

שאלות הספק

חלק א' – לימוד

1. שתי מורות, רותי וחנה, צריכות לבדוק ביחד 120 מבחנים.
 - רותי בודקת 6 מבחנים בשעה וחנה בודקת 4 מבחנים בשעה.
 - א. מהו הזמן הדרוש לרותי לבדוק את כל המבחנים לבד?
 - ב. איזה חלק מהעבודה¹ מבצעת רותי בשעה אחת?
 - ג. מהו הזמן הדרוש לחנה לבדוק את כל המבחנים לבד?
 - ד. איזה חלק מהעבודה מבצעת חנה בשעתיים?
 - ה. אם רותי וחנה תעבודנה ביחד, מהו הזמן הנדרש עבורן לבדיקת 120 המבחנים?
 - ו. כשרותי וחנה עובדות ביחד ובודקות 120 מבחנים, איזה חלק מהעבודה מבצעת כל אחת מהן?



הצעה לפתרון – סעיפים א' – ד':

חלק מהעבודה	זמן נדרש לכל העבודה	
רותי	חלק מהעבודה בשעה: $\frac{6}{120} = \frac{1}{20}$	$120 : 6 = 20$ שעות.
חנה	חלק מהעבודה בשעתיים: $2 \cdot \frac{4}{120} = 2 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{15}$	$120 : 4 = 30$ שעות.



הצעה לפתרון – סעיפים ה' – ו':

ביחד רותי וחנה בודקות בכל שעה 10 מבחנים, מכאן שביחד תבצענה את כל העבודה ב: $120 : 10 = 12$, כלומר ב- 12 שעות.

חלק העבודה שמתבצע על ידי רותי הוא $120 : 6 \cdot 12 = 72 : 120 \Leftarrow \frac{3}{5}$ מהעבודה

חלק העבודה שמתבצע על ידי חנה הוא $120 : 4 \cdot 12 = 48 : 120 \Leftarrow \frac{2}{5}$ מהעבודה

¹ עבודה = בדיקת 120 המבחנים.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

2. יותם ועומר גרים במרחק 2 ק"מ זה מזה. הם יצאו באותה שעה אחד לקראת השני כדי להיפגש. שניהם הולכים במהירות קבועה של 80 מטר לדקה.



- א. מה המרחק שעבר כל אחד מהם לאחר 4 דקות הליכה?
 ב. (i) איזה חלק מהדרך כולה עבר כל אחד מהם לאחר 4 דקות הליכה?
 (ii) איזה חלק מהדרך כולה עברו שניהם ביחד לאחר 4 דקות הליכה?
 ג. (i) מה המרחק שעבר כל אחד מהם לאחר 10 דקות הליכה?
 (ii) איזה חלק מהדרך כולה עבר כל אחד מהם לאחר 10 דקות הליכה?
 (iii) איזה חלק מהדרך כולה עברו שניהם ביחד לאחר 10 דקות הליכה?
 ד. (i) איזה חלק מהדרך כולה עבר כל אחד מהם עד לנקודת הפגישה?
 (ii) איזה חלק מהדרך כולה עברו שניהם ביחד עד לנקודת הפגישה?
 ה. כמה זמן הלך כל אחד מהם עד לנקודת הפגישה?



הצעה לפתרון – סעיף א':

עומר	יותם	
80 מטר לדקה	80 מטר לדקה	מהירות
4 דקות	4 דקות	זמן
$80 \times 4 = 320$ מטר	$80 \times 4 = 320$ מטר	דרך

תשובה: המרחק שיעבור כל אחד מהם לאחר 4 דקות הוא 320 מטר.



הצעה לפתרון – סעיף ב':

יותם ועומר יחד	עומר לבד	יותם לבד	
640 מטר	320 מטר	320 מטר	הדרך שעבר לאחר 4 דקות
$\frac{640}{2000} = \frac{8}{25}$	$\frac{320}{2000} = \frac{4}{25}$	$\frac{320}{2000} = \frac{4}{25}$	חלק הדרך שעבר לאחר 4 דקות

תשובה: (i) חלק הדרך שעבר כל אחד לאחר 4 דקות הוא $\frac{4}{25}$.

(ii) חלק הדרך שעברו שניהם לאחר 4 דקות הוא $\frac{8}{25}$.



שימו לב: חלק הדרך, כמו יחס, הוא מספר ללא יחידות.

משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

← הצעה לפתרון – סעיף ג':

נפרט את החישובים בטבלה הבאה:

ייתם ועומר יחד	עומר לבד	ייתם לבד	
1600 מטר	800 מ' = 80×10	800 מ' = 80×10	הדרך לאחר 10 דקות
$\frac{1600}{2000} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$	$\frac{800}{2000} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$	$\frac{800}{2000} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$	חלק הדרך לאחר 10 דקות

תשובה: (i) המרחק שיעבור כל אחד מהם לאחר 10 דקות הוא 800 מטר.

(ii) חלק הדרך שעבר כל אחד לאחר 10 דקות הוא $\frac{2}{5}$.

(iii) חלק הדרך שעשו שניהם לאחר 10 דקות הוא $\frac{4}{5}$.

! מכאן נקבל שלאחר 10 דקות של הליכה עומר וייתם עדיין לא נפגשו (מדוע?)

← הצעה לפתרון – סעיף ד':

(i) עומר וייתם יצאו לדרך באותה שעה והולכים במהירויות שווה ולכן ייפגשו

באמצע הדרך. כלומר, המרחק שעבר כל אחד עד הפגישה הוא 1000 מ'.

(ii) כל אחד מהם יעבור חצי מהדרך עד הפגישה ולכן שניהם יחד יעברו את

הדרך כולה שהיא **השלם**. נפרט בטבלה הבאה:

ייתם ועומר יחד	עומר לבד	ייתם לבד	
2000 מטר	1000 מטר	1000 מטר	הדרך עד הפגישה
$\frac{2000}{2000} = 1$	$\frac{1000}{2000} = \frac{1}{2}$	$\frac{1000}{2000} = \frac{1}{2}$	חלק הדרך עד הפגישה

משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

← הצעה לפתרון – סעיף ה':

עומר	יותם	
80 מטר לדקה	80 מטר לדקה	מהירות
1000 מטר	1000 מטר	דרך
$\frac{1000}{80} = 12.5$ דקות	$\frac{1000}{80} = 12.5$ דקות	זמן

תשובה: יותם ועומר נפגשו 12.5 דקות אחרי שיצאו לדרך.

← הצעה לפתרון – סעיף ה' גם בדרך אחרת:

את הזמן שהלך כל אחד מהם עד נקודת הפגישה נוכל לחשב גם בדרך אחרת. בכל דקה עוברים עומר ויותם יחד 160 מטר. ולכן כדי לעבור 2000 מטר ידרש

$$\text{לשניהם } 12.5 \text{ דקות} = \frac{2000}{160} \text{ כלומר } 12.5 \text{ דקות.}$$

3. יואב ואיתי גרים במרחק 1.8 ק"מ זה מזה. הם יצאו באותה שעה אחד לקראת השני כדי להיפגש. יואב הולך במהירות קבועה של 90 מטר לדקה ואיתי הולך במהירות קבועה של 60 מטר לדקה.
- א. בכמה דקות היה עובר כל אחד מהם את הדרך כולה לבדו?
- ב. איזה חלק מהדרך כולה עבר כל אחד מהם לאחר 1 דקות הליכה? 6 דקות הליכה? 11 דקות הליכה?
- ג. איזה חלק מהדרך כולה עברו שניהם יחד לאחר 1 דקות הליכה? 6 דקות הליכה? 11 דקות הליכה?
- ד. איזה חלק מהדרך כולה עברו שניהם יחד לאחר x דקות הליכה?
- ה. כמה דקות לאחר צאתם לדרך יפגשו יואב ואיתי?

← הצעה לפתרון: נענה בעזרת הטבלה הבאה על סעיפים א' – ד':

יואב ואיתי	איתי	יואב	
	60 מטר לדקה	90 מטר לדקה	מהירות
	$\frac{1800}{60} = 30$ דקות	$\frac{1800}{90} = 20$ דקות	הזמן של הדרך כולה
$\frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$	$\frac{60 \times 1}{60 \times 30} = \frac{1}{30}$	$\frac{90 \times 1}{90 \times 20} = \frac{1}{20}$	חלק הדרך לאחר 1 דקה

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

$\frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	$6 \cdot \frac{1}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$	$6 \cdot \frac{1}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$	חלק הדרך לאחר 6 דקות
$\frac{11}{30} + \frac{11}{20} = \frac{55}{60} = \frac{11}{12}$	$11 \cdot \frac{1}{30} = \frac{11}{30}$	$11 \cdot \frac{1}{20} = \frac{11}{20}$	חלק הדרך לאחר 11 דקות
$\frac{x}{30} + \frac{x}{20} = \frac{5x}{60} = \frac{x}{12}$	$\frac{x}{30}$	$\frac{x}{20}$	חלק הדרך לאחר x דקות

נתמקד בחישוב חלק הדרך שעבר איתי ב 6 דקות:

$$\frac{\text{הדרך שעבר ב-6 דקות}}{\text{הדרך שעבר ב-30 דקות}} = \frac{6 \times 6}{60 \times 30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

מדוגמא זו ניתן לראות שנוכל לחשב את חלק הדרך שעבר כל אחד בשתי דרכים:

1. יחס בין הדרך שעבר ב 6 דקות לדרך כולה
2. יחס בין הזמן שעבר לזמן של הדרך כולה



שימו לב: יחס הדרכים שווה ליחס הזמנים המתאימים כי המספר המייצג את המהירות מצטמצם.



מסקנה: נוכל לחשב את יחס הדרכים לפי יחס הזמנים.



הצעה לפתרון סעיף ה':

כפי שראינו בטבלה חלק הדרך שהם עברו ביחד עד לפגישה, לאחר x דקות, הוא

$$\frac{x}{30} + \frac{x}{20} = \frac{5x}{60} = \frac{x}{12}$$

ומכאן נקבל $x = 12$ $\Rightarrow \frac{x}{12} = 1$. כלומר אחרי 12 דקות יואב ואיתי ייפגשו.



הערה: מהירות ההתקרבות של יואב ואיתי היא 90 מטרים בדקה + 60 מטרים בדקה, כלומר 150 מטרים בדקה. לכן הזמן הנדרש לעבור 1800 מטרים הוא $1800 : 150 = 12$ דקות, ב-12 דקות הם עוברים ביחד את כל הדרך.

נסתכל על התוצאות בהיבט נוסף:

המהירות של יואב היא 90 מטרים לדקה ואילו המהירות של איתי היא 60 מטר לדקה. לכן יואב, המהיר יותר, יעבור דרך ארוכה יותר מאיתי עד נקודת הפגישה.

עד נקודת הפגישה, יואב יעבור $\frac{3}{5}$ מהדרך כולה ואיתי יעבור $\frac{2}{5}$ מהדרך כולה.

² סכום חלקי הדרך הוא 1

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ראו הסברים בטבלה לעיל:

יחס	איתי	יואב	
3:2	60 מטר לדקה	90 מטר לדקה	מהירות
2:3	30 דקות	20 דקות	זמן של הדרך כולה
	12 דקות	12 דקות	זמן עד הפגישה
3:2	$\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$	$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$	חלק הדרך עד הפגישה
3:2	$12 \times 60 = 720$	$12 \times 90 = 1080$	הדרך עד הפגישה

מתוך הטבלה רואים שהיחס בין המהירויות שווה ליחס בין הדרכים עד הפגישה וההסבר לכך:

$$\frac{\text{הדרך שעבר יואב עד הפגישה}}{\text{הדרך שעבר איתי עד הפגישה}} = \frac{90 \times 12}{60 \times 12} = \frac{90}{60} = \frac{3}{2}$$



נסכם: בנקודת הפגישה, כל אחד עושה חלק מהשלם (הדרך כולה) וסכום החלקים הוא 1.

נגדיר כעת מושג חדש – **הספק**

לשם כך נתבונן במשפטים הבאים:

1. מהירות הנסיעה של מכונית היא 60 קמ"ש.
2. רוכב אופניים רוכב במהירות קבועה 18 ק"מ בשעה וחצי.
3. יואב פותר 20 תרגילים ב 10 דקות.
4. יהלי אופה 5 עוגות בשעתיים.
5. טרקטור חורש שדה ששטחו דונם (1000 מ"ר) ב 4 שעות.

נגדיר: **הספק** - כמות העבודה המתבצעת ביחידת זמן

משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

נדגים בעזרת המשפטים הנ"ל את מושג ההספק:

ההספק	העבודה: גודל מספרי או חלק יחסי משלם	המשפט המקורי
60 ק"מ בשעה	המרחק שמכונת עברה	מהירות הנסיעה של מכונת היא 60 קמ"ש.
12 ק"מ בשעה	המרחק שרוכב עבר	רוכב אופניים רוכב במהירות קבועה 18 ק"מ בשעה וחצי.
2 תרגילים בדקה	מספר התרגילים שיואב פתר	יואב פותר 20 תרגילים ב 10 דקות.
2.5 עוגות בשעה	מספר עוגות שיהלי אופה	יהלי אופה 5 עוגות בשעתיים.
¼ דונם בשעה	שטח בדונמים שנחרש	טרקטור חורש שדה ששטחו דונם (1000 מ"ר) ב 4 שעות.

מתוך ההגדרה נקבל את הקשרים הבאים:

$$\frac{\text{עבודה}}{\text{הספק}} = \text{זמן} \quad \text{עבודה} = \text{הספק} \times \text{זמן} \quad \frac{\text{עבודה}}{\text{זמן}} = \text{הספק}$$

4. תלמידי כיתה ח' קיבלו עבודה לחופשת פסח, לפתור 60 תרגילים. יותם פותר 10 תרגילים במשך 30 דקות. עומר פותר 8 תרגילים במשך 24 דקות.
- א. מה ההספק של יותם?
 ב. מה ההספק של עומר?
 ג. בכמה זמן יסיים כל אחד מהם את עבודת החופש?


ההספק, במקרה של הבעיה שלנו הוא מספר התרגילים שהתלמיד פותר בדקה.



הצעה לפתרון סעיפים א', ב':

סעיף א': נחשב את ההספק של יותם	סעיף ב': נחשב את ההספק של עומר
<u>העבודה</u> – פתירת 10 תרגילים	<u>העבודה</u> – פתירת 8 תרגילים
<u>הזמן</u> – 30 דקות	<u>הזמן</u> – 24 דקות
<u>הספק</u> – $\frac{\text{עבודה}}{\text{זמן}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$	<u>הספק</u> – $\frac{\text{עבודה}}{\text{זמן}} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

ההספקים של שני התלמידים שווים.

 הצעה לפתרון סעיף ג':

נחשב את הזמן הדרוש לכל אחד מהם לפתור את 60 התרגילים –

$$\text{זמן} = \frac{\text{עבודה}}{\text{הספק}} = \frac{60}{\frac{1}{3}} = 60 \cdot \frac{3}{1} = 180 \text{ דקות}$$

תשובה: כל אחד יסיים את עבודת החופש ב-180 דקות.

5. לצורך בניית גדר זקוקים להניח 2000 לבנים. יאיר יכול לבנות את הגדר לבדו ב-10 שעות. יובל יכול לבנות את הגדר לבדו ב-40 שעות. הם מתכוונים לבנות את הגדר ביחד.
- למי מהשניים, יאיר או יובל, יש הספק גדול יותר?
 - מה ההספק של יאיר? מה ההספק של יובל?
 - איזה חלק מהעבודה מבצע יאיר בשעה אחת?
 - איזה חלק מהעבודה מבצע יובל בשעה אחת?
 - כמה שעות יעבדו ביחד יאיר ויובל בבניית הגדר עד שייסימו לבנותה (הם יעבדו ביחד באופן רציף)?
 - אלון וארנון גם הם בונים גדר אולם לבניית הגדר שהם בונים זקוקים ל-2400 לבנים. אלון מסיים את בניית הגדר ב-10 שעות וארנון מסיים את בניית הגדר ב-40 שעות. כמה שעות יבנו ביחד את הגדר?

ההספק, במקרה של הבעיה שלנו הוא מספר הלבנים שניח כל אחד מהם בשעה.

 הצעה לפתרון:

סעיף א': ליאיר הספק גדול יותר. בשעה מספיק להניח יותר לבנים.
 סעיפים ב' – ד':

יאיר	יובל
<u>העבודה</u> – הנחת 2000 לבנים	<u>העבודה</u> – הנחת 2000 לבנים
<u>הזמן</u> – 10 שעות	<u>הזמן</u> – 40 שעות
<u>הספק</u> – $200 = \frac{\text{עבודה}}{\text{זמן}} = \frac{2000}{10}$	<u>הספק</u> – $50 = \frac{\text{עבודה}}{\text{זמן}} = \frac{2000}{40}$
<u>החלק בעבודה בשעה</u> – $\frac{1}{10}$	<u>החלק בעבודה בשעה</u> – $\frac{1}{40}$

 הערה: אם שניים עובדים ביחד אז ההספק המשותף הוא סכום ההספקים שלהם.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה



הצעה לפתרון סעיף ה':

t – מייצג את מספר השעות שיעבדו יחד בבניית הגדר:
 $2000 : 250 = 8 \Leftrightarrow (200 + 50) \cdot t = 2000 \Leftrightarrow$ עבודה = זמן \times הספק
 תשובה: ב- 8 שעות יסיימו יאיר ויובל את בניית הגדר.
את סעיף ו' יש לפתור בכוחות עצמכם.

6. ליהי ורוני החליטו לסייד את החדרים שלהן בחופשת הקיץ. החדרים שווים בגדלם.
 ליהי סיימה את סיוד החדר שלה ב- 6 שעות ורוני סיימה את סיוד החדר שלה ב- 8 שעות.
 א. למי מהבנות יש הספק גדול יותר?
 ב. איזה חלק מהעבודה סיימה ליהי בשעה אחת?
 ג. איזה חלק מהעבודה סיימה רוני בשעה אחת?

נניח כעת שליהי ורוני החליטו לשתף פעולה ולסייד את החדר של ליהי ביחד.

ד. מבלי לחשב ענו על השאלה הבאה:
 כמה שעות ייקח לשתיהן לסיים את סיוד שני החדרים:
 (1) יותר מ-8 שעות (2) בין 6 שעות ל-8 שעות (3) פחות מ-6 שעות

ה. איזה חלק מהעבודה יסיימו שתיהן בשעה אחת משותפת?
 ו. איזה חלק מהעבודה יסיימו שתיהן בשעתיים עבודה משותפת?
 ז. בכמה שעות יסיידו שתיהן ביחד את החדר של ליהי?
 ח. בכמה שעות יסיידו שתיהן ביחד את שני החדרים – החדר של ליהי והחדר של רוני?
 ט. איזה חלק מהעבודה (סיוד שני החדרים) תבצע כל אחת מהבנות בשעה?



הצעה לפתרון לסעיפים ה' – ז':

בשעה אחת	$\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$	בשעה יסיימו שתיהן $\frac{7}{24}$ מהעבודה
בשעתיים	$2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{12}$	בשעתיים יסיימו שתיהן $\frac{7}{12}$ מהעבודה



הצעה לפתרון סעיף ז':

$$t = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{7}{24} \cdot t = 1 \cdot \frac{24}{7} \Leftrightarrow \frac{7}{24} \cdot t = 1 \Leftrightarrow$$


עבודה³ = זמן \times הספק




הצעה נוספת לפתרון סעיף ז': $t = \frac{עבודה}{הספק} = \frac{1}{\frac{7}{24}} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$

³ העבודה כולה תיחשב 1

תשובה: את העבודה כולה יסיימו ב $3\frac{3}{7}$ שעות, כלומר 3 שעות ו- 25.71 דקות.

 הצעה נוספת לפתרון סעיף ז': $\frac{x}{6} + \frac{x}{8} = 1 \Leftrightarrow x = 3\frac{3}{7}$

 שימו לב: אם שתיהן היו עובדות באותו הקצב, למשל הקצב של הזריזה (ליהי), היו מסיימות יחד ב- 3 שעות (מדוע?). אם שתיהן היו עובדות באותו הקצב, למשל הקצב של האיטית (רוני), היו מסיימות יחד ב- 4 שעות (מדוע?). 3.5 שעות הוא הממוצע החשבוני בין 3 שעות ל- 4 שעות. התשובה שקבלנו איננה הממוצע החשבוני. במילים אחרות, זמן העבודה המשותף איננו ממוצע חשבוני בין זמן העבודה אם שתיהן היו עובדות כמו הזריזה מבין שתיהן לבין זמן העבודה אם שתיהן היו עובדות כמו האיטית מבין שתיהן. מתקבל סוג ממוצע אחר שנקרא **ממוצע הרמוני**. כדי למצוא את הממוצע ההרמוני יש לחשב את המספר ההפכי לממוצע החשבוני של חלק העבודה המתבצע בשעה על ידי שתיהן. כלומר

$$1 : \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{12 \cdot 2}{7} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$$

סעיף ח': $2 \cdot 3\frac{3}{7} = 6\frac{6}{7} = 6\frac{6}{7}$ שעות, כלומר 6 שעות ו- 51.43 דקות.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

7. אלעד החליט לבנות בית עץ. אם היה עובד לבד הבנייה היתה נמשכת 5 שעות. אפרת הצטרפה אליו לבניית בית העץ.
- א. אם ההספק של אלעד ואפרת שווה, בכמה זמן היו מסיימים לבנות את בית העץ? נמקו. נתון שהם סיימו לבנות את בית העץ בשעתיים.
- ב. האם ההספק של אפרת גדול או קטן מההספק של אלעד? נמקו.
- ג. מה ההספק של אפרת בבניית בית העץ אם הייתה בונה אותו לבד?



הצעה לפתרון:

סעיף א'	סעיף ב'	סעיף ג'
<p>בשעתיים וחצי. כל אחד משלים מחצית העבודה:</p> $\frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$	<p>ההספק של אפרת גדול יותר כי בניית בית העץ נעשית בפחות משעתיים וחצי.</p>	<p>x – מס' השעות שאפרת הייתה בונה לבד את בית העץ:</p> $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{x}\right) \cdot 2 = 1$ $\frac{2}{5} + \frac{2}{x} = 1 \quad / \cdot 5x$ $2x + 10 = 5x$ $10 = 3x$ $3\frac{1}{3} = x$
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: auto;"> <p>תשובה: אפרת הייתה מסיימת את בניית בית העץ ב-3 שעות ועשרים דקות (שלוש שעות ושליש שעה)</p> </div>		

8. לברכה שבה 200 מ"ק מחוברים שני צינורות. הצינור הראשון מזרים מים לברכה בקצב של 20 מ"ק לשעה. הצינור השני מרוקן את הברכה בקצב של 10 מ"ק לשעה. יום אחד החליטו למלא את הברכה כשהייתה ריקה אך בטעות שכחו לסגור את הצינור המרוקן. תוך כמה זמן תתמלא הברכה?



הצעה לפתרון: t מייצג את זמן העבודה של שני הצינורות:
 $t = 20 \Leftrightarrow 10t = 200 \Leftrightarrow 20t - 10t = 200$
 תשובה: הברכה תתמלא ב 20 שעות.



שימו לב: בשאלה זו יש להתייחס למשמעות. במקרה זה העבודה של הברז הממלא היא חיובית והעבודה של הברז המרוקן היא שלילית ולכן ההספק המשותף הוא $20 - 10 = 10$ מ"ק לשעה.



חלק ב' - שאלות לתרגול :

הערה: בכל התרגילים להלן מניחים שההספק נשאר קבוע והעבודה מתבצעת ברציפות.

1. שתי חברות, ענת ודפנה, רוצות להכין 180 מדבקות לחלק כפרסים לתלמידי הכיתה. ענת יכולה להכין 9 מדבקות בשעה ודפנה יכולה להכין 6 מדבקות בשעה.
 - א. מהו הזמן הדרוש לענת להכין את כל המדבקות לבד?
 - ב. איזה חלק מהעבודה מבצעת ענת בשעה אחת?
 - ג. מהו הזמן הדרוש לדפנה להכין את כל המדבקות לבד?
 - ד. איזה חלק מהעבודה מבצעת דפנה בשעתיים?
 - ה. אם ענת ודפנה תעבודנה ביחד, מהו הזמן הנדרש עבורן להכנת 180 המדבקות? פתרו בדרך חשבונית ובדרך אלגברית.
 - ו. כשענת ודפנה עובדות ביחד ומכינות את 180 המדבקות, איזה חלק מהעבודה מבצעת כל אחת מהן?
2. תלמידי כיתה ח' קיבלו עבודה לחופשה, לפתור 50 תרגילים. דניאל פותר 10 תרגילים במשך 40 דקות. יעל פותרת 8 תרגילים במשך 32 דקות.
 - א. מה ההספק של דניאל?
 - ב. מה ההספק של יעל?
 - ג. בכמה זמן יסיים כל אחד מהם את עבודת החופש?
3. שיר וגיא מתגוררים במרחק של 2.4 ק"מ זה מזה. הם יוצאים בהליכה אחד לקראת השני. שיר הולכת במהירות של 4 קמ"ש וגיא הולך במהירות של 6 קמ"ש.
 - א. בכמה דקות היה עובר כל אחד מהם את הדרך כולה לבדו?
 - ב. איזה חלק מהדרך כולה עבר כל אחד מהם לאחר דקה אחת?
 - ג. איזה חלק מהדרך כולה עברו שניהם יחד לאחר דקה אחת?
 - ד. איזה חלק מהדרך כולה עברו שניהם יחד לאחר x דקות?
 - ה. כעבור כמה דקות נפגשו שיר וגיא אם יצאו זה לקראת זה באותו הזמן?

4. עמיר ונעה רוצים להרכיב גדר המורכבת מ-360 שלבי עץ אנכיים. עמיר יכול להרכיב את הגדר לבדו ב-4 שעות. נעה יכולה להרכיב את הגדר לבדה ב-6 שעות. הם מתכוונים להרכיב את הגדר ביחד.
- א. למי מהשניים, עמיר או נעה, יש הספק גדול יותר?
ב. מה ההספק של כל אחד מהם?
ג. איזה חלק מהעבודה מבצע עמיר בשעה?
ד. איזה חלק מהעבודה מבצעת נעה בשעתיים?
ה. כמה שעות יעבדו ביחד עמיר ונעה בהרכבת הגדר עד שיסיימו להרכיבה?
5. אורי ודן, רוצים לצבוע את המחסן שבבית הוריהם. אורי יכול לצבוע את המחסן לבדו ב-4 שעות. דן יכול לצבוע את המחסן לבדו ב-6 שעות. הם מתכוונים לצבוע את המחסן ביחד.
- א. למי מהשניים, אורי או דן, יש הספק גדול?
ב. איזה חלק מהעבודה הם מבצעים ביחד בשעה?
ג. כמה שעות יעבדו ביחד אורי ודן בצביעת המחסן?
6. ממלאים אמבטיה בעזרת ברזים המזרימים מים. אם יפתחו רק ברז אחד תתמלא האמבטיה כעבור 10 דקות. אם יפתחו רק את הברז השני תתמלא האמבטיה כעבור 12 דקות. במשך כמה זמן תתמלא האמבטיה אם יפתחו את שני הברזים ביחד? פתרו ביותר מדרך אחת.
7. מכלית דלק אחת ממלאה דלק במטוס לטיסה לניו יורק ב-60 דקות. ביום אחר, מכלית שנייה ממלאה את אותה כמות דלק באותו מטוס ב-45 דקות. ניתן לחבר את שתי המכליות למטוס ולתדלק בו זמנית משתיהן.
- א. מה ההספק של המכלית הראשונה?
ב. מה ההספק של המכלית השנייה?
ג. מה יהיה הספק המשותף של שתי המכליות כשהן תתדלקנה ביחד?
ד. כמה דקות יעבדו שתיהן יחד כדי לתדלק את המטוס?

8. אייל יכול לסיים עבודה מסוימת במשך 9 שעות. עודד החליט לבוא לעזרתו ושניהם יחד סיימו את העבודה במשך 6 שעות.
- א. אם לעודד היה הספק שווה להספק של אייל, בכמה שעות היו מסיימים את העבודה יחד? נמקו!
- ב. האם ההספק של עודד גבוה או נמוך מההספק של אייל? נמקו!
- ג. בכמה שעות יכול עודד לסיים את העבודה לבדו?
9. בממגורה, שני צינורות בעלי קוטר שונה ממלאים מכל חיטה. צינור א' יכול למלא את המכל לבדו ב- 48 שעות. אם שני הצינורות פועלים בו זמנית המכל מתמלא ב- 12 שעות.
- א. האם צינור א' בעל קוטר גדול יותר מצינור ב'? נמקו!
- ב. בכמה שעות יכול צינור ב' למלא את המכל לבדו?
10. שני צינורות ממלאים בריכה. צינור א' יכול למלא את הבריכה לבדו בשש שעות וצינור ב' יכול למלא את הבריכה לבדו בתשע שעות. צינור א' נפתח בשעה 07:00 וצינור ב' נפתח בשעה 08:00. שני הצינורות עבדו עד שהבריכה התמלאה.
- א. איזה חלק מהבריכה ממלא הצינור הראשון בשעה?
- ב. איזה חלק מהבריכה ממלא הצינור השני בשעה?
- ג. איזה חלק מהבריכה מילאו שני הצינורות כשעבדו יחד?
- ד. כמה שעות עבדו הצינורות יחד עד שהבריכה התמלאה?
- ה. באיזו שעה התמלאה הבריכה?

11. בבית ספר מסוים, נהוג שאחד התלמידים (בתורנות) מסדר ומנקה את הכיתה בסיום יום הלימודים. יאיר מסיים את התורנות ב- 20 דקות וצבי מסיים את התורנות ב- 16 דקות. יום אחד, יאיר ביקש מצבי שיעזור לו כדי שיוכל לסיים מוקדם יותר את התורנות. יאיר התחיל את התורנות וצבי הצטרף אליו לאחר 2 דקות.
- א. איזה חלק מהעבודה עשה יאיר לפני שצבי הצטרף אליו?
- ב. כמה דקות נמשכה התורנות של יאיר בפעם זו?
12. תמר וגליה קנו יחד חמרים כדי להכין קישוטים לזיהם לסוכה. תמר סיימה את הכנת הקישוטים לסוכה שלה בחצי מהזמן שלקח לגליה להכין את הקישוטים לסוכה שלה. שתיהן החליטו להכין ביחד קישוטים זיהם לסוכה של חברתן נועה. הן סיימו את ההכנה בשעה.
- א. למי מהן יש הספק גבוה יותר?
- ב. בכמה שעות יכולה כל אחת מהן לסיים את הכנת הקישוטים לסוכה לבדה?
- ג. איזה חלק מהקישוטים עשתה כל אחת מהן לסוכה של נועה?
13. במחלבה, שני צינורות יכולים לרוקן מכל חלב. צינור א' מרוקן את המכל לבדו בשליש מהזמן שלוקח לצינור ב' לרוקן את המכל לבדו. שני הצינורות מרוקנים יחד חצי מהמכל בשלוש שעות.
- א. בכמה שעות מרוקנים שני הצינורות יחד מכל מלא?
- ב. בכמה שעות מרוקן כל צינור את המכל לבדו?
- ג. יום אחד התחיל צינור ב' לרוקן את המכל בשעה 06:00. בשעה 08:00 התחיל גם צינור א' לרוקן את המכל. באיזו שעה התרוקן המכל?

14. בתחנת כוח משנעים שני מסועים פחם מאניית צובר⁴. המסוע הראשון יכול לשנע לבדו את כל הפחם מהאנייה ב 40% שעות יותר מאשר המסוע השני לבדו. המסוע הראשון התחיל לעבוד ואחרי 11 שעות הצטרף אליו המסוע השני. שניהם יחד סיימו את פריקת הפחם מהאנייה 21 שעות לאחר שהמסוע הראשון התחיל בעבודתו.
- א. למי מהמסועים יש הספק גבוה יותר?
- ב. בכמה שעות יכול כל מסוע לסיים את פריקת הפחם מהאנייה לבדו?
- ג. איזה חלק מהפחם באנייה פרק המסוע הראשון ואיזה חלק פרק המסוע השני?
15. פועל אחד יכול לסיים את העבודה לבדו ב- 20% פחות שעות מאשר הפועל השני יכול לסיים את העבודה לבדו. שניהם מתחילים יחד וכעבור 8 שעות מסיימים 90% מהעבודה.
- א. למי מהפועלים יש הספק גבוה יותר?
- ב. בכמה שעות יכול כל פועל לסיים את העבודה לבדו?

⁴ אניית צובר – אניית משא המובילה מטענים יבשים בתפזורת כגון דגנים, סוכר, פחם.

משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה



פתרונות

שאלה	סעיף	תשובה
5 (לימוד)	ו	8 שעות
6 (לימוד)	א	לליהי הספק גדול יותר כי היא מסיימת את העבודה בפחות זמן.
	ב-ג	ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{1}{8}$
	ד	פחות מ-6 שעות
	ט	ליהי $\frac{1}{12}$ רוני $\frac{1}{16}$
1	א-ב	א. 20 שעות ב. $\frac{9}{180} = \frac{1}{20}$
	ג-ד	ג. 30 שעות ד. $2 \cdot \frac{6}{180} = \frac{1}{15}$
	ה	דרך חשבונית: בשעה מכינות 15 מדבקות ולכן ביחד תעבודנה 12 שעות דרך אלגברית: $\frac{x}{20} + \frac{x}{30} = 1$, $x = 12$
	ו	ענת $\frac{3}{5}$ מהעבודה, דפנה $\frac{2}{5}$ מהעבודה
2	א-ג	ההספק של כל אחד מהם $\frac{1}{4}$ תרגיל בדקה. הזמן לבצוע העבודה – 3 שעות ו-20 דקות.
3	א	שיר תלך 36 דקות, גיא ילך 24 דקות.
	ב	החלק של שיר לאחר דקה $\frac{1}{36}$, החלק של גיא לאחר דקה $\frac{1}{24}$
	ג-ה	ג. $\frac{5}{72}$ ד. $\frac{5x}{72}$ ה. 14 דקות ו-24 שניות.
4	א	לעמיר הספק גדול יותר, מספיק יותר שלבים בשעה.
	ב	עמיר: 90 שלבים בשעה נעה: 60 שלבים בשעה

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

4	ג-ד	עמיר: $\frac{1}{4}$ שלבים בשעה נעה: $\frac{1}{3}$ שלבים בשעתיים
	ה	2 שעות ו-24 דקות $x = 2\frac{2}{5}$, $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 1$
5	א	לאורי הספק גדול יותר
	ב	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$
	ג	2 שעות ו-24 דקות $x = 2\frac{2}{5}$, $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 1$
6		דרך אלגברית: $x = 5\frac{5}{11}$, $\frac{x}{10} + \frac{x}{12} = 1$ דרך חשבונית: הספק בשעה של שני הברזים $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{11}{60}$ ולכן יסיימו ב $\frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ כ-5 שעות ו-27 דקות. דרך ממוצע הרמוני: $1: \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}{2} = \frac{2}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \frac{30 \cdot 2}{11} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$
7	א-ב	א. $\frac{1}{60}$ בדקה ב. $\frac{1}{45}$ בדקה
	ג	ההספק המשותף $\frac{7}{180}$ בדקה
	ד	$x = 25\frac{5}{7}$, $\frac{x}{60} + \frac{x}{45} = 1$, קרוב ל-26 דקות.
8	א	4.5 שעות. כל אחד היה עובד מחצית הזמן מאשר נדרש לו היה עובד לבד.
	ב	ההספק של עודד נמוך מההספק של אייל כי סיימו את העבודה ביותר מאשר 4.5 שעות
	ג	$x = 18$, $\frac{6}{9} + \frac{6}{x} = 1$ עודד היה מסיים לבדו את העבודה ב-18 שעות.
9	א	צינור א' ממלא רק רבע מהמכל ולכן הוא בעל הקוטר הקטן יותר.
	ב	$x = 16$, $\frac{12}{48} + \frac{12}{x} = 1$. צינור ב' יכול למלא את הבריכה לבדו ב-16 שעות.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

10	א-ג	א. $\frac{1}{6}$ ב. $\frac{1}{9}$ ג. $\frac{5}{6}$
	ד	$\frac{x+1}{6} + \frac{x}{9} = 1$ או $\frac{x}{6} + \frac{x}{9} = \frac{5}{6}$ או $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$ (הספק בשעה של שניהם). יעבדו יחד 3 שעות.
	ה	בשעה 11:00
11	א	$\frac{1}{10}$
	ב	$\frac{x}{20} + \frac{x}{16} = \frac{9}{10}$, $x = 8$. התורנות של יאיר נמשכה 10 דקות. (2 דקות לבד ועוד 8 דקות ביחד עם צבי).
12	א	לתמר הספק גבוה יותר מסיימת במחצית הזמן. $\frac{1}{x}$ ההספק של תמר, $\frac{1}{2x}$ ההספק של גליה.
	ב	$x = 1$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} = 1$ תמר יכולה לסיים לבדה בשעה וחצי, גליה יכולה לסיים לבדה ב-3 שעות.
	ג	דרך א': $\frac{3}{2} = \frac{2}{3}$:1 - החלק של תמר הוא $\frac{2}{3}$ החלק של גליה הוא $\frac{1}{3}$ דרך ב': היחס בין הזמנים של תמר וגליה הוא 1 : 2 לכן החלק של תמר הוא $\frac{2}{3}$ והחלק של גליה הוא $\frac{1}{3}$.
13	א	6 שעות
	ב	$\frac{6}{x} + \frac{6}{3x} = 1$ או $\frac{3}{x} + \frac{3}{3x} = \frac{1}{2}$ כלומר, צינור א' ב- 8 ש', צינור ב' ב- 24 ש'.
	ג	$\frac{t}{24} + \frac{t-2}{8} = 1$, $t = 7.5$ המכל יתרוקן בשעה 13:30.
14	א	מסוע שני
	ב	$x = 25$, $\frac{10}{x} + \frac{21}{1.4x} = 1$. מסוע שני יסיים ב- 25 שעות. מסוע ראשון יסיים ב- 35 שעות.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

מסוע ראשון מסיים $\frac{3}{5}$ מהעבודה, מסוע שני מסיים $\frac{2}{5}$ מהעבודה	ג	14
פועל אחד	א	15
פועל שני מסיים את העבודה לבדו ב- 20 שעות. $x = 20, \frac{8}{x} + \frac{8}{0.8x} = \frac{9}{10}$ פועל אחד מסיים את העבודה לבדו ב- 16 שעות,	ב	