מדינת ישראל

משרד החינוך

משימות והצעת תשובות

קיץ תשע"ד

מ ת מ ט י ק ה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

/המשך מעבר לדף/

בעיות תנועה

משימה 1

משאית יצאה מתחנה A ונסעה במהירות קבועה לכיוון תחנה B .

2 שעות אחרי היציאה הגיעה המשאית לתחנה C , הנמצאת בין A ל־ B ,

ואז הקטינה המשאית את מהירותה ל־ $\frac{1}{3}$ ממהירותה הקודמת.

המשאית הגיעה לתחנה B , 40 דקות אחרי השעה שבה הייתה מגיעה

אילו לא הקטינה את מהירותה.

למחרת יצאה המשאית מתחנה A באותה מהירות קבועה, וכשהגיעה למרחק של 14 ק"מ

אחרי התחנה C , הקטינה את מהירותה ל־ $\frac{1}{3}$ ממהירותה הקודמת.

הפעם הגיעה המשאית לתחנה B , 20 דקות אחרי השעה שבה הייתה מגיעה

אילו לא הקטינה את מהירותה.

א. אילו המשאית לא הקטינה את מהירותה, כמה שעות הייתה נמשכת הנסיעה שלה מ־ A ל־ B ?

ב. מצא את המהירות שהייתה למשאית לפני שהקטינה את מהירותה.

הצעת תשובה למשימה 1

נסמן: v — מהירות המשאית מ־ A עד B בלי להקטין מהירות

t — זמן הנסיעה של המשאית מ־ A ל־ B בלי להקטין מהירות

א.

	מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
מ־ A עד B בלי להקטין מהירות	v	t	tv
<u>יום אחד</u>			
מ־ A עד C	v	2	2v
מ־ C עד B	$\frac{v}{3}$	$t-2+\frac{40}{60}=t-\frac{4}{3}$	$(t-\frac{4}{3})\frac{v}{3}$

הדרך מ־ A עד B ביום אחד מקיימת:
$$tv = 2v + (t-\frac{4}{3})\frac{v}{3}$$
$$\Downarrow$$
$$t = \frac{7}{3} \text{ שעות}$$

/המשך בעמוד 3/

המשך תשובה למשימה 1.

ב.

	מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
<u>למחרת</u>			
מ־ A עד 14 ק"מ אחרי C	v	$2+\frac{14}{v}$	$(2+\frac{14}{v})v$
מ־ 14 ק"מ אחרי C עד B	$\frac{v}{3}$	$t-2-\frac{14}{v}+\frac{20}{60}$	$(t-\frac{14}{v}-\frac{5}{3})\frac{v}{3}$

למחרת הדרך מ־ A עד B מקיימת:

$$tv=(2+\frac{14}{v})v+(t-\frac{14}{v}-\frac{5}{3})\frac{v}{3}$$

$$\Downarrow$$

נציב $t=\frac{7}{3}$ ונצמצם ב־ v, ונקבל:

$$\frac{7}{3}=2+\frac{14}{v}+(\frac{7}{3}-\frac{14}{v}-\frac{5}{3})\frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

$v=$ 84 קמ"ש

/המשך בעמוד 4/

סדרה חשבונית

משימה 2

נתונה הסדרה: $1 \ , \ -5 \ , \ 9 \ , \ -13 \ , \ 17 \ , \ -21 \ , \ \dots$

הערכים המוחלטים של איברי הסדרה מהווים סדרה חשבונית.

האיברים במקומות הזוגיים בסדרה הם שליליים.

נתון כי הסכום של $2n-1$ האיברים הראשונים בסדרה הנתונה הוא 101 .

מצא את הסכום של n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי־זוגיים בסדרה הנתונה.

הצעת תשובה למשימה 2

האיברים במקומות האי־זוגיים מהווים סדרה חשבונית שהפרשה 8 ,

לכן סכום n האיברים הראשונים במקומות האי־זוגיים: $S_{\text{אי-זוגי}} = \frac{n}{2}(2\cdot 1 + 8(n-1)) = n(4n-3)$

$\Downarrow$

האיברים במקומות הזוגיים מהווים סדרה חשבונית שהפרשה -8 ,

לכן סכום $n-1$ האיברים הראשונים במקומות הזוגיים: $S_{\text{זוגי}} = \frac{n-1}{2}(-2\cdot 5 - 8(n-2)) = (n-1)(3-4n)$

$\Downarrow$

סכום $2n-1$ האיברים הראשונים בסדרה הנתונה: $S_{\text{אי-זוגי}} + S_{\text{זוגי}} = 4n-3$

לפי הנתון: $S_{2n-1} = 101$

$\Downarrow$

$101 = 4n - 3$

$\Downarrow$

מספר האיברים
במקומות האי־זוגיים: $n = 26$

סכום 26 האיברים הראשונים
במקומות האי־זוגיים: $S_{\text{אי-זוגי}} = n(4n-3) = 26(4\cdot 26 - 3)$

$\Downarrow$

$S_{\text{אי-זוגי}} = 2626$

/המשך בעמוד 5/

הסתברות

משימה 3

עורכים את הניסוי שלפניך.

בכד יש 10 כדורים: 6 כדורים אדומים ו־ 4 כדורים שחורים.

מוציאים באקראי כדור מהכד:

אם הכדור הוא אדום, משאירים אותו בחוץ ומוסיפים לכד x כדורים אדומים,

ואם הכדור הוא שחור, מחזירים אותו לכד.

לאחר מכן מוציאים באקראי כדור נוסף מהכד.

ההסתברות שלשני הכדורים שמוציאים יהיה אותו הצבע היא 0.56 .

א. חשב את x .

ב. ידוע שלפחות אחד מהכדורים שהוצאו היה אדום.

מהי ההסתברות שבהוצאה השנייה הכדור שהוצא היה שחור?

ג. חוזרים n פעמים על הניסוי שתואר בפתיח.

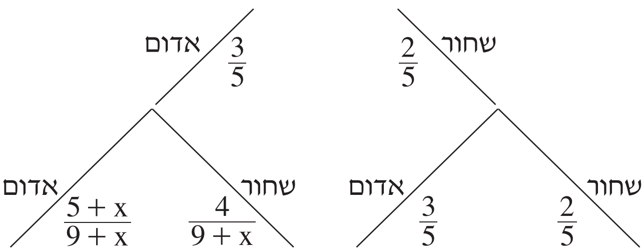
מהי ההסתברות להוציא שני כדורים אדומים בניסוי אחד בדיוק? (הבע באמצעות n .)

הצעת תשובה למשימה 3

א. ההסתברות להוציא כדור שחור מהכד: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

ההסתברות להוציא כדור אדום מהכד: $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

מכאן נקבל את העץ:



ההסתברות שלשני הכדורים יהיה אותו צבע היא:

$$P(\text{שחור, שחור}) + P(\text{אדום, אדום})$$

$$\Downarrow$$

על פי העץ נקבל:

$$0.56 = \frac{3}{5} \cdot \frac{5+x}{9+x} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$x = 3$$

/המשך בעמוד 6/

המשך תשובה למשימה 3.

ב. ההסתברות שלפחות אחד מהכדורים הוא אדום היא:

$$P\left(\text{לפחות אחד אדום}\right) = 1 - P\left(\text{שחור, שחור}\right)$$

$$\Downarrow$$

על פי העץ נקבל:

$$P\left(\text{לפחות אחד אדום}\right) = 1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\text{לפחות אחד אדום}\right) = 0.84$$

$$P\left(\text{כדור שני שחור} \,/\, \text{לפחות אחד אדום}\right) = \frac{P\left(\text{לפחות אחד אדום} \cap \text{כדור שני שחור}\right)}{P\left(\text{לפחות אחד אדום}\right)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9+x}}{0.84}$$

$$\Downarrow$$

נציב $x = 3$, ונקבל:

$$P\left(\text{כדור שני שחור} \,/\, \text{לפחות אחד אדום}\right) = \frac{5}{21} = 0.238$$

ג. ההסתברות להוציא 2 כדורים אדומים בניסוי אחד על פי העץ:

$$P\left(\text{2 אדומים}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5+x}{9+x} = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3} = 0.4$$

ההסתברות להצלחה אחת מבין n פעמים היא:

$$P_n(1) = \frac{n!}{(n-1)!}\times 0.4\times 0.6^{n-1}$$

$$\Downarrow$$

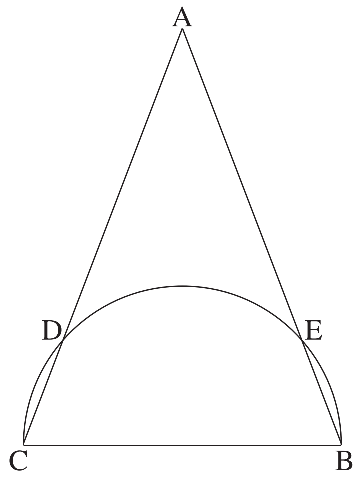
$\frac{n!}{(n-1)!} = n$, לכן:

$$P_n(1) = n\times 0.4\times\frac{0.6^n}{0.6} = \frac{2}{3}n\times 0.6^n$$

/המשך בעמוד 7/

גאומטריה במישור

משימה 4



נתון משולש שווה־שוקיים ABC $(AB = AC)$.

הבסיס BC הוא קוטר של חצי מעגל.

חצי המעגל חותך את השוקיים AB ו־ AC

בנקודות E ו־ D בהתאמה (ראה ציור).

א. הוכח כי המרובע $BCDE$ הוא טרפז שווה־שוקיים.

ב. נתון: $DC = \frac{1}{3}AD$, רדיוס המעגל הוא R .

הוכח כי $R = \sqrt{2}\,DC$.

הצעת תשובה למשימה 4

א. $\sphericalangle CDB = \sphericalangle BEC = 90^o$ זוויות היקפיות הנשענות על קוטר הן ישרות

$\sphericalangle DCB = \sphericalangle EBC$ זוויות הבסיס במשולש שווה־שוקיים שוות

$\sphericalangle DBC = 180^o - (90^o + \sphericalangle DCB)$, $\sphericalangle ECB = 180^o - (90^o + \sphericalangle EBC)$

$\Downarrow$

$\sphericalangle ECB = \sphericalangle DBC$

צלע משותפת CB

מכאן: $\triangle CDB \cong \triangle BEC$ על פי ז.צ.ז.

$\Downarrow$

I. $DC = EB$

$\Downarrow$

$\sphericalangle EDB = \sphericalangle DBC$ זוויות היקפיות הנשענות על מיתרים שווים מאותו צד הן שוות

$\Downarrow$

II. $DE \parallel CB$ אם זוג זוויות מתחלפות שוות, הישרים מקבילים

על פי I ו־ II : $BCDE$ טרפז שווה־שוקיים

/המשך בעמוד 8/

המשך תשובה למשימה 4.

ב. מצאנו בסעיף א: $\sphericalangle CDB = 90^o$

$\Downarrow$

במשולש ישר־הזווית CDB
לפי משפט פיתגורס מתקיים: $\text{I.}\quad BD^2 = (2R)^2 - DC^2$

על פי הנתון $AD = 3DC$ נקבל: $AC = AB = 4DC$

במשולש ישר־הזווית ADB
לפי משפט פיתגורס מתקיים: $BD^2 = AB^2 - AD^2$

$\Downarrow$

$\text{II.}\quad BD^2 = (4DC)^2 - (3DC)^2 = 7DC^2$

מ־ I ו־ II נקבל: $(2R)^2 - DC^2 = 7DC^2$

$\Downarrow$

$R > 0$, לכן: $R = \sqrt{2}\,DC$

/המשך בעמוד 9/

טריגונומטריה

משימה 5

במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a, והזווית מולה היא α.

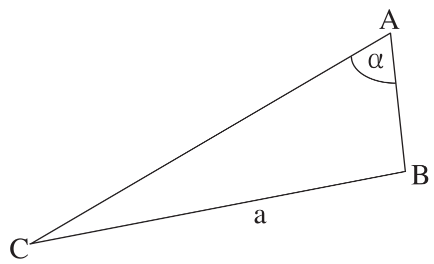
נתון: $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$.

א. הבע את שטח המשולש ABC באמצעות a ו־ α.

ב. נתון גם: $\alpha = 60^{o}$.

מצא את הזוויות האחרות במשולש ABC.

הצעת תשובה למשימה 5



א. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin\alpha$

$\Downarrow$

לפי הנתון $AC = 3AB$, לכן: I. $S_{\triangle ABC} = \frac{3}{2} AB^2 \sin\alpha$

לפי משפט הקוסינוסים: $a^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$

$\Downarrow$

נציב $AC = 3AB$, ונקבל: $a^2 = AB^2 + (3AB)^2 - 2AB \cdot (3AB) \cdot \cos\alpha$

$\Downarrow$

II. $AB^2 = \frac{a^2}{10 - 6\cos\alpha}$

מ־ I ו־ II נקבל: $S_{\triangle ABC} = \frac{3a^2 \sin\alpha}{20 - 12\cos\alpha}$

/המשך בעמוד 10/

המשך תשובה למשימה 5.

ב. בסעיף א קיבלנו: $AB = \dfrac{a}{\sqrt{10 - 6\cos\alpha}}$

$$\Downarrow$$

נציב $\alpha = 60^o$ ונקבל: $AB = \dfrac{a}{\sqrt{7}}$

לפי משפט הסינוסים נקבל: $\dfrac{AB}{\sin \sphericalangle ACB} = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$

$$\Downarrow$$

נציב $BC = a$, $\alpha = 60^o$,
$AB = \dfrac{a}{\sqrt{7}}$, ונקבל: $\sin \sphericalangle ACB = \dfrac{\frac{a}{\sqrt{7}} \cdot \sin 60^o}{a} = \dfrac{\sin 60^o}{\sqrt{7}}$

$$\Downarrow$$

$\sphericalangle ACB \neq 180^o - 19.1^o$ כי $\alpha = 60^o$,

לכן: $\sphericalangle ACB = 19.1^o$

$$\sphericalangle ABC = 180^o - (60^o + 19.1^o) = 100.9^o$$

/המשך בעמוד 11/

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות

משימה 6

נתונה הפונקציה $f(x) = 2x + 8\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin(2x)$, בתחום $0 \le x \le \pi$.

א. (1) הראה כי $f'(x) = 4\sin^2 x - 4\sin x$.

(2) בתחום הנתון, מצא את נקודות הקיצון המוחלט של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. (1) בתחום הנתון, סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) נתונה המשוואה $\sin^2 x - \sin x = k$, $0 \le x \le \pi$.

מצא עבור אילו ערכים של k יש פתרון למשוואה.

ג. בתחום הנתון, מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

על ידי ציר ה־ y , על ידי הישר המשיק לגרף של פונקציית הנגזרת בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$

ועל ידי הישר $x = \pi$.

הצעת תשובה למשימה 6

א. (1) הנגזרת של $f(x)$ היא: $f'(x) = 2 + 16\cos\frac{x}{2}\cdot(-\sin\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{2} - 2\cos(2x)$

$\Downarrow$

נשתמש בזהויות $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, ונקבל: $f'(x) = 2 - 4\sin x - 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$\Downarrow$

נציב $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ונקבל: $f'(x) = -4\sin x + 4\sin^2 x$

(2) הנגזרת של $f'(x)$ היא: $f''(x) = -4\cos x + 8\sin x\cos x = 4\cos x(2\sin x - 1)$

בנקודות הקיצון של $f'(x)$ צריך להתקיים: $f''(x) = 0$

$\Downarrow$

$4\cos x = 0 \quad , \quad 2\sin x - 1 = 0$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

בתחום $0 \le x \le \pi$: $x = \frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{6}\ ,\ x = \frac{5\pi}{6}$

מכאן:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f'(x)$	0	-1	0	-1	0
	↘	↗	↘	↗	

$\Downarrow$

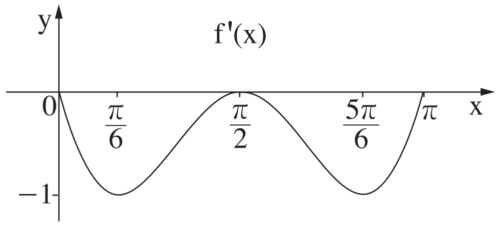
ל־ $f'(x)$ מינימום מוחלט בנקודות: $\left(\frac{5\pi}{6}, -1\right) \quad \left(\frac{\pi}{6}, -1\right)$

מקסימום מוחלט בנקודות: $(\pi, 0) \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad (0, 0)$

/המשך בעמוד 12/

המשך תשובה למשימה 6.

ב. (1)



(2) $f'(x) = 4\sin^2 x - 4\sin x$

$\Downarrow$

$f'(x) = 4k$

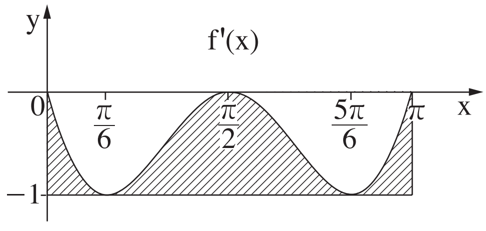
יש פתרון כאשר הישר $y = 4k$ חותך את הגרף של $f'(x)$, ולפי הגרף של $f'(x)$ זה מתקיים עבור:

$-1 \le 4k \le 0$

$\Downarrow$

$-\frac{1}{4} \le k \le 0$

ג. השטח המבוקש הוא השטח המקווקו בציור:



$\Downarrow$

השטח המבוקש הוא אינטגרל של הפרש הפונקציות $f'(x)$ ו־ $y = -1$, לכן:

$$S = \int_0^{\pi} [f'(x) + 1]\,dx = [f(x) + x]_0^{\pi} = f(\pi) + \pi - f(0)$$

$$S = 2\pi + \pi - 8 = 3\pi - 8$$

/המשך בעמוד 13/

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות שורש ושל פונקציות מנה

משימה 7

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-15}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

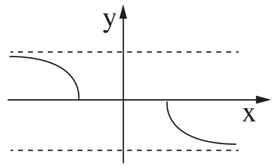
(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

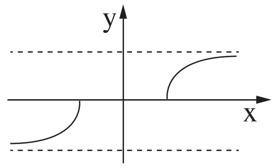
(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{\sqrt{x^2-15}}{x}$.

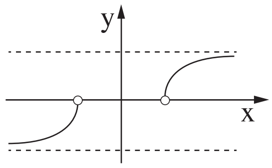
לפניך חמישה גרפים I-V .



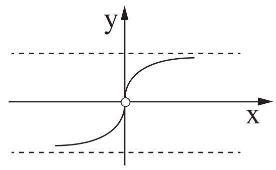
III



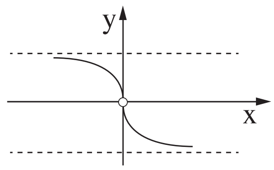
II



I



V



IV

איזה גרף מתאר את הפונקציה $g(x)$? נמק.

ג. עבור אילו ערכי x מתקיים האי־שוויון $\frac{f'(x)}{g'(x)}<0$? נמק.

הצעת תשובה למשימה 7

א. (1) צריך להתקיים: $x^2-15>0$

$\Downarrow$

תחום ההגדרה של $f(x)$: $x<-\sqrt{15}\quad,\quad x>\sqrt{15}$

(2) אסימפטוטות אנכיות של $f(x)$: $x=-\sqrt{15}\quad,\quad x=\sqrt{15}$

אסימפטוטות אופקיות של $f(x)$: $y=-1\quad,\quad y=1$

/המשך בעמוד 14/

המשך תשובה למשימה 7.

(3) $$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-15} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-15}}}{x^2-15} = -\frac{15}{(x^2-15)\sqrt{x^2-15}}$$

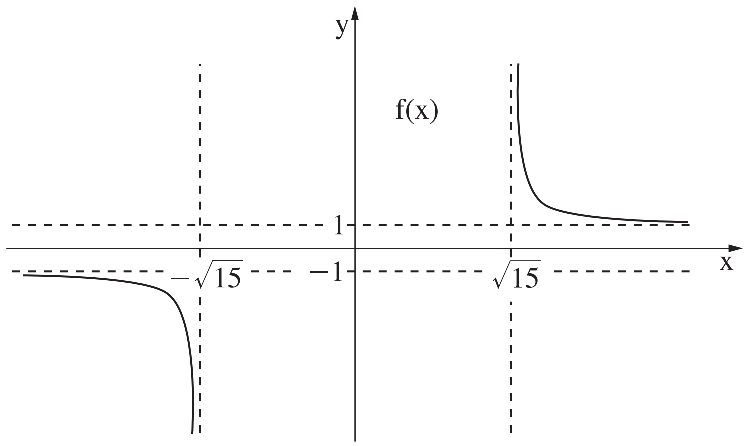
בתחום ההגדרה של $f(x)$ מתקיים $x^2-15>0$,

לכן בתחום ההגדרה של $f(x)$: $f'(x) < 0$

$\Downarrow$

$f(x)$ יורדת בתחום ההגדרה

(4)



ב. עבור $g(x)$ צריך להתקיים: $x^2-15\geq 0$, $x\neq 0$

$\Downarrow$

תחום ההגדרה של $g(x)$: $x\leq -\sqrt{15}$, $x\geq\sqrt{15}$

$\Downarrow$

גרפים I, IV ו־ V לא מתאימים

$g(x)$ היא פונקציה הפכית ל־ $f(x)$

$\Downarrow$

בתחום שבו $f(x)$ יורדת, $g(x)$ עולה

$\Downarrow$

$g(x)$ עולה בתחומי ההגדרה שלה

$\Downarrow$

גרף II הוא הנכון

ג. $f(x)$ יורדת בתחום: $x>\sqrt{15}$, $x<-\sqrt{15}$

$\Downarrow$

$f'(x)<0$ בתחום: $x>\sqrt{15}$, $x<-\sqrt{15}$

$g(x)$ עולה בתחום: $x>\sqrt{15}$, $x<-\sqrt{15}$

$\Downarrow$

$g'(x)>0$ בתחום: $x>\sqrt{15}$, $x<-\sqrt{15}$

מכאן: $\frac{f'(x)}{g'(x)}<0$ עבור: $x>\sqrt{15}$, $x<-\sqrt{15}$

/המשך בעמוד 15/

בעיות מינימום / מקסימום

משימה 8

נתונה הפרבולה $y = x^2 - 12$.

נקודה B נמצאת על הפרבולה ברביע הרביעי.

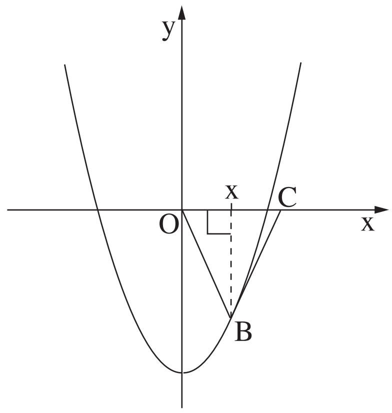
נקודה C נמצאת על ציר ה־ x כך ש־ $BC = BO$, O — ראשית הצירים.

(נקודה C שונה מנקודה O .)

מצא את השטח המוגבל על ידי הפרבולה, על ידי ציר ה־ y ועל ידי הקטע BO ,

כאשר השטח של המשולש BCO הוא מקסימלי.

הצעת תשובה למשימה 8



נקודה B על הפרבולה $y = x^2 - 12$ (ראה ציור),

לכן שיעורי הנקודה B הם: $B(x , x^2 - 12)$

משולש BOC הוא שווה־שוקיים,

והנקודה B ברביע הרביעי, לכן: בסיס המשולש הוא $OC = 2x$, גובה המשולש הוא $12 - x^2$

$\Downarrow$

שטח המשולש BOC הוא: $S(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (12 - x^2) = 12x - x^3$

$S'(x) = 12 - 3x^2$

$x \neq -2$ כי B ברביע הרביעי, לכן: $S'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

/המשך בעמוד 16/

המשך תשובה למשימה 8.

בדיקת מקסימום:

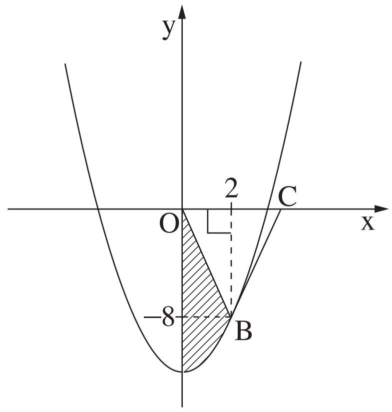
$$S''(x) = -6x$$

$$\Downarrow$$

$$S''(2) < 0$$

שיעורי הנקודה B כאשר השטח מקסימלי: $B(2, -8)$

השטח המבוקש הוא השטח המקווקו בציור:



$$\Downarrow$$

$$S = -\int_0^2 (x^2 - 12)\,dx - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = -\left[\frac{x^3}{2} - 12x\right]_0^2 - 8$$

$$\Downarrow$$

$$S = 13\frac{1}{3}$$