

מדינת ישראל

משרד החינוך

משימות והצעת תשובות

קיץ תשע"ד

מתמטיקה

4 יחידות לימוד — שאלון שני

סדרות

משימה 1

- מחשב שמחירו 10,000 שקלים נמכר בתשלומים חודשיים לא שווים.
 כל תשלום חודשי גדול בסכום קבוע מהתשלום של החודש שלפניו.
 הסכום של עשרת התשלומים הראשונים הוא 25% ממחיר המחשב.
 הסכום של חמשת התשלומים שאחריהם הוא 20% ממחיר המחשב.
 א. מצא את התשלום הראשון.
 ב. מצא בכמה תשלומים חודשיים נמכר המחשב.

הצעת תשובה למשימה 1

- א. נסמן ב- a_n את התשלום בחודש ה- n .
 נתון שהסדרה היא חשבונית עולה.

הסכום של עשרת התשלומים הראשונים
 מהווה 25% ממחיר המחשב, לכן:

$$S_{10} = 0.25 \cdot 10,000 = 2500 \text{ שקלים}$$

דבר I:

הסכום של חמשת התשלומים הבאים אחריהם
 מהווה 20% ממחיר המחשב, לכן:

$$S_{15} - S_{10} = 0.2 \cdot 10,000 = 2000 \text{ שקלים}$$

⇓

$$S_{15} = 4500 \text{ שקלים}$$

הסכום של חמשה-עשר התשלומים הראשונים הוא:

$$\text{I } S_{10} = \frac{(2a_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 2500$$

⇓

$$2a_1 + 9d = 500$$

$$\text{II } S_{15} = \frac{(2a_1 + 14d) \cdot 15}{2} = 4500$$

⇓

$$2a_1 + 14d = 600$$

⇓

$$a_1 = 160, \quad d = 20$$

מ- I ו- II נקבל:

$$a_1 = 160 \text{ שקלים}$$

התשלום הראשון הוא:

המשך תשובה למשימה 1.

דבר II :

הסכום של חמשת התשלומים הבאים אחריהם

מהווה 20% ממחיר המחשב, לכן: $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 2000$ שקלים

הסכום של עשרת התשלומים הראשונים

I $S_{10} = \frac{(2a_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 2500$ הוא:

הסכום של חמשת התשלומים

II $S_{\text{הבאים 5 אחריהם}} = \frac{(2a_{11} + 4d) \cdot 5}{2} = 2000$ הבאים אחריהם הוא:

$$\begin{cases} 2a_1 + 9d = 500 \\ 2a_1 + 24d = 800 \end{cases}$$
 מ-I ו-II נקבל:

$$\Downarrow$$

 $d = 20$

$a_1 = 160$

התשלום הראשון הוא: 160 שקלים

ב. סכום כל התשלומים מקיים: $S_n = \frac{(2 \cdot 160 + (n-1) \cdot 20)n}{2} = 10,000$

$$\Downarrow$$

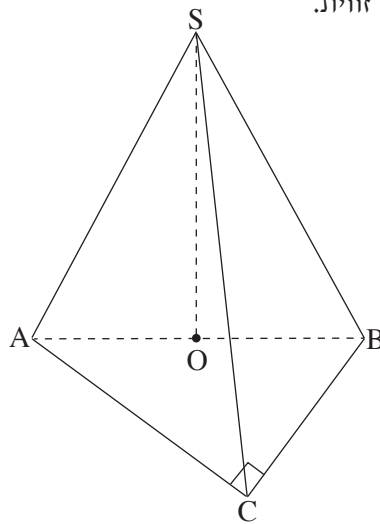
 $n^2 + 15n - 1000 = 0$

$n = -40$ או $n = 25$

המחשב נמכר ב-25 תשלומים לכן, $n > 0$

טריגונומטריה במרחב

משימה 2



בציור שלפניך פירמידה ישרה $SABC$ שבסיסה משולש ישר-זווית.

נתון: $\angle ASB = 100^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$BC = 3a$ ס"מ, $AC = 4a$ ס"מ.

א. הנקודה O היא אמצע AB .

הסבר מדוע SO הוא גובה הפירמידה.

ב. (1) הבע באמצעות a את

רדיוס המעגל החוסם את הבסיס.

(2) הבע באמצעות a את גובה הפירמידה.

(3) חשב את הזווית שבין המקצוע SC

לבסיס הפירמידה.

ג. נתון: נפח הפירמידה הוא 113.28 סמ"ק.

מצא את הערך של a .

הצעת תשובה למשימה 2

א. בפירמידה ישרה עקב האנך היורד מראש הפירמידה לבסיסה

הוא מרכז המעגל החוסם את הבסיס.

הפירמידה הנתונה $SABC$ היא פירמידה ישרה.

בסיס הפירמידה הוא משולש ישר-זווית ABC .

במשולש נקודת החיתוך של שלושת האנכים האמצעיים היא מרכז המעגל החוסם את המשולש, לכן

מרכז המעגל החוסם את בסיס הפירמידה ABC הוא אמצע היתר.

מכאן נובע: הנקודה O היא עקב האנך, ו- SO הוא גובה הפירמידה.

ב. (1) משולש ABC הוא משולש ישר-זווית.

לכן על פי משפט פיתגורס

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \quad \text{מתקיים:}$$

\Downarrow

$$AB^2 = (3a)^2 + (4a)^2 = 25a^2$$

\Downarrow

$$AB = 5a \text{ ס"מ}$$

AB הוא קוטר,

$$R = \frac{AB}{2} = 2.5a \text{ ס"מ} \quad \text{לכן רדיוס המעגל החוסם הוא:}$$

המשך תשובה למשימה 2.

(2) משולש ASB שווה שוקיים (בפירמידה ישרה, כל המקצועות הצדדיים שווים) $SA = SB = SC$

↓

SO הוא גם גובה לבסיס AB במשולש שווה-שוקיים ASB ולכן חוצה את זווית הראש ASB

↓

$$\sphericalangle ASO = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

במשולש ישר-זווית SOA מתקיים: $\tan 50^\circ = \frac{AO}{SO} = \frac{2.5a}{SO}$

↓

$$\frac{2.5a}{\tan 50^\circ} = SO$$

↓

$$SO = 2.098a \text{ ס"מ}$$

דרכ 3

במשולש ישר-זווית $\triangle SOC$ ($\sphericalangle SOC = 90^\circ$)

מתקיים: $\tan(\sphericalangle SCO) = \frac{SO}{OC}$

$$\tan(\sphericalangle SCO) = \frac{2.098a}{2.5a} = 0.8392$$

↓

$$\sphericalangle SCO = 40^\circ$$

דרכ II

בפירמידה ישרה כל המקצועות הצדדיים יוצרים

זוויות שוות עם בסיס הפירמידה,

לכן בפירמידה SABC מתקיים:

$$\sphericalangle SCO = \sphericalangle SBO = \sphericalangle SAO$$

במשולש ישר זווית SAO מתקיים: ($\sphericalangle SAO = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$) (סכום זוויות במשולש הוא 180°)

↓

$$\sphericalangle SCO = 40^\circ$$

ג. נפח הפירמידה הוא: $V = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot SO}{3} = 113.28$

שטח הבסיס ABC הוא: $S_{\triangle ABC} = \frac{4a \cdot 3a}{2} = 6a^2$

↓

נפח הפירמידה מקיים: $V = \frac{6a^2 \cdot 2.098a}{3} = 113.28$

↓

$$a^3 = 27$$

↓

ערכו של a הוא: $a = 3 \text{ ס"מ}$

חקירת פונקציה לוגריתמית

משימה 3

נתונה הפונקציה $f(x) = \log_2(x^2 + 4x + 5) - 2\log_4 10$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- השתמש בחוקי הלוגריתמים, ומצא ללא שימוש במחשבון את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה. נמק.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

הצעת תשובה למשימה 3

א. הפונקציה $f(x) = \log_2(x^2 + 4x + 5) - 2\log_4 10$

מוגדרת עבור כל ערכי x המקיימים:

$$x^2 + 4x + 5 > 0$$

דבר I:

$$a = 1 > 0 \quad \text{וגם} \quad \Delta = 16 - 20 < 0$$

↓

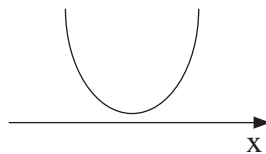
$$x^2 + 4x + 5 > 0 \quad \text{לכל } x$$

דבר II:

למשוואה $x^2 + 4x + 5 = 0$ אין פתרון

כי $\Delta < 0$ וגם $a > 0$

גרף הפרבולה $y = x^2 + 4x + 5$ חיובי לכל x
(ראה ציור).



הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x

המשך תשובה למשימה 3.

ב. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y :

$$f(0) = \log_2(0^2 + 4 \cdot 0 + 5) - 2\log_4 10$$

$$f(0) = \log_2 5 - \frac{2\log_2 10}{\log_2 4} \quad \text{נעבור למשל לבסיס 2:}$$

$$f(0) = \log_2 5 - \log_2 10 \quad \text{חוקי הלוגריתמים:}$$

$$f(0) = \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = -1$$

↓

$$f(0) = -1$$

נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y היא: $(0, -1)$

מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x : $f(x) = 0$

$$\log_2(x^2 + 4x + 5) - 2\log_4 10 = 0$$

↓

$$\log_2(x^2 + 4x + 5) = \log_2 10$$

↓

$$x^2 + 4x + 5 = 10$$

↓

$$x = 1 \quad \text{או} \quad x = -5$$

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

$(1, 0)$ ו- $(-5, 0)$

עם ציר ה- x הן:

המשך תשובה למשימה 3.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5}$$

ג. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא:

$$2x + 4 = 0$$

נבדוק עבור אילו ערכים של x הנגזרת מתאפסת:

$$x = -2$$

נקודה "חשודה" לקיצון היא:

$$x^2 + 4x + 5 > 0, \ln 2 > 0 \text{ לכל } x$$

המכנה חיובי לכל x כי מתקיים:

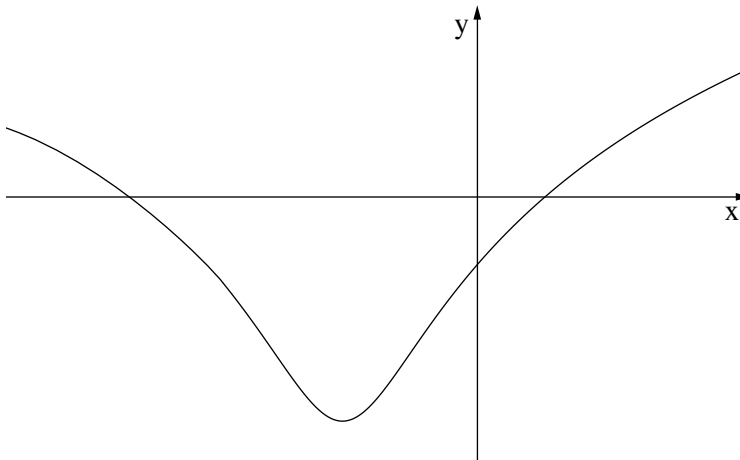
לכן:

$$\Downarrow$$

x	$x < -2$	-2	$x > -2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	נקודת מינימום	\nearrow

נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ היא: $(-2, -\log_2 10)$

ד. סרטוט גרף הפונקציה $f(x)$:



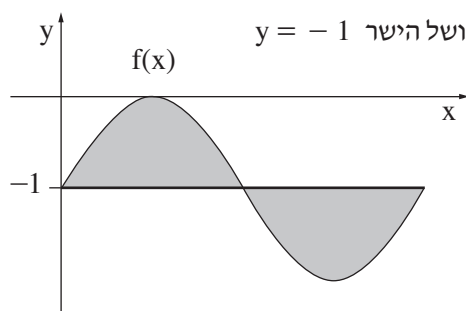
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות

משימה 4

נתון כי $f'(x) = 2 \cos(2x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

א. בתחום הנתון, מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. בתחום הנתון, הישר $y = 0$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה. מצא את הפונקציה $f(x)$.



ג. בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x)$ ושל הישר $y = -1$. בתחום $0 \leq x \leq \pi$

בתחום הנתון מצא:

(1) את נקודות החיתוך של גרף

הפונקציה $f(x)$ עם הישר $y = -1$.

(2) את השטח המוגבל על ידי

גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הישר $y = -1$ (השטח האפור בציור).

הצעת תשובה למשימה 4

א. הנקודות הפנימיות ה"חשודות"

לקיצון של הפונקציה $f(x)$

הן נקודות שבהן הנגזרת $f'(x)$ מתאפסת.

$$f'(x) = 0$$

נמצא את הנקודות שבהן

הנגזרת מתאפסת בתחום $0 < x < \pi$:

$$2 \cos(2x) = 0$$

\Downarrow

$$\cos(2x) = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

\Downarrow

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \quad \text{פתרון כללי: } k \text{ מספר שלם}$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{3}{4}\pi$$

הפתרונות בתחום $0 < x < \pi$ הם:

בדיקת סימני הנגזרת $f'(x)$

בתחום $0 < x < \pi$:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5\pi}{6}$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	נקודת מקסימום	\searrow	נקודת מינימום	\nearrow

\Downarrow

$x = \frac{\pi}{4}$ שיעור ה- x של נקודת המקסימום הפנימית הוא:

$x = \frac{3}{4}\pi$ שיעור ה- x של נקודת המינימום הפנימית הוא:

המשך תשובה למשימה 4.

ב. $y = 0$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום

שיעור ה- x של נקודת המקסימום הוא: $\frac{\pi}{4}$

לכן נקודת המקסימום היא:

$$\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

$f(x)$ היא פונקציה קדומה

ל- $f'(x)$ ולכן:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2 \cos(2x) dx = \sin(2x) + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + C = 0$$

הצבה של נקודת המקסימום ב- $f(x)$:

$$1 + C = 0$$

↓

$$C = -1$$

הערך של C הוא:

↓

$$f(x) = \sin(2x) - 1$$

הפונקציה $f(x)$ היא:

ג. (1) מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם הישר $y = -1$:

$$\sin(2x) - 1 = -1$$

$$\sin(2x) = 0$$

$$2x = \pi k$$

פתרון כללי:

$$x = \frac{\pi k}{2} \quad k \text{ מספר שלם}$$

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

והישר $y = -1$ הן:

$$(0, -1), \left(\frac{\pi}{2}, -1\right), (\pi, -1)$$

המשך תשובה למשימה 4.

(2) חלקו של השטח האפור נמצא מעל הישר $y = -1$ וחלקו נמצא מתחת לישר $y = -1$

$$\text{השטח האפור} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - (-1))dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1 - f(x))dx$$

$$\text{השטח האפור} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2x))dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin(2x))dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx = \left. \frac{-\cos(2x)}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos \pi}{2} + \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

נחשב כל שטח בנפרד:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin(2x) dx = \left. \frac{\cos(2x)}{2} \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\cos 2\pi}{2} - \frac{\cos \pi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\text{השטח האפור} = 1 + 1 = 2$$

גדילה ודעיכה

משימה 5

- ב' 1/1/2008 הייתה בבִּרְכַת דגים כמות מסוימת של דגים.
 כמות הדגים גדלה באחוז קבוע כל שנה.
 ב' 1/1/2011 כמות הדגים בברכה הייתה גדולה ב' 33.1% מכמות הדגים שהייתה בה
 ב' 1/1/2008.
 א. מצא את אחוז הגידול השנתי של כמות הדגים.
 ב' 1/1/2011 מכרו מחצית מכמות הדגים שהייתה בברכה.
 ב. אם כמות הדגים שנשארה בברכה תמשיך לגדול באותו אחוז קבוע כל שנה,
 כעבור כמה שנים מתאריך 1/1/2011 תגיע כמות הדגים בברכה לאותה כמות שהייתה
 לפני המכירה ב' 1/1/2011?
 בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.
 ג. לאחר שמכרו ב' 1/1/2011 מחצית מכמות הדגים שהייתה בברכה, החליטו לשנות
 את התזונה של הדגים.
 לאחר השינוי, כמות הדגים גדלה באחוז קבוע חדש כל שנה.
 לפי אחוז הגידול השנתי החדש, כמות הדגים תגיע לאותה כמות שהייתה ב' 1/1/2011
 לפני המכירה, בשנתיים פחות ממספר השנים שחישבת בסעיף ב.
 מצא את אחוז הגידול השנתי החדש.

הצעת תשובה למשימה 5

- א. נסמן: ב' $f(t)$ את כמות הדגים בברכה כעבור t שנים מהתאריך 1/1/2008,
 וב' a את מקדם הגדילה השנתי.

$$f(t) = f(0) \cdot a^t \quad \text{מתקיים:}$$

כעבור 3 שנים בתאריך 1/1/2011
 הכמות ההתחלתית גדלה ב' 33.1%,

$$1.331 \cdot f(0) = f(0) \cdot a^3 \quad \text{לכן מתקיים:}$$

\Downarrow

$$1.331 = a^3$$

$$\sqrt[3]{1.331} = a$$

$$1.1 = a$$

\Downarrow

$$10\%$$

אחוז הגידול השנתי של כמות הדגים הוא:

$$\text{ב' } 1/1/2011 \text{ היו בברכה } 1.331 \cdot f(0).$$

מחצית מהכמות נמכרה,

ולכן כמות הדגים שנשארה בברכה היא:

$$\frac{1.331 \cdot f(0)}{2}$$

המשך תשובה למשימה 5.

ב. אם אחוז הגידול השנתי יישאר 10% כמות הדגים תכפיל את עצמה כעבור t שנים.

לכן מתקיים: $1.331 \cdot f(0) = \frac{1.331 \cdot f(0)}{2} \cdot 1.1^t$

$2 = 1.1^t$

↓

$t = \frac{\ln 2}{\ln 1.1}$

↓

כמות הדגים תכפיל את עצמה כעבור: 7.27 שנים

ג. לאחר המכירה של הדגים בתאריך 1/1/2011

כמות הדגים שנשארה בברכה היא:

$\frac{1.331 \cdot f(0)}{2}$

כמות הדגים שנשארה בברכה בתאריך 1/1/2011

תכפיל את עצמה כעבור $5.27 = 7.27 - 2$ שנים.

נסמן ב- a_1 את מקדם הגידול השנתי החדש.

לכן מתקיים: $1.331 \cdot f(0) = \frac{1.331 \cdot f(0)}{2} \cdot a_1^{5.27}$

↓

$2 = a_1^{5.27}$

↓

$a_1 = \sqrt[5.27]{2}$

↓

$a_1 = 1.14$

↓

14% אחוז הגידול השנתי החדש הוא: