מדינת ישראל

משרד החינוך

משימות והצעת תשובות

קיץ תשע"ד

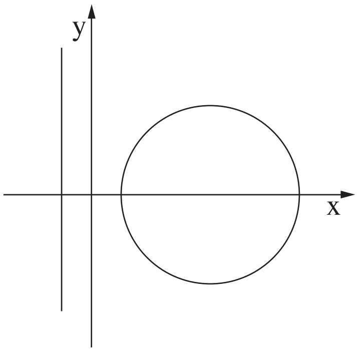
מ ת מ ט י ק ה

5 יחידות לימוד — שאלון שני

/המשך מעבר לדף/

גאומטריה אנליטית

משימה 1



נתון המעגל $(x-a)^2+y^2=R^2$

ונתון הישר $x=R-a$, $0<R<a$ (ראה ציור).

המקום הגאומטרי של מרכזי מעגלים,

המשיקים מבחוץ למעגל ולישר הנתונים,

הוא פרבולה שמשוואתה $y^2=16x$.

א. מצא את הערך של a .

ב. שני מעגלים שמרכזיהם M ו־ P משיקים מבחוץ למעגל ולישר הנתונים.

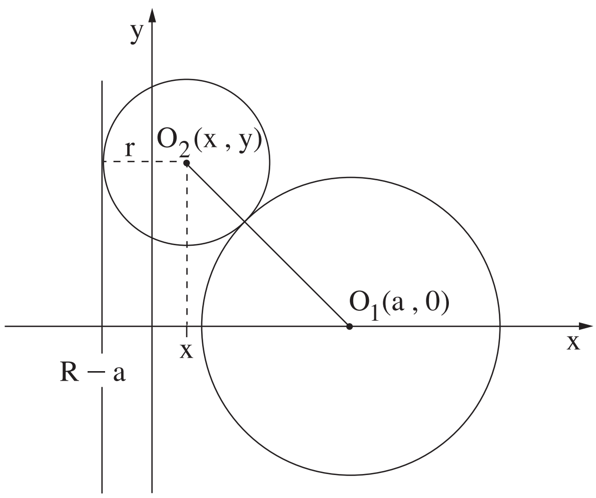
רדיוס כל אחד מן המעגלים האלה הוא $5-R$.

מצא את השיעורים של נקודת המפגש של שני הישרים המשיקים בנקודות M ו־ P

לפרבולה שמשוואתה $y^2=16x$.

הצעת תשובה למשימה 1

א.



נסמן: $O_2(x , y)$ — מרכז המעגל המשיק

$R-a<0$ ושיעור ה־ x של O_2 גדול מ־ 0 , לכן

רדיוס המעגל המשיק לישר ולמעגל הנתונים הוא: $r=x-(R-a)$ ראה ציור

$$\Downarrow$$

I. $r=a-R+x$

המרחק בין מרכז המעגל הנתון, $O_1(a , 0)$,

למרכז המעגל המשיק מקיים: II. $\sqrt{(x-a)^2+y^2}=r+R$ המרחק בין מרכזי מעגלים המשיקים זה לזה הוא סכום הרדיוסים שלהם.

לפי הנתון: III. $y^2=16x$

מהצבת I ו־ III ב־ II מקבלים: $(x-a)^2+16x=(a-R+x+R)^2$

$$\Downarrow$$

$4ax=16x \quad \Rightarrow \quad a=4$

/המשך בעמוד 3/

המשך תשובה למשימה 1.

ב. מצאנו בסעיף א כי רדיוס המעגל המשיק הוא: $r = a - R + x$

$\Downarrow$

מצאנו כי $a = 4$, לכן: $r = 4 - R + x$

$\Downarrow$

נציב את הנתון $r = 5 - R$: $5 - R = 4 - R + x$

$\Downarrow$

שיעור ה־ x של מרכז המעגל המשיק הוא: $x = 1$

נציב $x = 1$ במשוואת הפרבולה ונקבל
כי שיעור ה־ y של מרכז המעגל המשיק הוא: $y = \pm 4$

כלומר יש שתי נקודות על הפרבולה שמקיימות
את הנתון $r = 5 - R$, והן: $(1, 4)$, $(1, -4)$

על פי הנוסחה, משוואת המשיק לפרבולה
בנקודה $(1, 4)$ היא: $y = 2x + 2$

ומשוואת המשיק לפרבולה בנקודה $(1, -4)$ היא: $y = -2x - 2$

לכן, המשיקים נפגשים בנקודה: $(-1, 0)$

/המשך בעמוד 4/

וקטורים

משימה 2

נקודה A נמצאת במישור π_1 שמשוואתו היא $x - z - 2 = 0$.

נקודה B ונקודה C נמצאות במישור π_2 שמשוואתו היא $x - z - 12 = 0$.

א. מצא את הזווית בין ישר המאונך למישור π_1 ובין ציר ה־ y .

ב. נתון: הישר AC מקביל לישר שהצגתו הפרמטרית היא $\underline{x} = t(2\,, 0\,, -2)$.

מצא את האורך של AC . נמק.

ג. נתון גם: $\overrightarrow{BC} = (2\,, -1\,, c)$.

מצא את שטח המשולש ABC .

הצעת תשובה למשימה 2

א. וקטור הכיוון של ציר ה־ y : $(0\,, 1\,, 0)$

וקטור הכיוון של הישר המאונך למישור π_1 : $(1\,, 0\,, -1)$

הזווית α בין ציר ה־ y לישר המאונך למישור π_1 מקיימת:

$$\cos\alpha = \frac{|(0\,,1\,,0)\cdot(1\,,0\,,-1)|}{\sqrt{1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 90^{o}$$

ב. וקטור הכיוון של הישר המאונך למישור π_1 : $(1\,, 0\,, -1)$

$$\Downarrow$$

הישר $t(2\,, 0\,, -2)$ מקביל לישר המאונך ל־ π_1

$$\Downarrow$$

$\overrightarrow{AC}$ מקביל לישר $t(1\,, 0\,, -1)$, לכן: $\overrightarrow{AC} \perp \pi_1$

$$\Downarrow$$

אורך $\overrightarrow{AC}$ הוא המרחק בין המישורים π_1 ו־ π_2

$$\Downarrow$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \frac{|-2+12|}{\sqrt{1^2+0+1^2}} = 5\sqrt{2}$$

/המשך בעמוד 5/

המשך תשובה למשימה 2.

ג. מצאנו בסעיף ב:

$$\overrightarrow{AC} \perp \pi_1$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$$

ישר המאונך למישור מאונך לכל ישר במישור

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(2, 0, -2) \cdot (2, -1, c) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c = 2$$

$$\Downarrow$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

שטח המשולש ABC הוא:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3 = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

/המשך בעמוד 6/

מרוכבים

משימה 3

z הוא מספר מרוכב שונה מ־ 0.

א. אם שלושת המספרים $\frac{1}{z}$, $z+\frac{1}{z}$, z הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית,

מצא את z (מצא את כל הפתרונות).

ב. אם $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|$ ו־ $0^{o}<\arg(z)<90^{o}$,

מצא את $\arg(z+\frac{1}{z})$.

<u>הערה</u>: פתרון סעיף ב אינו תלוי בפתרון סעיף א.

הצעת תשובה למשימה 3

א. בסדרה חשבונית מתקיים:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)-z=\frac{1}{z}-\left(z+\frac{1}{z}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$z^2=-1$$
$$\Downarrow$$
$$z=\pm\sqrt{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$z=\pm i$$

ב. <u>דרך I</u>

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$$
$$\Downarrow$$
$$|z|^2=1$$
$$\Downarrow$$

ידוע כי $|z|^2=z\cdot\bar{z}$, לכן:

$$z\cdot\bar{z}=1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{z}=\bar{z}$$

אם $z=\cos\theta+i\sin\theta$, נקבל:

$$\bar{z}=\cos\theta-i\sin\theta$$
$$\Downarrow$$
$$z+\frac{1}{z}=z+\bar{z}=2\cos\theta+0\cdot i$$
$$\Downarrow$$

הזווית α שהמספר $z+\frac{1}{z}$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה־ x מקיימת:

$$tg\alpha=\frac{0}{2\cos\theta}=0$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha=0 \quad , \quad \alpha=180^{o}$$
$$\Downarrow$$

$2\cos\theta>0$ כי z ברביע הראשון, לכן:

$$\arg(z+\frac{1}{z})=0$$

/המשך בעמוד 7/

המשך תשובה למשימה 3.

דרך II

הערך המוחלט של z הוא: $|z| = r$

הערך המוחלט של $\frac{1}{z}$ הוא: $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r}$

לפי הנתון $\left|\frac{1}{z}\right| = |z|$, לכן: $r = \frac{1}{r}$

$\Downarrow$

$r = 1$

אם $z = \cos\theta + i\sin\theta$, נקבל: $\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta + 0 \cdot i$

$\Downarrow$

הזווית α שהמספר $z + \frac{1}{z}$ יוצר
עם הכיוון החיובי של ציר ה־ x מקיימת: $tg\alpha = \frac{0}{2\cos\theta} = 0$

$\Downarrow$

$\alpha = 0 \;\; , \;\; \alpha = 180^o$

$\Downarrow$

$2\cos\theta > 0$, לכן: $\arg(z + \frac{1}{z}) = 0$

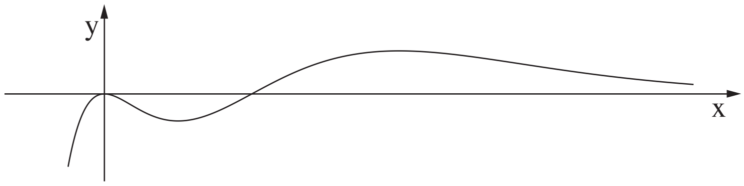
/המשך בעמוד 8/

חקירה של פונקציה מעריכית

משימה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = (x^3 - ax^2)e^{-x}$ (ראה ציור).

a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .



א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בראשית הצירים ובנקודה A .

ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A יוצר עם הצירים משולש ששטחו $\frac{8}{e^a}$.

מצא את הערך של a .

הצב את הערך של a שמצאת, וענה על הסעיפים ג-ה.

ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

קבע את סוגן על פי הגרף.

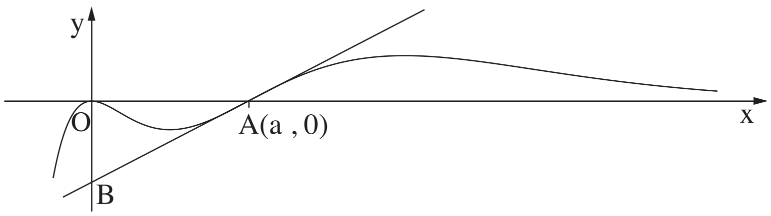
ד. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. היעזר בעובדה שהחלק החיובי של ציר ה־ x הוא אסימפטוטה אופקית של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .

הצעת תשובה למשימה 4

א. תחום ההגדרה: הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x

ב.



נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה־ x :
$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2(x-a) = 0 \quad , \quad e^{-x} > 0$$
$$\Downarrow$$
$$x = 0 \quad , \quad x = a$$
$$\Downarrow$$

שיעורי הנקודה A : $A(a\,,0)$

/המשך בעמוד 9/

המשך תשובה למשימה 4.

$$f(x)=\frac{x^3-ax^2}{e^x}$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x)=\frac{(3x^2-2ax)\cdot e^x-e^x(x^3-ax^2)}{e^{2x}}$$
$$\Downarrow$$
נצמצם ב־ e^x , ונקבל:
$$f'(x)=\frac{(3+a)x^2-x^3-2ax}{e^x}$$
$$\Downarrow$$
שיפוע המשיק בנקודה $A(a\,,0)$:
$$f'(a)=\frac{a^2}{e^a}$$

משוואת המשיק בנקודה $A(a\,,0)$:
$$y=\frac{a^2}{e^a}(x-a)=\frac{a^2}{e^a}x-\frac{a^3}{e^a}$$

שטח המשולש הוא:
$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|$$
$$\Downarrow$$
$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a^3}{e^a}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{8}{e^a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^4}{e^a}$$
$$\Downarrow$$
$$a=2$$

ג. נציב $a=2$:
$$f'(x)=\frac{5x^2-x^3-4x}{e^x}$$
$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ -x(x^2-5x+4)=0$$
$$\Downarrow$$
$$x=0\quad,\quad x=1\quad,\quad x=4$$
$$f(0)=0\ ,\ f(1)=-\frac{1}{e}\ ,\ f(4)=\frac{32}{e^4}$$

לפי הגרף: מקסימום ב־ $(0\,,0)$, $\left(4\,,\frac{32}{e^4}\right)$

מינימום ב־ $\left(1\,,-\frac{1}{e}\right)$

/המשך בעמוד 10/

המשך תשובה למשימה 4.

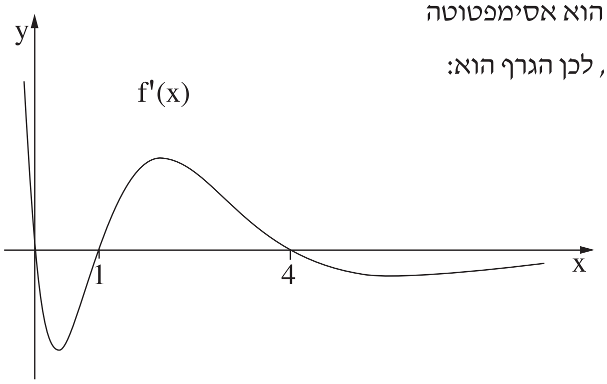
ד. לפי נקודות הקיצון של $f(x)$: $f'(0) = 0 \ , \ f'(1) = 0 \ , \ f'(4) = 0$

לפי תחומי עלייה וירידה של $f(x)$: $f'(x) > 0$ עבור $x < 0 \ , \ 1 < x < 4$

$f'(x) < 0$ עבור $0 < x < 1 \ , \ x > 4$

לפי הנתון הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה

של $f'(x)$ עבור $x > 0$, לכן הגרף הוא:



ה. $$S = -\int_0^1 f'(x)\,dx + \int_1^4 f'(x)\,dx = -\left[f(x)\right]_0^1 + \left[f(x)\right]_1^4 = -f(1) + f(0) + f(4) - f(1)$$

$$\Downarrow$$

$$S = \frac{1}{e} + 0 + \frac{32}{e^4} + \frac{1}{e}$$

$$\Downarrow$$

$$S = \frac{32}{e^4} + \frac{2}{e} = 1.32$$

/המשך בעמוד 11/

חקירה של פונקציה לוגריתמית
בעיית מינימום-מקסימום

משימה 5

הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2$

$g(x) = \ell n(ax)$

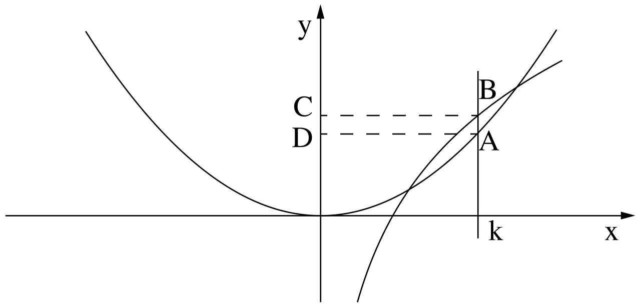
נפגשים בשתי נקודות.

a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

הישר $x = k$ חותך את גרף

הפונקציה $f(x)$ בנקודה A

ואת גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B .



ישר זה נמצא בין נקודות החיתוך של שני הגרפים (ראה ציור).

א. הסבר מדוע הערכים של k אינם יכולים להימצא בתחום $0 < k < \frac{1}{a}$.

דרך הנקודות B ו־ A העבירו מקבילים לציר ה־ x , החותכים את ציר ה־ y בנקודות C ו־ D בהתאמה (ראה ציור).

ב. מצא את הערך של k , שעבורו היקף המלבן ABCD הוא מקסימלי.

ג. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B המתקבלת עבור המלבן שהיקפו מקסימלי. נתון כי המשיק עובר בנקודה $(0 , 0)$.

מצא את הפונקציה $g(x)$.

הצעת תשובה למשימה 5

א. לפי הסרטוט: $g(x) > f(x)$ בתחום שבין נקודות החיתוך של שני הגרפים

$\Downarrow$

בתחום שבין נקודות החיתוך: $\ell n(ax) > x^2$

$\Downarrow$

$x^2 \geq 0$, לכן: $\ell n(ax) > 0$

$\Downarrow$

$ax > 1$

$\Downarrow$

$x > \frac{1}{a}$

$\Downarrow$

$x = k$, לכן: הערכים של k <u>לא</u> בתחום $0 < k < \frac{1}{a}$

/המשך בעמוד 12/

המשך תשובה למשימה 5.

ב. שיעורי ה־ x של A ושל D הם: $x_D = 0 \quad , \quad x_A = k$

$\Downarrow$

$AD = k$

שיעורי ה־ y של A ושל B הם: $y_B = \ell n(ak) \quad , \quad y_A = k^2$

$\Downarrow$

$AB = \ell n(ak) - k^2$

היקף המלבן ABCD : $P(k) = 2AD + 2AB$

$\Downarrow$

$P(k) = 2k + 2\ell n(ak) - 2k^2$

$\Downarrow$

$P'(k) = 2 + \frac{2a}{ak} - 4k = 2 + \frac{2}{k} - 4k$

$P'(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 + \frac{2}{k} - 4k = 0$

$\Downarrow$

$2k^2 - k - 1 = 0$

$\Downarrow$

$k = 1 \quad$ ($k = -\frac{1}{2}$ לא בתחום)

בדיקת מקסימום: $P''(k) = -\frac{2}{k^2} - 4$

$\Downarrow$

$P''(1) < 0$

$\Downarrow$

מקסימום ב־ $k = 1$

ג. שיעורי הנקודה B עבור $k = 1$ הם: $B(1 , \ell na)$

$g'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$

$\Downarrow$

שיפוע המשיק ל־ $g(x)$ בנקודה $B(1 , \ell na)$: $g'(1) = 1$

משוואת המשיק: $y - \ell na = x - 1$

$\Downarrow$

$y = x - 1 + \ell na$

המשיק עובר דרך $(0 , 0)$ לכן: $0 = 0 - 1 + \ell na$

$\Downarrow$

$a = e$

$\Downarrow$

$g(x) = \ell n(ex) = 1 + \ell nx$