מדינת ישראל
משרד החינוך

משימות והצעת תשובות

קיץ תשע"ד

מ ת מ ט י ק ה

4 יחידות לימוד — שאלון ראשון

/המשך מעבר לדף/

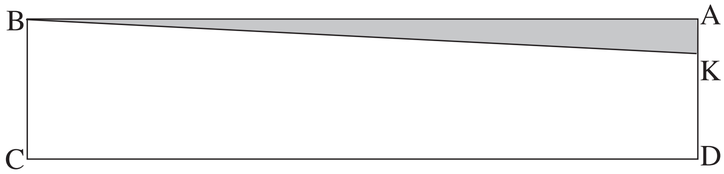
בעיות מילוליות

משימה 1

בגינה ציבורית שצורתה מלבן ABCD שתלו פרחים ודשא.

השטח שבו שתלו את הפרחים הוא בצורת המשולש ישר־הזווית ABK ,

והשטח שבו שתלו את הדשא הוא בצורת המרובע BCDK (ראה ציור).



נתון: $AK = 2$ מטר , $AB = 6 \cdot KD$.

נסמן: $KD = x$ מטר .

א. הבע באמצעות x את השטח שבו שתלו את הפרחים, ואת השטח שבו שתלו את הדשא.

ב. מחיר השתילה למ"ר של הדשא הוא 40 שקל.

מחיר השתילה למ"ר של הפרחים גדול ב־ 50% ממחיר השתילה למ"ר של הדשא.

המחיר הכולל של שתילת הדשא בגינה היה גדול ב־ 14,400 שקל מהמחיר הכולל של שתילת הפרחים.

מצא את השטח שבו שתלו את הדשא, ואת השטח שבו שתלו את הפרחים.

הצעת תשובה למשימה 1

א. שטח המשולש ישר הזווית ABK הוא: $S_{\triangle ABK} = \frac{AB \cdot AK}{2}$

לפי הנתון: $AB = 6x \quad , \quad AK = 2$

מכאן השטח שבו שתלו את הפרחים הוא: $S_{\triangle ABK} = \frac{6x \cdot 2}{2} = 6x$

<u>דרך I למציאת שטח הדשא:</u>

המרובע BCDK הוא טרפז ששטחו: $S_{\square BCDK} = \frac{(KD + BC) \cdot CD}{2}$

$$\Downarrow$$

השטח שבו שתלו את הדשא הוא: $S_{\square BCDK} = \frac{(x + x + 2)\,6x}{2} = 6x^2 + 6x$

<u>דרך II למציאת שטח הדשא:</u>

באמצעות חיסור שטח המשולש ABK

משטח המלבן ABCD :
$$S_{\square BCDK} = S_{\square ABCD} - S_{\triangle ABK} =$$
$$= 6x(2 + x) - 6x = 6x^2 + 6x$$

/המשך בעמוד 3/

המשך תשובה למשימה 1.

ב. המחיר של מ"ר של הפרחים גדול ב־ 50% (גדול פי 1.5)
ממחיר מ"ר של הדשא,
לכן מחיר מ"ר של הפרחים הוא: $1.5 \cdot 40 =$ 60 שקלים

ריכוז הנתונים בטבלה:

	מחיר למ"ר (ש"ח)	שטח (מ"ר)	סך הכול מחיר (ש"ח)
דשא	40	$6x^2 + 6x$	$40(6x^2 + 6x)$
פרחים	60	$6x$	$60 \cdot 6x$

המחיר הכולל של שתילת דשא גדול ב־ 14,400 שקלים
מהמחיר הכולל של שתילת פרחים, לכן מתקיים: $60 \cdot 6x + 14{,}400 = 40(6x^2 + 6x)$

$$\Downarrow$$

$$x = -7.5 \quad , \quad x = 8$$

$$\Downarrow$$

$x > 0$, לכן הפתרון הוא: $x =$ 8 מטר

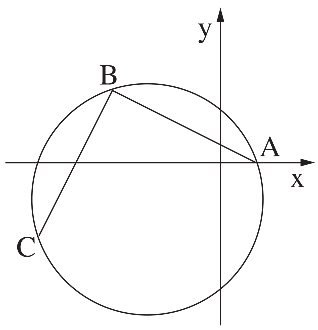
השטח ששתלו בו את הדשא הוא: $S_{\square BCDK} = 6x^2 + 6x = 6 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 =$ 432 מ"ר

השטח ששתלו בו את הפרחים הוא: $S_{\Delta ABK} = 6x = 6 \cdot 8 =$ 48 מ"ר

/המשך בעמוד 4/

גאומטריה אנליטית

משימה 2



נתון מעגל שהמשוואה שלו היא $(x+4)^2+(y+2)^2 = 40$.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של המעגל עם החלק החיובי של ציר ה־ x (ראה ציור).

א. מצא את השיעורים של הנקודה A .

ב. הנקודה $B(-6\,,4)$ נמצאת על המעגל.

הוכח כי המיתר AB <u>אינו</u> קוטר במעגל. נמק.

ג. BC הוא מיתר במעגל הנתון.

נתון כי BC מאונך למיתר AB .

מצא את השיעורים של הנקודה C .

הצעת תשובה למשימה 2

א. שיעור ה־ y של הנקודה A הוא 0 , לכן מתקיים:

$$(x+4)^2+(0+2)^2=40$$
$$\Downarrow$$
$$(x+4)^2=36$$
$$\Downarrow$$
$$x=-10 \text{ או } x=2$$
$$\Downarrow$$

הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה־ x , לכן: $A(2\,,0)$

ב. מצאנו: $A(2\,,0)$

לפי הנתון: $B(-6\,,4)$

<u>דרך I</u>:

אורך המיתר AB הוא: $AB=\sqrt{(2+6)^2+(0-4)^2}=\sqrt{80}$

רדיוס המעגל הוא $\sqrt{40}$, לכן קוטר המעגל הוא: $2\sqrt{40}$

אבל $\sqrt{80} \neq 2 \cdot \sqrt{40}$, לכן AB אינו קוטר

/המשך בעמוד 5/

המשך תשובה למשימה 2.

דרך II:

השיעורים של נקודת האמצע של המיתר AB הם: $\left(\frac{2+(-6)}{2}\ ,\ \frac{0+4}{2}\right)$

$\Downarrow$

כלומר נקודת האמצע של המיתר AB היא: $(-2\,,2)$

על פי הנתון, מרכז המעגל נמצא בנקודה: $(-4\,,-2)$

אמצע המיתר AB אינו מרכז המעגל, לכן AB אינו קוטר במעגל הנתון

דרך III:

נמצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו־ B .

שיפוע הישר AB הוא: $\frac{0-4}{2-(-6)}=-\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

משוואת הישר AB היא: $y=-\frac{1}{2}x+1$

נבדוק אם מרכז המעגל מונח על הישר AB .

נציב את השיעורים $(-4\,,-2)$ של מרכז המעגל,

במשוואת הישר AB :

$$-2=-\frac{1}{2}\cdot(-4)+1$$

$$\Downarrow$$

$$-2\neq 3$$

$$\Downarrow$$

מרכז המעגל לא נמצא על הישר AB ,

לכן AB אינו קוטר במעגל הנתון

/המשך בעמוד 6/

המשך תשובה למשימה 2.

ג. דרך I :

$A(2,0) \quad , \quad B(-6,4)$

$\Downarrow$

שיפוע המיתר AB הוא: $\frac{0-4}{2+6} = -\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

שיפוע המיתר BC המאונך לישר AB הוא: $-\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$

משוואת BC לפי שיפוע ונקודה: $y-4 = 2(x+6)$

$\Downarrow$

משוואת BC היא: $y = 2x+16$

הנקודה C נמצאת על המעגל

וגם על הישר BC ,

לכן נציב $y = 2x+16$ במשוואת המעגל: $(x+4)^2 + (2x+16+2)^2 = 40$

$\Downarrow$

$x = -10 \quad , \quad x = -6$

שיעור ה־ x של B הוא $x = -6$, לכן

שיעור ה־ x של C הוא: $x_C = -10$

$\Downarrow$

$y_C = 2(-10) + 16 = -4$

שיעורי הנקודה C הם: $C(-10, -4)$

דרך II :

נתון: $AB \perp BC$

$\Downarrow$

AC קוטר במעגל (אם זווית היקפית במעגל היא בת 90^o ,
אז היא נשענת על קוטר)

נתון: $A(2,0)$

נסמן את השיעורים של הנקודה C : $C(x,y)$

מרכז המעגל בנקודה $(-4, -2)$

הוא נקודת האמצע של AC , לכן מתקיים: $\frac{x+2}{2} = -4 \quad , \quad \frac{y+0}{2} = -2$

$\Downarrow$

$C(-10, -4)$

/המשך בעמוד 7/

הסתברות

משימה 3

באחד הדוכנים בלונה פארק אפשר להשתתף במשחק שבו מסובבים

גלגל המחולק ל־ 20 גזרות שוות. כשהגלגל נעצר, מחוג מצביע על אחת הגזרות.

בגלגל יש 10 גזרות ירוקות, 2 גזרות לבנות ו־ 8 גזרות אדומות.

אם המחוג מצביע על גזרה ירוקה, לא זוכים בנקודות.

אם המחוג מצביע על גזרה לבנה, זוכים ב־ 15 נקודות.

אם המחוג מצביע על גזרה אדומה, זוכים ב־ 30 נקודות.

א. אורי מסובב את הגלגל <u>פעמיים</u>.

(1) מהי ההסתברות שאורי יזכה בדיוק ב־ 30 נקודות?

(2) ידוע שאורי זכה בדיוק ב־ 30 נקודות.

מהי ההסתברות שהמחוג הצביע פעמיים על אותו הצבע?

ב. אילן מסובב את הגלגל שלוש פעמים.

מהי ההסתברות שאילן יזכה ב־ 90 נקודות?

הצעת תשובה למשימה 3

א. ההסתברות לא לזכות באף נקודה בסיבוב בודד

(ההסתברות שהמחוג יצביע על גזרה ירוקה): $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}=0.5$

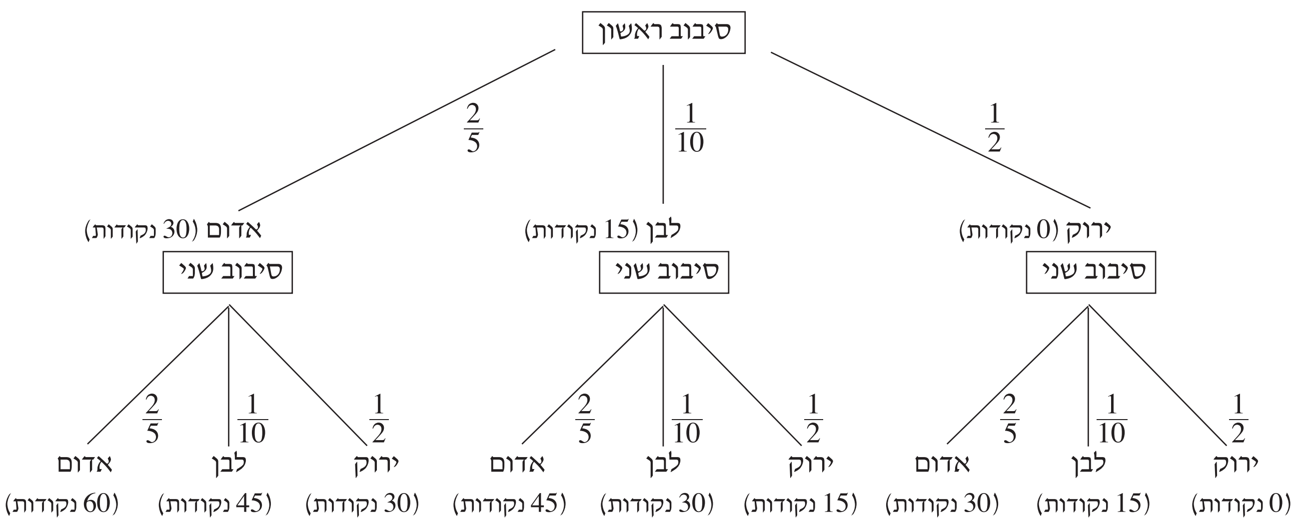
ההסתברות לזכות ב־ 15 נקודות בסיבוב בודד

(ההסתברות שהמחוג יצביע על גזרה לבנה): $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}=0.1$

ההסתברות לזכות ב־ 30 נקודות בסיבוב בודד

(ההסתברות שהמחוג יצביע על גזרה אדומה): $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}=0.4$

פריסת מרחב המדגם של שני סיבובים באמצעות דיאגרמת עץ:



/המשך בעמוד 8/

המשך תשובה למשימה 3.

(1) ההסתברות לזכות בדיוק ב־ 30 נקודות
כאשר מסובבים את הגלגל פעמיים היא:

$$P\begin{pmatrix}\text{לזכות ב־ 30 נקודות}\\\text{בשני סיבובים}\end{pmatrix} = P(0\,,30) + P(15\,,15) + P(30\,,0) = P(\text{אדום, ירוק}) + P(\text{לבן, לבן}) + P(\text{ירוק, אדום})$$

$$\Downarrow$$

$$P\begin{pmatrix}\text{לזכות ב־ 30 נקודות}\\\text{בשני סיבובים}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{41}{100} = 0.41$$

(2)

$$P\left(\begin{matrix}\text{יופיע}\\\text{אותו הצבע}\end{matrix} \Big/ \begin{matrix}\text{לזכות ב־ 30}\\\text{נקודות}\\\text{בשני סיבובים}\end{matrix}\right) = \frac{P(\text{לבן, לבן})}{P\begin{pmatrix}\text{לזכות ב־ 30 נקודות}\\\text{בשני סיבובים}\end{pmatrix}} = \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{41}{100}} = \frac{1}{41} = 0.0244$$

ב. ההסתברות לזכות ב־ 90 נקודות
כאשר מסובבים את הגלגל 3 פעמים היא:

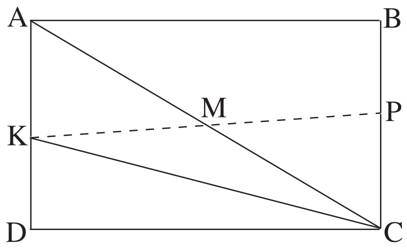
$$P\begin{pmatrix}\text{לזכות ב־ 90 נקודות}\\\text{בשלושה סיבובים}\end{pmatrix} = P(30\,,30\,,30) = P(\text{אדום, אדום, אדום})$$

$$P\begin{pmatrix}\text{לזכות ב־ 90 נקודות}\\\text{בשלושה סיבובים}\end{pmatrix} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125} = 0.064$$

/המשך בעמוד 9/

גאומטריה במישור

משימה 4



במלבן $ABCD$ העבירו אלכסון AC.

הנקודה K נמצאת על הצלע AD.

CK חוצה את $\sphericalangle ACD$

(ראה ציור).

נתון: $AK =$ 5 ס"מ , $KD =$ 4 ס"מ .

א. מצא את היחס $\frac{AB}{AC}$. נמק.

ב. M היא נקודת המפגש של אלכסוני המלבן.

המשך KM חותך את הצלע BC בנקודה P.

הוכח כי $PC = AK$.

ג. הוכח כי AP חוצה את $\sphericalangle BAC$.

הצעת תשובה למשימה 4

א. הקטע KC חוצה את הזווית ACD

$\Downarrow$

$\frac{DC}{AC} = \frac{KD}{AK} = \frac{4}{5}$ על פי משפט חוצה זווית

$DC = AB$ במלבן הצלעות הנגדיות שוות

מכאן: $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$

ב. $AM = MC$ במלבן האלכסונים חוצים זה את זה

$AD \parallel BC$

$\Downarrow$

$\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$ זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים

$\sphericalangle AMK = \sphericalangle PMC$ זוויות קדקודיות

מכאן: $\triangle AMK \cong \triangle CMP$ על פי ז.צ.ז.

$\Downarrow$

$PC = AK$ צלעות מתאימות במשולשים חופפים

/המשך בעמוד 10/

המשך תשובה למשימה 4.

ג. $AD = AK + KD = 5 + 4 = 9$ ס"מ

$BC = AD = 9$ ס"מ במלבן צלעות נגדיות שוות

הוכחנו בסעיף ב: $PC = AK = 5$ ס"מ

$$\Downarrow$$

$BP = BC - PC = 9 - 5 = 4$ ס"מ

$$\Downarrow$$

מכאן $\frac{BP}{PC} = \frac{4}{5}$

הוכחנו בסעיף א: $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$

$$\Downarrow$$

מכאן: $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC} = \frac{4}{5}$

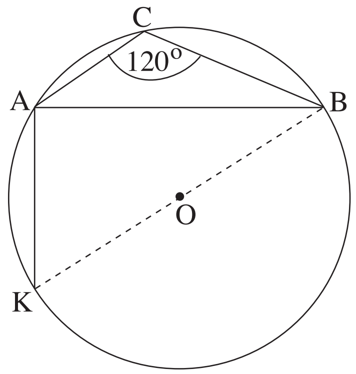
$$\Downarrow$$

AP חוצה זווית BAC, על פי המשפט ההפוך למשפט חוצה הזווית

/המשך בעמוד 11/

טריגונומטריה במישור

משימה 5



משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O

(ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle ACB = 120^{o}$,

הצלע AB גדולה ב־ 4 ס"מ מהצלע AC ,

הצלע BC גדולה ב־ 2 ס"מ מהצלע AC .

א. מצא את אורכי הצלעות של המשולש ABC .

ב. BK הוא קוטר במעגל.

חשב את $\sphericalangle CAK$.

הצעת תשובה למשימה 5

א. נסמן ב־ x את אורך הצלע AC .

לפי הנתון, אורכי הצלעות AB ו־ BC הם: $AB = x + 4 \quad , \quad BC = x + 2$

על פי משפט הקוסינוסים במשולש ABC מתקיים: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 120^{o}$

$(x + 4)^2 = x^2 + (x + 2)^2 - 2 \cdot x (x + 2) \cdot (-\frac{1}{2})$

$\Downarrow$

$x = 3$ או $x = -2$

$\Downarrow$

$x > 0$, לכן אורך הצלע AC הוא: $x = 3$

אורכי צלעות המשולש ABC הם: AC = 3 ס"מ , BC = 5 ס"מ , AB = 7 ס"מ

/המשך בעמוד 12/

המשך תשובה למשימה 5.

ב. חישוב זווית CAK : $\sphericalangle CAK = \sphericalangle CAB + \sphericalangle BAK$

$\sphericalangle BAK = 90^{o}$ זווית היקפית במעגל הנשענת על קוטר היא בת 90^{o}

במשולש ABC על פי משפט הסינוסים: $\frac{CB}{\sin \sphericalangle CAB} = \frac{AB}{\sin 120^{o}}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{5}{\sin \sphericalangle CAB} = \frac{7}{\sin 120^{o}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin \sphericalangle CAB = 0.6185$$

$$\Downarrow$$

$\sphericalangle CAB = 38.21^{o}$ או $\sphericalangle CAB = 180^{o} - 38.21^{o}$

נתון משולש ABC קהה זווית לכן, שתי הזוויות האחרות הן חדות

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle CAB = 38.21^{o}$$

מכאן: $\sphericalangle CAK = 90^{o} + 38.21^{o} = 128.21^{o}$

/המשך בעמוד 13/

חקירה של פונקציה רציונלית

משימה 6

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2} + 1$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

הצעת תשובה למשימה 6

א. צריך להתקיים $x^2 \neq 0$, לכן תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x \neq 0$

ב. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $f(x)$: $x = 0$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$: $y = 1$

ג. $x \neq 0$

$\Downarrow$

לגרף הפונקציה $f(x)$ אין נקודות חיתוך עם ציר ה־ y

בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה־ x מתקיים: $f(x) = 0$

$\Downarrow$

$\frac{4(x+1)}{x^2} + 1 = 0$

$\Downarrow$

$4x + 4 + x^2 = 0$

$\Downarrow$

$x = -2$

נקודת החיתוך עם ציר ה־ x : $(-2, 0)$

/המשך בעמוד 14/

המשך תשובה למשימה 6.

ד. הנגזרת של $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{-4x^2 - 8x}{x^4}$

$f'(x) = 0$

$-4x^2 - 8x = 0$

$\Downarrow$

$x = 0 \;,\; x = -2$

תחום ההגדרה $x \neq 0$, לכן

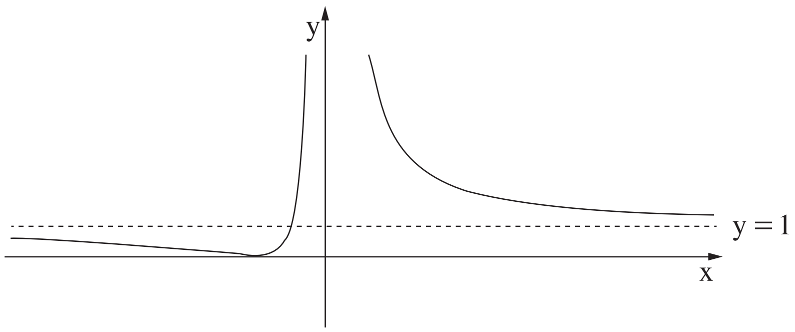
נקודה "חשודה" לקיצון היא: $x = -2$

x	-3	-2	-1	0	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	נקודת מינימום	$\nearrow$		$\searrow$

תחום העלייה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $-2 < x < 0$

תחום הירידה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $x < -2 \;,\; x > 0$

ה.



ו. הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

$f(x) = \frac{4(x+1) + x^2}{x^2} = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2}$

$g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4x + 4} = \frac{x^2}{(x+2)^2}$, $x \neq 0$

האסימפטוטה האנכית של $g(x)$ היא: $x = -2$

האסימפטוטה האופקית של $g(x)$ היא: $y = 1$

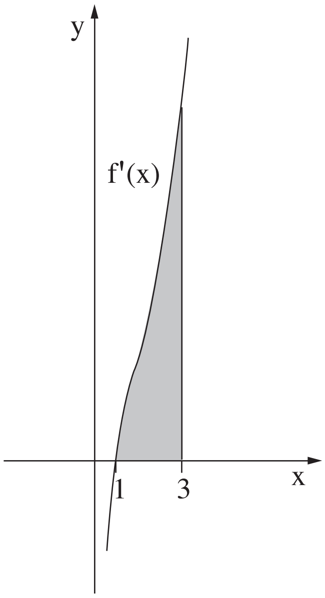
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות רציונליות

משימה 7

נתונה הפונקציה $f(x)$ בתחום $x > 0$.

בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$

בתחום $x > 0$.



א. היעזר בנתונים שבגרף של $f'(x)$,
ומצא את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון
של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ב. נתון: $f(3) = 12\frac{1}{3}$, $f(1) = 4\frac{1}{3}$.

(1) מצא את השטח המוגבל
על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$,
על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = 3$
(השטח האפור בציור).

(2) נתון גם: $f'(x) = 3ax^2 - \frac{3a}{x^2}$, a הוא פרמטר.
היעזר בערך של האינטגרל $\int_1^3 (3ax^2 - \frac{3a}{x^2})dx$, שמצאת בתת־סעיף ב(1),
ומצא את הפרמטר a .

הצעת תשובה למשימה 7

א. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x > 0$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מתאפסת בנקודה $x = 1$

עבור $0 < x < 1$ $\quad f'(x) < 0 \quad \Leftarrow \quad f(x)$ יורדת

עבור $x > 1$ $\quad f'(x) > 0 \quad \Leftarrow \quad f(x)$ עולה

$\Downarrow$

$x = 1$ היא נקודת מינימום של $f(x)$

/המשך בעמוד 16/

המשך תשובה למשימה 7.

ב. נתון: $f(3) = 12\frac{1}{3}$

$f(1) = 4\frac{1}{3}$

(1) השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$,
על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = 3$ הוא: $\int_1^3 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_1^3 = f(3) - f(1) = 8$

(2) נחשב את האינטגרל: $\int_1^3 (3ax^2 - \frac{3a}{x^2})\,dx = 3 \cdot \frac{ax^3}{3} + \frac{3a}{x}\Big|_1^3 = ax^3 + \frac{3a}{x}\Big|_1^3$

$(a \cdot 3^3 + \frac{3 \cdot a}{3}) - (a \cdot 1^3 + \frac{3 \cdot a}{1}) = 24a$

על פי סעיף ב(1): $24a = 8$

$\Downarrow$

$a = \frac{1}{3}$

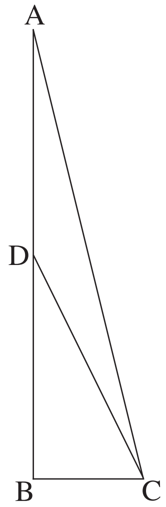
/המשך בעמוד 17/

בעיות מינימום / מקסימום

משימה 8

במשולש ישר־זווית ABC סכום הניצבים BA ו־ BC הוא 45 ס"מ.

CD הוא תיכון לניצב BA במשולש ABC (ראה ציור).



א. נסמן: $BD = x$.

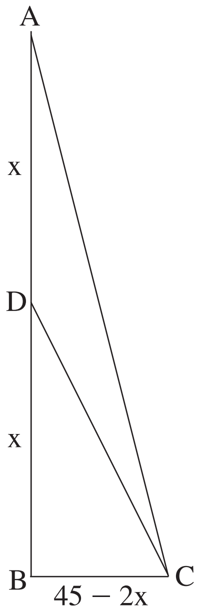
מה צריך להיות אורך הקטע BD ,

כדי שאורך התיכון CD יהיה מינימלי?

ב. עבור הערך של x שמצאת בסעיף א,

מצא את שטח המשולש ADC .

הצעת תשובה למשימה 8



א. נסמן: $BD = x$

DC תיכון לניצב BA

$\Downarrow$

$AD = DB = x$

נתון: $AB + BC =$ 45 ס"מ

$2x + BC =$ 45 ס"מ

$\Downarrow$

$BC = 45 - 2x$

על פי משפט פיתגורס במשולש ישר־זווית DBC : $DC^2 = DB^2 + BC^2$

$\Downarrow$

אורך התיכון DC הוא: $DC = \sqrt{x^2 + (45 - 2x)^2}$

/המשך בעמוד 18/

המשך פתרון למשימה 8.

נסמן: $f(x)=\sqrt{x^2+(45-2x)^2}$ בתחום $0<x<22.5$

הנגזרת היא: $f'(x)=\dfrac{10x-180}{2\sqrt{5x^2-180x+2025}}$

$f'(x)=0$

$\Downarrow$

$x=18$

x	$0<x<18$	18	$0<x<22.5$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	נקודת מינימום	$\nearrow$

$\Downarrow$

$x=18$ היא נקודת המינימום של $f(x)$.

$\Downarrow$

אורך הקטע BD הוא: 18 ס"מ

ב. עבור $x = 18$: $AD =$ 18 ס"מ ו־ $BC =$ 9 ס"מ

BC הוא גובה לצלע AD

במשולש ADC , לכן: $S_{\Delta ADC}=\dfrac{AD\cdot BC}{2}$

$S_{\Delta ADC}=\dfrac{18\cdot 9}{2}=$ 81 סמ"ר