצל סבתא? הסבירו.

בעיה 4

נרחיב במקצת את בעיה 3:

לסבתא יש שמונה נכדים. נניח כי כל נכד מבקר אותה פעם אחת בשבוע; חלק מהנכדים באים בבוקר בשעה 10:00 וחלקם באים בערב בשעה 18:00.

- האם בכל שבוע בהכרח יהיו שני נכדים שייפגשו אצל סבתא? הסבירו.
- כיצד תשתנה התשובה לסעיף א' אם לסבתא היו 10 נכדים? 20 נכדים? הסבירו.
- מהו המספר המינימלי של נכדים שצריכים להיות לסבתא, כדי להבטיח שבכל שבוע לפחות שניים מהם ייפגשו אצלה? הסבירו.
- נסו להכליל את הבעיה ולמצוא לה פתרון כללי. הסבירו.

במבט לאחור

חזרו לבעיות 1-4 שפתרתם.

- נסו למצוא דמיון ושוני בין משפחת הבעיות 1 ו-2 לבין משפחת הבעיות 3 ו-4. הסבירו.
- נסו לחבר בעיות משלכם, שניתן לפתור בדרכים דומות.

מה אומר עקרון שובר היונים?

כדי לפתור בעיות כמו בעיות 1-4 ניתן להיעזר בעקרון מתמטי פשוט הנקרא: **עקרון שובר היונים**.

עקרון שובר היונים קובע כי אם יש m תאים בשובר שלתוכם מכניסים $m+1$ יונים, אז בהכרח קיים תא שבו תימצאנה לפחות שתי יונים.

עקרון זה, שנראה פשוט למדי, נקרא גם עקרון המגירות או עקרון דיריכלה.

עקרון שובר היונים, ככל הנראה, נוסח לראשונה באופן פורמלי על ידי מתמטיקאי בשם יוהאן גוסטב לז'ן דיריכלה (le jeune de Richelet) בשנת 1834, ומכאן שמו הנוסף - **עקרון דיריכלה**.

דיריכלה נולד בשנת 1805 בעיר הבלגית ריכלה ומכאן שמו. כבר בגיל 12 התעניין דיריכלה הצעיר במתמטיקה וקנה בדמי הכיס שלו ספרי מתמטיקה. הוא הצטיין בבית הספר במתמטיקה ובהסטוריה. לאחר שסיים את בית הספר התיכון בגיל 16, למד באוניברסיטה בפריז עם מיטב המתמטיקאים בדורו, תוך שהוא גובר בהצלחה על מחלת האבעבועות השחורות. מאוחר יותר עבר לאוניברסיטאות שונות בגרמניה, שם גילה חידושים בתחומים רבים במתמטיקה ובפיזיקה. אף שתרם רבות לפתרון החידה המתמטית הידועה בשם משפט פֶרְמָה, הוא ידוע הרבה יותר בזכות עקרון דיריכלה.

אפשר לנסח את עקרון שובר היונים בעוד דרכים, למשל:

אם יש m תאים שלתוכם מכניסים יותר מ- m יונים, חייב להיות תא שמספר היונים בו גדול מאחד.

עקרון שובר היונים

תכנית המצוינות במתמטיקה, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

שאלות למחשבה:

- אם מכניסים $m+1$ יונים לתוך m תאים בשובר, האם ייתכן שיהיו שני תאים שיש בכל אחד מהם יותר מיונה אחת?
- אם מכניסים $m+1$ יונים לתוך m תאים בשובר, האם ייתכן שיהיו שלושה תאים שיש בכל אחד מהם יותר מיונה אחת?

נתבונן בדוגמה הבאה:

נניח כי בשובר שלנו יש 10 תאים, ויש לנו 11 יונים. יש לנו הרבה אפשרויות להכניס את היונים לתאים שבשובר. להלן כמה מקרים אפשריים לסידור היונים בשובר. לגבי כל אחד מהמקרים, בדקו אם אמנם יש לפחות תא אחד שבו לפחות שתי יונים.

מקרה 1 – תא אחד ריק שאין בו אף יונה, שישה תאים עם יונה אחת, ושני תאים שבכל אחד שתי יונים:



מקרה 2 – שלושה תאים ריקים, שלושה תאים עם יונה אחת וארבעה תאים שבכל אחד שתי יונים:



מקרה 3 - חמישה תאים ריקים, שני תאים עם יונה אחת ושלושה תאים שבכל אחד שלוש יונים:



עקרון שובר היונים

תכנית המצוינות במתמטיקה, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

מקרה 4 - תשעה תאים עם יונה אחת, ותא אחד עם שתי יונים:



כמובן שיש עוד אפשרויות רבות נוספות (מצאו עוד).

נשאלת השאלה: מה משותף לכל הסידורים הנ"ל ולכל אלה שעוד ניתן לעשות ולא הובאו כאן? התשובה לכך היא, שבכל סידור אפשרי, תמיד קיים תא שבו יותר מיונה אחת, או במילים אחרות – תמיד יימצא לפחות תא אחד שיש בו לפחות שתי יונים. גם אם ננסה "לפזר" את היונים בכמה שיותר תאים (כמו במקרה 4), עדין יימצא תא אחד שבו יש שתי יונים, שכן מספר התאים קטן ממספר היונים.

בחזרה לבעיות שפתרנו:

חזרו שוב לבעיות 1-4 ונסו לפתור אותן באמצעות עקרון שובך היונים. כדי לפתור את הבעיות באמצעות עקרון זה, יש צורך לזהות איזה נתון מנתוני השאלה כדאי להציג ע"י התאים בשובך ואיזה ע"י היונים.

נדגים זאת באמצעות בעיה 1:

בבעיה מופיעים שני צבעים, לכן בשובך (הדמיוני) שלנו יש שני תאים: האחד ייקרא "אדום" והשני ייקרא "כחול". עתה נוציא גרביים, וכל גרב נכניס לתא המתאים לפי הצבע שלה, לכן היונים במקרה זה הן הגרביים. נוציא את הגרב הראשונה. נניח שהיא אדומה, ולכן נכניס אותה לתא ה"אדום". עתה יש תא אחד ריק ותא אחד עם גרב אחת. נוציא גרב נוספת. אם גם היא אדומה הרי שבתא האדום יהיו עתה שתי גרביים, כלומר קיבלנו זוג תואם (במקרה זה – אדום) ובכך סיימנו.

אך ייתכן והגרב השנייה שנוציא תהייה כחולה. במקרה זה אחרי ההוצאה השנייה תהיה גרב אחת בתא האדום וגרב אחת בתא הכחול וטרם קיבלנו זוג תואם. כלומר, לא מספיק להוציא שתי גרביים כדי להבטיח שנקבל זוג תואם. אבל כעת, כשנוציא את הגרב השלישית, היא בהכרח תיכנס או לתא הכחול או לתא האדום. כלומר, באחד מהם נקבל שתי גרביים (באותו הצבע).

כלומר, כדי להבטיח שנקבל זוג גרביים מאותו הצבע עלינו להוציא 3 גרביים (ב-1 יותר ממספר התאים שיש לנו).

נסכם את הקשר בין פתרון זה לעקרון שובך היונים:

אם ברצוננו להבטיח שיהיה תא אחד עם שתי גרביים (לקבלת זוג תואם), על פי עקרון שובך היונים, עלינו לדאוג שמספר הגרביים שנוציא (היונים) יהיה גדול ממספר הצבעים השונים של הגרביים (מספר התאים בשובך). המספר המינימלי של גרביים שיש להוציא (מספר היונים) כדי להבטיח זאת גדול בדיוק ב-1 ממספר הצבעים השונים של הגרביים (התאים בשובך).

עקרון שובך היונים

תכנית המציאות במתמטיקה, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

יישומים לעקרונ שובר היונים

בעיה 5

כאשר הביאו לגן חיות 21 יונים התברר שבשובך שבגן החיות יש רק 20 תאים ריקים. הכניסו את כל 21 היונים לתאים. האם אפשר להסיק בוודאות כי:

- א. קיים תא שבו יש בדיוק שתי יונים? הסבירו.
- ב. קיים תא שבו יש לפחות שתי יונים? הסבירו.
- ג. קיים בדיוק תא אחד שבו יש לפחות שתי יונים? הסבירו.
- ד. לא נשארו תאים ריקים? הסבירו.

בעיה 6

גילה קנתה קופסת עוגיות כדי לכבד את חבריה במסיבה שערכה. כשפתחה את הקופסה, התברר שיש בה 49 עוגיות. במסיבה השתתפו 8 חברים, ובמהלכה אכלו את כל העוגיות.

- א. האם יתכן שכל אחד מהחברים אכל פחות מ-6 עוגיות? הסבירו.
- ב. האם יתכן שכל אחד מהחברים אכל פחות מ-7 עוגיות? הסבירו.
- ג. האם יתכן שכל אחד מהחברים אכל פחות מ-8 עוגיות? הסבירו.

בעיה 7

בטבלה ריבועית של 4×4 משבצות, בכל משבצת רשום מספר אחד מהמספרים: 1, 0, -1. מחשבים לכל שורה את סכום המספרים בשורה, לכל עמודה את סכום המספרים בעמודה, ולכל אלכסון את סכום המספרים באלכסון.

- א. מהן כל התוצאות שיכולות להתקבל כשמחשבים את הסכומים הללו? כמה תוצאות אפשריות יש? הסבירו.
- ב. האם יתכן שמבין התוצאות שמתקבלות בפועל, אף שתיים אינן זהות? הסבירו.
- ג. ענו על סעיפים א' ו-ב' עבור טבלה ריבועית של 5×5 משבצות וכן עבור טבלה ריבועית של 8×8 משבצות.
- ד. חברו בעיות דומות עבור טבלאות ריבועיות בגדלים שונים, פתרו אותן ונסו להכליל.

עקרון שובר היונים ותכונות של מספרים טבעיים

בעיה 8

רשמו 12 מספרים דו-ספרתיים שונים. חשבו לכל מספר את השארית שלו בחילוק ב-11. קבצו את המספרים לפי שאריות החילוק ב-11 (למשל, המספרים 59 ו-37 שייכים לאותה הקבוצה, כי יש להם אותה השארית בחילוק ב-11).

- א. האם בין המספרים שרשמתם יש שניים שההפרש ביניהם הוא מספר דו-ספרתי ששתי הספרות שלו זהות? (למשל, אם רשמתם את 37 ו-59, אזי ההפרש ביניהם הוא 22, וההפרש אכן מקיים את הדרישה).
- ב. רשמו 12 מספרים דו-ספרתיים אחרים, שששונים זה מזה ואינם זהים למספרים הקודמים שבחרתם. האם בין המספרים החדשים שרשמתם קיים זוג מספרים שההפרש ביניהם הוא מספר דו-ספרתי שספרותיו זהות?

עקרון שובר היונים

תכנית המציגות במתמטיקה, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

ג. האם הממצאים שקיבלתם בסעיפים א' ו- ב' הם מקריים? נסו להכליל את ממצאיכם ולהוכיח (או להפריך) את נכונות ההכללות שלכם.

בעיה 9

נתונים 10 מספרים טבעיים כלשהם.

- מה יכולה להיות השארית שכל אחד מהם נותן כאשר מחלקים אותו ב-9?
- ניח כי שני מספרים נותנים את אותה שארית כאשר מחלקים אותם ב-9. מה ניתן לומר על ההפרש של שני המספרים האלה? הסבירו.
- הראו כי בין כל 10 מספרים שנבחר, קיימים לפחות שניים שהפרשם מתחלק ב-9.
- מה הקשר בין הבעיה הזאת והבעיה הקודמת (בעיה 8)? הסבירו.
- הראו שבין כל 125 מספרים טבעיים, קיימים לפחות שניים שהפרשם מתחלק ב-124.
- הציעו בעיות נוספות הדומות לבעיות 8 ו-9, פתרו אותן, ונסו להכליל.
- הוכיחו את הטענה הבאה:

טענה 1 (על ההתחלקות של הפרש מספרים שלמים):

בין כל k מספרים שלמים, תמיד אפשר למצוא שני מספרים שהפרשם מתחלק ב- $(k-1)$.

בעיה 10

נתונה קבוצה של 7 מספרים שונים המורכבים רק מהספרה 1:

$$\{1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111\}$$

- חסרו שני מספרים כלשהם מהקבוצה (חסרו את המספר הקטן מהמספר הגדול). חזרו ובצעו פעולה זו על מספר זוגות של מספרים מהקבוצה ובדקו מה מאפיין את ההפרשים האלה.
- הראו שניתן למצוא מספר המורכב מהספרות 0 ו-1 בלבד שמתחלק ב-6.
- הראו כי לכל מספר טבעי n , אפשר למצוא מספר טבעי המורכב רק מהספרות 0 ו-1, שמתחלק ב- n .

עקרון שובר היונים ומרחק בין נקודות

בעיה 11

מה המרחק הגדול ביותר האפשרי בין שתי נקודות הנמצאות בתוך ריבוע נתון או על היקפו? שאלה זו תסייע בפתרון הבעיה הבאה (12). ננסה להשיב עליה באמצעות הסעיפים הבאים.

נתון ריבוע שאורך צלעו 1 מ'.

- מה המרחק הגדול ביותר האפשרי בין שני קדקודים של הריבוע? הסבירו.
- הראו שהמרחק בין אחד הקדקודים של הריבוע לנקודה כלשהי על היקפו קטן מאורך האלכסון של הריבוע.
- הראו שהמרחק בין שתי נקודות כלשהן על היקף הריבוע קטן מאורך האלכסון של הריבוע.

עקרון שובר היונים

תכנית המציגת במתמטיקה, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

- ד. הראו שהמרחק בין נקודה בתוך הריבוע לבין כל נקודה על היקף הריבוע קטן מאורך האלכסון של הריבוע.
- ה. הראו שהמרחק בין שתי נקודות בתוך הריבוע קטן מאורך האלכסון של הריבוע.
- ו. מהו המרחק המקסימלי בין שתי נקודות הנמצאות בתוך ריבוע או על היקפו, אם אורך הצלע של הריבוע הוא 2 מטר? היכן נמצאות הנקודות שהמרחק ביניהן הוא מקסימלי? הסבירו.
- ז. מהו המרחק המקסימלי בין שתי נקודות הנמצאות בתוך ריבוע או על היקפו, אם אורך הצלע של הריבוע הוא 3 ס"מ? $\frac{1}{2}$ ס"מ? a ס"מ ($a > 0$)?

בעיה 12

- א. על חלון ריבועי שאורך צלעו 1 מ' נעים 5 חרקים. הראו שבכל רגע נתון יש לפחות זוג אחד של חרקים שהמרחק ביניהם קטן מ- 75 ס"מ. (באזור מודגמים שני מצבים אפשריים על החלון).



הדרכה: נתייחס לחרקים כאל נקודות. אפשר לחלק את הריבוע הנתון למספר ריבועים חופפים וליישם את עקרון שובר היונים יחד עם המסקנות מהבעיה הקודמת. לכמה ריבועים חופפים כדאי, לדעתכם, לחלק את הריבוע הנתון? למה דוקא לריבועים חופפים ולא למלבנים חופפים (או צורות אחרות שחופפות)? למעשה, אפשר לטעון טענה חזקה יותר – שהמרחק אינו גדול מ- $\frac{\sqrt{2}}{2}$ מ'.

- ב. על חלון ריבועי שאורך צלעו 1 מ' נעים 10 חרקים. הראו שבכל רגע נתון יש לפחות זוג אחד של חרקים שהמרחק ביניהם קטן מ- 50 ס"מ.
- ג. הציעו בעיה דומה עבור 17 חרקים ופתרו אותה.
- ד. הציעו בעיה דומה עבור 26 חרקים ופתרו אותה.
- ה. כמה נקודות יש למקם בתוך ריבוע שאורך צלעו 1 מטר, כדי להבטיח שיהיה זוג נקודות כך שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר $\frac{\sqrt{2}}{4}$ מ'? $\frac{\sqrt{2}}{5}$ מ'? $\frac{\sqrt{2}}{n}$ מ' (כאשר n מספר טבעי כלשהו)? הסבירו.

בעיה 13

- מה המרחק הגדול ביותר האפשרי בין שתי נקודות הנמצאות בתוך משולש שווה צלעות או על היקפו, אם אורך הצלע של המשולש הוא 1 מ'? 4 ס"מ? $\frac{1}{2}$ מ'? a ס"מ (כאשר $a > 0$)? הסבירו.

בעיה 14

א. בתוך משולש שווה צלעות שאורך צלעו 1 מ' ממוקמות 5 נקודות. הראו שיש לפחות זוג אחד של נקודות שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר $\frac{1}{2}$ מ'.

הדרכה: התבוננו בהדרכה לבעיה 12 והתאימו אותה לתנאי הבעיה הזאת.

ב. בתוך משולש שווה צלעות בעל צלע באורך 1 מ' ממוקמות 10 נקודות. הראו שיש לפחות זוג אחד של נקודות שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר $\frac{1}{3}$ מ'.

ג. כמה נקודות יש למקם בתוך אותו משולש כדי להבטיח שיהיה זוג נקודות כך שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר $\frac{1}{4}$ מ'? $\frac{1}{5}$ מ'? $\frac{1}{n}$ מ' (כאשר n מספר טבעי כלשהו)? הסבירו.

הרחבה של עקרון שובך היונים

בעיה 15

א. מכניסים 20 יונים לשובך שבו 6 תאים. האם אפשר להסיק בוודאות שיש תא שבו יותר מיונה אחת? האם אפשר להסיק שיש תא שבו יותר משתי יונים? האם אפשר להסיק בוודאות שיש תא שבו יותר מארבע יונים? הסבירו תשובותיכם.

ב. מה מספר היונים המינימלי שיש להכניס לשובך שבו 6 תאים, כדי להבטיח שיהיה תא שבו יותר מיונה אחת? יותר משתי יונים? יותר משלש יונים? יותר מארבע יונים? יותר מחמש יונים?

ג. בדקו בעיות דומות עבור 21 יונים ו-5 תאים, או 24 יונים ו-7 תאים.

ד. נסו להכליל.

בבעיה 15 ראינו שאם יש 6 תאים בשובך, וצריך להכניס לתוכם 20 יונים, אפשר להשיב על השאלות שנשאלו בעזרת הקשר הבא בין מספר התאים למספר היונים: $20 = 6 \times 3 + 2$.

מההצגה הזאת של מספר היונים, אפשר להסביר איך ניתן להכניס אותן לתאים.

דרך אחת היא קודם להכניס 18 (כלומר, 6×3) יונים לתאים. אם נכניס מספר שווה לכל תא, נקבל 3 יונים בכל תא, ואז כשנכניס את 2 היונים שנותרו, בהכרח נגדיל את מספר היונים באיזשהו תא, כלומר, יתקבל לפחות תא אחד עם יותר מ-3 יונים. לכן אפשר לומר בבטחון שיהיה תא עם 4 יונים או יותר.

לעומת זאת, אם נכניס את 18 היונים הראשונות לתאים באופן שיהיה תא שבו פחות מ-3 יונים, הרי שחייב להיות תא שבו יותר מ-3 יונים, עוד לפני שהכנסנו את 2 היונים הנותרות.

לכן בכל מקרה, אפשר להסיק בוודאות שיהיה תא שבו 4 יונים לפחות. לעומת זאת, לא מובטח שיהיה תא שבו 5 יונים. מדוע?

עקרון שובך היונים

תכנית המצוינות במתמטיקה, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

עקרון שובר היונים המוכלל

אם יש m תאים בשובר, ואם יש יותר מאשר $m \cdot k$ יונים שצריך להכניס לתאים (כאשר k מספר טבעי), אז יהיה לפחות תא אחד שיהיו בו יותר מאשר k יונים.

בדקו מה קורה כאשר $k = 1$. מה הקשר לעקרון שובר היונים שהכרתם בתחילת הפרק?
חזרו לבעיה 15 והשיבו עליה בהתאמה לעקרון שובר היונים המוכלל.

יישומים לעקרון שובר היונים המוכלל

בעיה 16

קבוצה של 12 תלמידים יצאה לנטוע עצים. סה"כ נטעו 75 עצים.

הראו באמצעות עקרון שובר היונים המוכלל כי יש תלמיד שנטע לפחות 7 עצים.

הדרכה: נתייחס לתלמידים כאל תאים בשובר, ולעצים כאל יונים שמכניסים לתאים. לפי נתוני הבעיה, יש $75 = 12 \times 6 + 3$ עצים ו-12 תלמידים.

בעיה 17

בשקית אטומה יש 18 סוכריות בטעם מנטה, 15 סוכריות בטעם לימון, ו-10 סוכריות בטעם תות. דני, יוסי ויעל רוצים לאכול סוכריה באותו הטעם.

- כמה סוכריות מספיק להוציא כדי להבטיח שכולם יקבלו סוכריה באותו הטעם? הסבירו.
- אם עתה נטע הצטרפה אליהם, כמה סוכריות מספיק להוציא כדי להבטיח שכולם יקבלו סוכריה מאותו הטעם? הסבירו.
- הציעו בעיות דומות שבהן מספר הטעמים משתנה ומספר הילדים משתנה ופתרו אותן.
- נסו להכליל. הסבירו.

בעיה 18

בכיתה יש 40 תלמידים.

- היתכן כי אף שניים לא נולדו באותו חודש? הסבירו.
- היתכן כי אף שלושה לא נולדו באותו חודש? הסבירו.
- היתכן כי אף ארבעה לא נולדו באותו חודש? הסבירו.
- היתכן כי יש חודש אחד שבו לא נולד אף תלמיד מהכיתה? הסבירו.
- מהו המספר המינימלי של תלמידים שצריכים להיות בכיתה, כדי להבטיח שקיים לפחות חודש אחד שבו נולדו יותר מ-4 תלמידים? הסבירו.
- הראו כיצד מיושם עקרון שובר היונים המוכלל בפתרון הבעיה הזאת.

בעיה 19

ידוע כי מספר השערות על ראשו של כל אדם הוא לכל היותר 300,000. במחוז תל-אביב גרים יותר ממיליון בני אדם.

- א. האם אפשר להסיק בוודאות שבמחוז תל-אביב יש 4 אנשים שיש להם מספר שווה של שערות על ראשם? הסבירו.
- ב. מהו המספר המינימלי של תושבים שצריכים להתגורר במחוז מסוים כדי להבטיח שיהיו 4 תושבים עם אותו מספר שערות על הראש? הסבירו.
- ג. מהו המספר המינימלי של תושבים שצריכים להתגורר במחוז מסוים כדי להבטיח שיהיו 5 תושבים עם אותו מספר שערות על הראש? הסבירו.
- ד. העלו שאלות דומות, פתרו, והכלילו.

בעיה 20

- א. רשמו 10 מספרים, שלא כולם שווים, וחשבו את הממוצע החשבוני שלהם.
- ב. מצאו בין המספרים שרשמתם מספר שגדול מהממוצע ומספר שקטן מהממוצע.
- ג. חזרו על סעיפים א' ו-ב' עבור 10 מספרים אחרים שלא כולם שווים, וכן עבור 15 מספרים שלא כולם שווים.
- ד. נסו להכליל את ממצאיכם ולהסביר.
- ה. במה דומה ההסבר בסעיף ד' לעקרון המוכלל של שובר היונים?
- ו. הצדיקו את הטענה הבאה:

טענה 2 (עקרון הממוצע):

בכל קבוצת מספרים שלא כולם שווים, קיים מספר שגדול מהממוצע החשבוני של כל המספרים בקבוצה וקיים מספר שקטן מהממוצע החשבוני של כל המספרים בקבוצה.

נקודות למחשבה:

- אמנם טענה 2 נכונה לכל קבוצה של מספרים, אבל בהקשר של עקרון שובר היונים, מספיק להתייחס לקבוצות של מספרים טבעיים, מאחר ועקרון שובר היונים עוסק במקרים שבהם יש מספר (טבעי) של תאים ומספר (טבעי) של יונים.
- הקשר בין עקרון שובר היונים המוכלל לעקרון הממוצע הוא עקיף – נסו למצוא קשר בין דרכי ההצדקה של שני העקרונות הללו.

בעיה 21

בכיתה 41 תלמידים. יוסי עשה 13 טעויות במבחן ושאר התלמידים שגו פחות ממנו. הראו כי לפחות ארבעה תלמידים עשו אותו מספר של טעויות. הסבירו בעזרת עקרון שובר היונים המוכלל ובעזרת עקרון הממוצע.

בעיה 22

לרוני יש 70 קוביות כך שכל אחת מהן צבועה בצבע מסוים. מספר הצבעים שבהם השתמשו לצביעת הקוביות קטן מ-10. הראו שבין הקוביות של רוני אפשר למצוא 8 קוביות הצבועות באותו הצבע.

עקרון שובר היונים

תכנית המציגה במתמטיקה, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

בעיות נוספות

פתרו כל אחת מהבעיות כפי שעולה בדעתכם, ובמידת האפשר בדרכים שונות. לכל אחת, מצאו דרך לפתור אותה גם לפי עקרון שובך היונים (הרגיל או המוכלל). הסבירו וצינו מה משמש כ"תא" ומה כ"יונה".

בעיה 23

במשחק שח-מט (לוח משבצות שחור ולבן בגודל 8×8), צריח יכול לנוע על הלוח בקו ישר ימינה או שמאלה או למעלה או למטה. אין הגבלה על אורך הקפיצה של הצריח (כלומר, על מספר המשבצות שיעבור במהלך אחד). צריח א' "מאיים" על צריח ב' אם צריח ב' עומד בנתיב שלו. כמה צריחים לכל היותר ניתן להניח בו זמנית על לוח השח-מט, כך שאף אחד לא יאיים על השני?

בעיה 24

בארון הנעליים יש נעליים אדומות, נעליים לבנות ונעליים שחורות. מכל נעל יש שני דגמים: עם שרוכים ובלי שרוכים. מבלי להסתכל לתוך הארון, ומבלי לראות את הנעליים שמוציאים – כמה נעליים יש להוציא מהארון כדי להבטיח שנוציא לפחות זוג תואם אחד?

בעיה 25

א. בבית ספר נווה-שלום יש 500 תלמידים. האם אפשר להסיק בוודאות כי יש לפחות שני תלמידים שיום הולדתם חל באותו היום? הסבירו.
ב. בבית ספר מעוז-צדק יש 350 תלמידים. האם אפשר להסיק בוודאות כי יש לפחות שני תלמידים שיום הולדתם חל באותו היום? הסבירו.
ג. מהו המספר המינימלי של תלמידים שצריכים להיות בבית ספר, כדי שנוכל להסיק בוודאות כי יש לפחות שני תלמידים שיום הולדתם חל באותו היום? הסבירו.

בעיה 26

קבוצה של 11 תלמידים יצאה לנטוע עצים. סך הכל נטעו 67 עצים.
א. הראו באמצעות עקרון הממוצע כי יש תלמיד שנטע לפחות 7 עצים.
ב. השוו לפתרון של בעיה 16.
ג. חברו בעיות אחרות שניתן לפתור בדרך דומה.

בעיה 27

נתונה קוביה שפאותיה ממוספרות עם המספרים 1 עד 6 (לא בהכרח המספור החוקי של קוביה). הראו שבכל מספור אפשרי של הקוביה עם מספרים אלה, תמיד יימצאו שני מספרים עוקבים בעלי צלע משותפת.

בעיה 28

נתבונן במספרים $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. בוחרים שישה מספרים כלשהם מהקבוצה. הראו שבכל בחירה כזו, תמיד קיים זוג מספרים שסכומם 9.

בעיה 29

הראו שבכל 100 שנים רצופות קיימות לפחות 15 שנים שבהן ה-1 בינואר חל באותו היום בשבוע.

בעיה 30

הראו שבכל קבוצה בת 50 אנשים יש לפחות 8 אנשים שהפרש הגילים שלהם מתחלק ב-7.

בעיה 31

הראו כי בין כל 2000 מספרים טבעיים שונים, קיימים שניים שהפרשם מתחלק ב-1999.

בעיה 32

הוכיחו שקיימים שני מספרים טבעיים שונים a, b כך ש- $2^a - 2^b$ מתחלק ב-57. כיצד אפשר להכליל בעיה זו?

הדרכה: כמה מספרים שונים מהצורה 2^k קיימים עבור ערכים טבעיים שונים של k ? לפתרון הבעיה אפשר להיעזר בטענה 1, על התחלקות של הפרש מספרים טבעיים.

בעיה 33

נתונים 12 מספרים שונים מהקבוצה $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$. הראו כי קיימים ביניהם שני מספרים שהפרשם הוא מספר דו ספרתי המורכב משתי ספרות שונות. הסבירו.

בעיה 34

במסיבה השתתפו 20 אנשים.

א. האם במסיבה יש לפחות שני אנשים שיש להם אותו מספר ידידים (שימו לב כי "ידידות" היא תכונה הדדית כלומר אם אדם א' הוא ידיד של אדם ב' אז אדם ב' הוא ידיד של אדם א')? הסבירו.

ב. האם, ואם כן כיצד תשתנה התשובה לסעיף א', אם במסיבה השתתפו 35 אנשים? הסבירו.

ג. האם, ואם כן כיצד תשתנה התשובה לסעיף א', אם במסיבה השתתפו n אנשים (n הוא מספר טבעי כלשהו)? הסבירו.

הדרכה לסעיף א: אם נמנה לכל אדם במסיבה את מספר הידידים שלו, מהם כל המספרים האפשריים שניתן לקבל? תנו דעתכם: האם ייתכן שלאדם אחד יהיו 19 ידידים ולאדם אחר לא יהיה אף ידיד?

בעיה 35

האם בין 65 מספרים שלמים שונים תמיד יימצאו 9 מספרים שסכומם מתחלק ב-9? הסבירו. הציעו בעיות דומות, פתרו, והכלילו.

הדרכה: סכום של 9 מספרים שלמים יכול להתחלק ב-9, אם לכל אחד יש שארית שונה בחילוק ב-9 (מדוע?) או אם לכולם אותה השארית בחילוק ב-9 (מדוע?). כדאי לקבץ את המספרים הנתונים לקבוצות (תאים) לפי השאריות שלהם בחילוק ב-9, ולנתח איזה מקרים יכולים או חייבים להתקיים.

בעיה 36

במרתון משתתפים 100 ספורטאים. ידוע כי בין כל 12 ספורטאים יש שניים שמכירים אחד את השני. לספורטאים חולקו מספרים (לא בהכרח לפי הסדר). הראו כי ישנם שני ספורטאים המכירים זה את זה, שמספריהם מתחילים באותה ספרה.

הדרכה: כדאי לחלק את 100 המספרים שניתנו לספוטאים לקבוצות בהתאם לספרה הראשונה במספר. מה המספר המכסימלי של קבוצות שניתן לקבל בדרך זו?

בעיה 37

לישיבה של מועצת התלמידים הגיעו 11 נציגים מ-4 כיתות. האם ניתן להושיב אותם סביב שולחן עגול, כך שבין כל חמישה היושבים זה לצד זה, יהיה נציג מכל כיתה? הסבירו.

הדרכה: כמה נציגים מכל כיתה יכולים היו להגיע לישיבה? האם ייתכן שהגיעו 3 (או יותר) נציגים מכל כיתה? האם ייתכן שיש כיתה שממנה הגיעו בדיוק 2 נציגים? האם ייתכן שיש כיתה שממנה הגיע נציג אחד בלבד? בדקו את האפשרויות השונות וכיצד הן משפיעות על סידורי הישיבה סביב השולחן.

בעיה 38

בחדר ישנם 20 אנשים. האנשים לוחצים ידיים זה לזה כרצונם, אך אין זוג שלוחץ ידיים יותר מפעם אחת. הראו שבהכרח יהיו שני אנשים שלוחצים ידיים אותו מספר של פעמים.

בעיה 39

חנה, ליהי ודנה יושבות יחד וצובעות תמונות בחוברת צביעה. כל העפרונות הצבעוניים נמצאים בתוך שקית והן אינן יכולות לראות את צבעם. בשקית יש 5 עפרונות ירוקים, 7 עפרונות ורודים, 8 עפרונות צהובים ו-8 עפרונות אדומים.

- א. מה מספר העפרונות הקטן ביותר שעליהן להוציא מהשקית בבת אחת, כדי להבטיח שלכולן יהיה עפרון באותו הצבע? הסבירו.
- ב. הבנות החליטו להתחיל בצביעת העץ בציור והן כולן רוצות צבע ירוק. מה מספר העפרונות הקטן ביותר שעליהן להוציא עתה, כדי להבטיח שכולן תקבלנה עפרון בצבע ירוק?
- ג. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ב' אם הבנות היו רוצות כולן צבע ורוד? צהוב?
- ד. האם ניתן היה לענות על סעיפים ב' ו-ג' אם לא היינו יודעים כמה עפרונות מכל צבע יש בשקית? ומה אם רק היינו יודעים שיש מכל צבע לפחות 4 עפרונות?

בעיה 40

לעשרה ילדים היו ביחד 40 אגוזים. [שימו לב: ייתכן שיש בין הילדים כאלה שאין להם אגוזים, כלומר, שמספר האגוזים שיש להם הוא 0.]

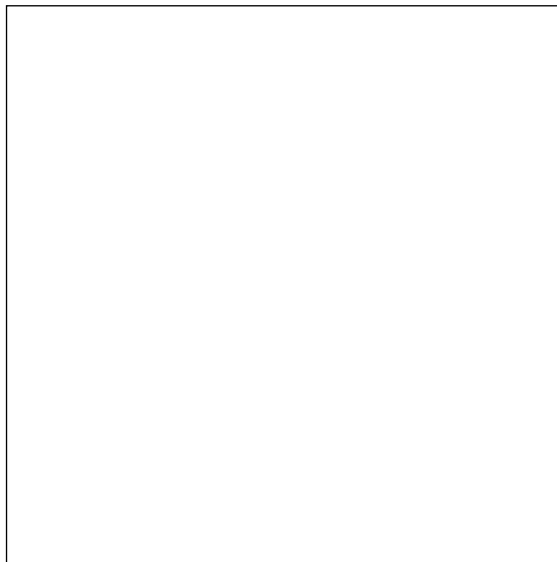
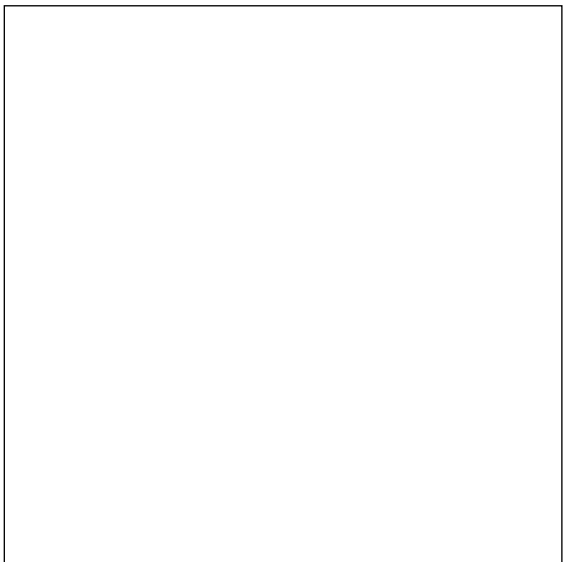
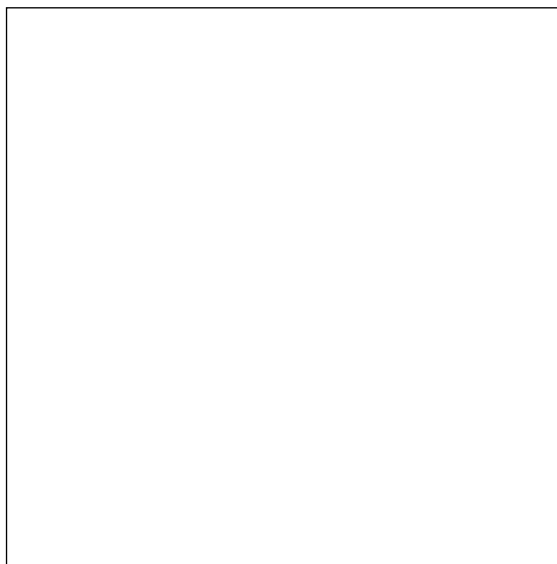
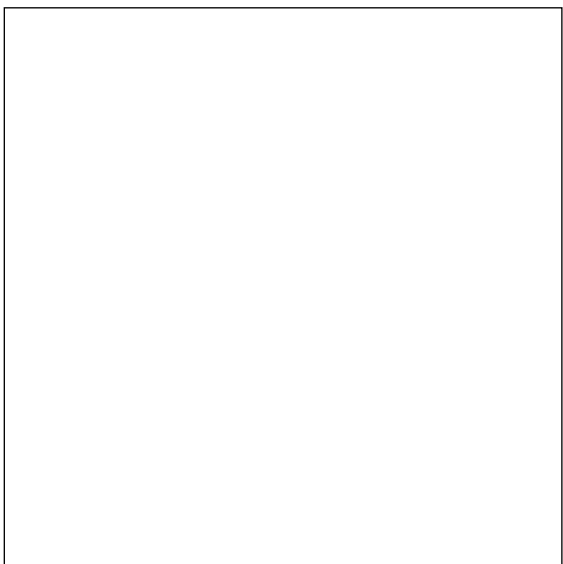
- א. הראו שניתן למצוא לפחות שני ילדים עם אותו מספר אגוזים.
- ב. מה אם במקום 10 ילדים יש 8 ילדים שביחד יש להם 40 אגוזים? האם עדין מובטח שיש שני ילדים עם אותו מספר אגוזים? הסבירו.
- ג. מה אם ל-10 ילדים יש ביחד 45 אגוזים? האם עדין מובטח שיש שני ילדים עם אותו מספר אגוזים? הסבירו.

הדרכה לסעיף א: האם ייתכן שלכל ילד יש מספר שונה של אגוזים? אם כן, מה המספר המינימלי של אגוזים שיכולים להיות להם ביחד? האם הגעתם לאיזושהי סתירה?

עקרון שובר היונים

תכנית המצוינות במתמטיקה, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

דף גזירה "טנגרם"



דף לוחות

[illegible]