

מדינת ישראל

משרד החינוך

משימות והצעת תשובות

קיץ תשע"ד

מתמטיקה

3 יחידות לימוד – שאלון שלישי

שאלות קנייה ומכירה

משימה 1

נטע קנתה בחנות למכשירי כתיבה x מחברות, ושילמה עבורן 300 שקלים.

כעבור יומיים הכריזה החנות על הנחה.

באותו יום קנתה דנה 10 מחברות יותר מנטע, ושילמה 2 שקלים פחות לכל מחברת.

דנה שילמה עבור כל המחברות שקנתה 350 שקלים.

א. מצא כמה מחברות קנתה נטע.

ב. מצא את המחיר של מחברת אחת לפני ההנחה.

הצעת תשובה למשימה 1

א. מספר המחברות שקנתה נטע הוא: x מחברות

$$\frac{300}{x}$$

מחיר מחברת אחת לפני ההנחה הוא:

$$x + 10$$

מספר המחברות שקנתה דנה הוא:

$$\frac{300}{x} - 2$$

מחיר מחברת אחת בהנחה של 2 שקלים למחברת הוא:

דנה שילמה עבור המחברות 350 שקלים,

$$(x + 10) \left(\frac{300}{x} - 2 \right) = 350$$

לכן מתקיים:

⇓

$$300 + \frac{3000}{x} - 2x - 20 = 350$$

⇓

$$2x^2 + 70x - 3000 = 0$$

מתקבלת משוואה ריבועית:

⇓

$$x = 25, \quad x = -60$$

$$x = 25$$

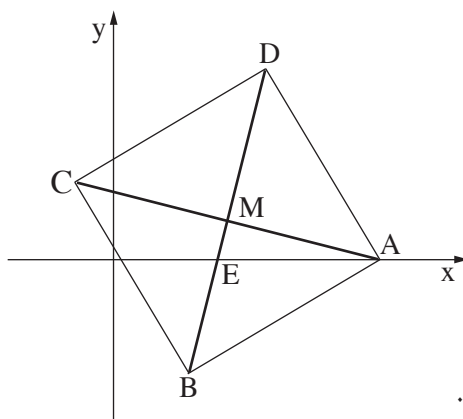
$x > 0$, לכן מספר המחברות הוא:

$$\frac{300}{25} = 12 \text{ שקלים}$$

ב. המחיר של מחברת אחת לפני ההנחה הוא:

גאומטריה אנליטית

משימה 2



אלכסוני הריבוע ABCD מונחים על הישרים $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ ו- $y = 4x - 11$ ונפגשים בנקודה M, כמתואר בציור.

הנקודה A נמצאת על ציר ה- x .

א. מצא את שיעורי הנקודות M, A ו- C.

ב. שיעור ה- y של הנקודה D הוא 5.

מצא את שיעור ה- x של הנקודה D.

ג. האלכסון DB חותך את ציר ה- x בנקודה E.

(1) מצא את שיעורי הנקודה E.

(2) מצא את שטח המשולש AED.

הצעת תשובה למשימה 2

א. מציאת שיעורי הנקודה A:

האלכסון AC חותך את ציר ה- y בחלק החיובי, לכן משוואתו:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

הנקודה A נמצאת על הישר AC.

שיעור ה- y של הנקודה A הוא 0,

לכן:

$$0 = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

⇓

$$x = 7$$

$$A(7, 0)$$

השיעורים של הנקודה A הם:

מציאת שיעורי הנקודה M:

הנקודה M היא נקודת החיתוך של שני האלכסונים, לכן מתקיים:

$$\begin{cases} y = 4x - 11 \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4} \end{cases}$$

⇓

מפתרון מערכת המשוואות מתקבלים השיעורים של הנקודה M: $x = 3$, $y = 1$

$$M(3, 1)$$

השיעורים של הנקודה M הם:

מציאת שיעורי הנקודה C:

בריבוע, האלכסונים חוצים זה את זה,

לכן הנקודה M היא נקודת האמצע של הקטע AC.

$$C(x, y)$$

נסמן את השיעורים של הנקודה C:

$$\frac{x+7}{2} = 3, \quad \frac{y+0}{2} = 1$$

השיעורים של הנקודה C מקיימים:

⇓

$$C(-1, 2)$$

השיעורים של הנקודה C הם:

המשך תשובה למשימה 2.

ב. הנקודה D נמצאת על האלכסון BD שמשוואתו: $y = 4x - 11$

שיעור ה־y של הנקודה D הוא 5, לכן מתקיים: $5 = 4x - 11$

↓

$$x = 4$$

השיעורים של הנקודה D הם: $D(4, 5)$

ג. (1) הנקודה E נמצאת על האלכסון BD שמשוואתו: $y = 4x - 11$

שיעור ה־y של הנקודה E הוא 0, לכן מתקיים: $0 = 4x - 11$

↓

$$x = 2.75$$

השיעורים של הנקודה E הם: $E(2.75, 0)$

(2) השיעורים של הנקודות A ו־E הם: $A(7, 0)$, $E(2.75, 0)$

הנקודות A ו־E נמצאות על ציר ה־x,

לכן אורך הקטע AE הוא: $AE = 7 - 2.75 = 4.25$

הגובה לצלע AE במשולש AED

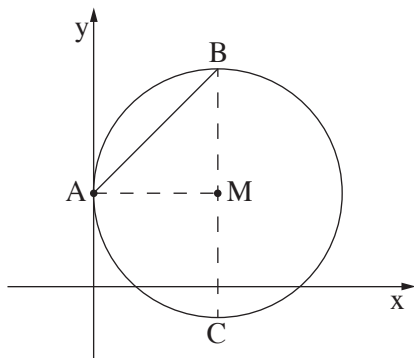
הוא שיעור ה־y של הנקודה D.

לכן שטח המשולש AED הוא: $S_{\triangle AED} = \frac{AE \cdot y_D}{2} = \frac{4.25 \cdot 5}{2} = 10.625$

גאומטריה אנליטית

משימה 3

מעגל שמרכזו $M(4, 3)$ משיק לציר ה- y בנקודה A , כמתואר בציור.



א. (1) מצא את שיעורי הנקודה A .

(2) מצא את משוואת המעגל.

ב. מהנקודה A העבירו מיתר

החותך את המעגל בנקודה נוספת B .

שיפוע המיתר הוא 1.

(1) מצא את משוואת המיתר AB .

(2) מצא את שיעורי הנקודה B .

ג. מהנקודה B העבירו קוטר החותך את המעגל בנקודה C .

מצא את שיעורי הנקודה C .

הצעת תשובה למשימה 3

א. (1) $M(4, 3)$ הוא מרכז המעגל.

המעגל משיק לציר ה- y בנקודה A , לכן AM הוא רדיוס במעגל המאונך לציר ה- y .

שיעור ה- y של הנקודה A הוא 3, כשיעור ה- y של הנקודה M ,

לכן השיעורים של הנקודה A הם: $A(0, 3)$

(2) שיעור ה- x של הנקודה M הוא 4, לכן

רדיוס המעגל הוא: $R = 4$

משוואת המעגל היא: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$

ב. (1) שיפוע המיתר AB נתון, והוא: 1

השיעורים של הנקודה A הם: $A(0, 3)$

לכן משוואת המיתר AB היא: $y = x + 3$

(2) הנקודה B נמצאת על מיתר AB וגם על המעגל,

לכן היא מקיימת את מערכת המשוואות: $\begin{cases} y = x + 3 \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16 \end{cases}$

הפתרונות המתקבלים ממערכת המשוואות הם: $(0, 3)$, $(4, 7)$

נקודה אחת נתונה והיא הנקודה A ,

הנקודה השנייה היא הנקודה B ,

לכן השיעורים של הנקודה B הם: $B(4, 7)$

המשך תשובה למשימה 3.

ג. נתון: BC קוטר במעגל.
מרכז המעגל – M הוא אמצע הקוטר.

דרך I:

נסמן את השיעורים של הנקודה C : $C(x, y)$

השיעורים של הנקודה C מקיימים: $\frac{x+4}{2} = 4$, $\frac{y+7}{2} = 3$

↓

$C(4, -1)$

השיעורים של הנקודה C הם:

דרך II:

$$x_B = x_M = 4$$

↓

הישר BM ניצב לציר ה־x

↓

$$x_C = 4$$

שיעור ה־x של הנקודה C הוא:

$$y_C = y_M - 4$$

נתון: רדיוס המעגל הוא 4, לכן:

$$y_M = 3$$

↓

$$y_C = 3 - 4 = -1$$

↓

$$C(4, -1)$$

השיעורים של הנקודה C הם:

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

משימה 4

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} \quad \text{נתונה הפונקציה:}$$

- א. רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
 ג. האם הפונקציה עולה או יורדת בתחום $x < 0$? נמק.
 ד. ידוע כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x רק בנקודה אחת, שבה $x = -2.52$. הסתמך גם על תשובותיך לסעיפים א-ג וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

הצעת תשובה למשימה 4

א. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $x \neq 0$

ב. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = x - \frac{8}{x^2}$

$$f'(x) = 0$$

$$x - \frac{8}{x^2} = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

$x = 2$ פתרון המשוואה $f'(x) = 0$ הוא:

בדיקת סימן הנגזרת $f'(x)$ בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$, וקביעת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$:

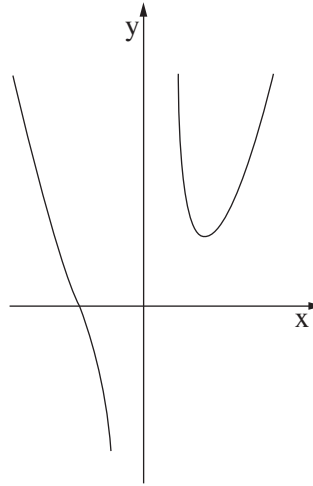
x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	-		-	0	+
	$f'(-1) = -9 < 0$		$f'(1) = -7 < 0$	נקודת מינימום	$f'(4) = 3.5 > 0$
$f(x)$	↘		↘	6	↗

השיעורים של נקודת הקיצון הם: (2, 6)
 סוג הקיצון: נקודת מינימום.

המשך תשובה למשימה 4.

ג. על פי הטבלה בסעיף ב, הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $x < 0$, כי הנגזרת $f'(x)$ שלילית בתחום זה.

ד. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה:



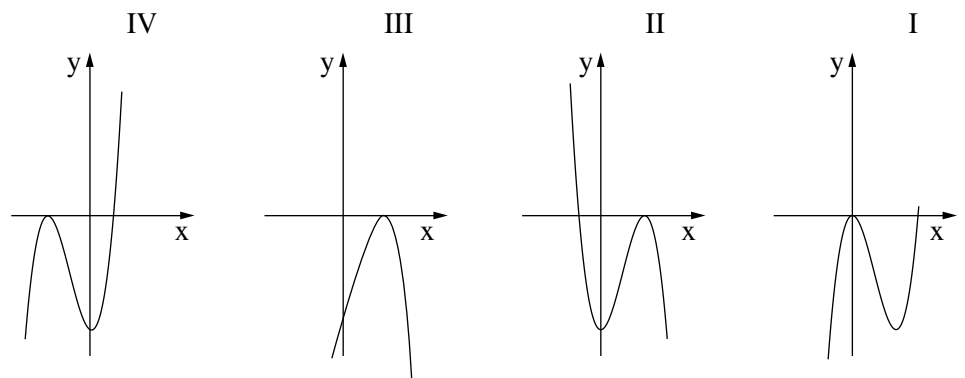
/המשך בעמוד 9/

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

משימה 5

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -3x^2 + 6x$.

- מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
- שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ הוא 0. מצא את הפונקציה $f(x)$.
- קבע איזה מן הגרפים IV-I שלפניך הוא גרף הפונקציה $f(x)$, שמצאת בסעיף ב.



הצעת תשובה למשימה 5

א. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x) = -3x^2 + 6x$:

$$f'(x) = 0$$

$$-3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(-x + 2) = 0$$

⇓

$$x = 0, \quad x = 2$$

שיעור ה- x של הנקודות

שבהן הנגזרת מתאפסת הם:

בדיקת סימן הנגזרת $f'(x)$

ובדיקת תחומי העלייה והירידה

של הפונקציה $f(x)$:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
	$f'(-1) = -9 < 0$		$f'(1) = 3 > 0$		$f'(3) = -9 < 0$
$f(x)$	↘	נקודת מינימום	↗	נקודת מקסימום	↘

לכן

שיעור ה- x של נקודת המינימום הוא: $x = 0$

שיעור ה- x של נקודת המקסימום הוא: $x = 2$

המשך תשובה למשימה 5.

ב. נתון כי שיעור ה־ y של נקודת המקסימום הוא 0, לכן השיעורים של נקודת המקסימום הם: $(2, 0)$

הפונקציה $f(x)$ היא הפונקציה הקדומה של $f'(x)$ העוברת דרך הנקודה $(2, 0)$, לכן:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-3x^2 + 6x) dx$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + C$$

$$f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 + C = 0 \quad \text{מהצבה של שיעורי הנקודה } (2, 0)$$

$$C = -4 \quad \text{מתקבל הערך של } C$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4 \quad \text{לכן הפונקציה } f(x) \text{ היא:}$$

ג. נקודת המקסימום היא $(2, 0)$, לכן הגרפים I ו־IV לא מתאימים.

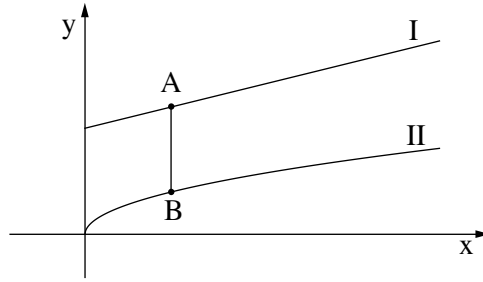
לפונקציה יש נקודת מינימום ב־ $x = 0$, לכן גם גרף III לא מתאים.



הגרף של הפונקציה $f(x)$ הוא גרף II.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

משימה 6



בציור נתונים הגרפים I ו-II של הפונקציות:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + 5, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

בתחום $x \geq 0$.

א. איזה מן הגרפים I ו-II הוא הגרף של

הפונקציה $f(x)$, ואיזה מהם הוא של גרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

ב. A היא נקודה על גרף I ו-B היא נקודה על גרף II,

כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y (ראה ציור).

מצא את שיעור ה-x של הנקודות A ו-B, שעבורו אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. עבור ה-x שמצאת בסעיף ב, חשב את אורך הקטע AB.

הצעת תשובה למשימה 6

א. גרף I הוא גרף הפונקציה $g(x)$, הגרף של פונקציה קווית.

גרף II הוא גרף הפונקציה $f(x)$, הגרף של פונקציית השורש הריבועי.

ב. נסמן ב-x את שיעור ה-x של הנקודה A.

הנקודה A נמצאת על הפונקציה $g(x)$,

$$A(x, \frac{1}{4}x + 5)$$

לכן השיעורים של הנקודה A הם:

הקטע AB מקביל לציר ה-y,

לכן שיעור ה-x של הנקודה B הוא כשיעור ה-x של הנקודה A.

הנקודה B נמצאת על הפונקציה $f(x)$,

$$B(x, \sqrt{x})$$

לכן השיעורים של הנקודה B הם:

אורך הקטע AB הוא ההפרש

בין שיעור ה-y של הנקודה A

לשיעור ה-y של הנקודה B.

$$y_{AB}(x) = (\frac{1}{4}x + 5) - (\sqrt{x})$$

אורך הקטע AB הוא פונקציה של x:

$$y'_{AB}(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

הנגזרת היא:

מציאת שיעור ה-x של נקודת הקיצון

על ידי השוואת הנגזרת ל-0:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

⇓

$$\sqrt{x} = 2$$

$$(\sqrt{x})^2 = (2)^2$$

נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה:

$$x = 4$$

שיעור ה-x של נקודת הקיצון הוא:

המשך תשובה למשימה 6.

בדיקת סוג הקיצון

על-פי סימן פונקציית הנגזרת:

x	$0 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$y'_{AB}(x)$	-	0	+
$y_{AB}(x)$	↘	נקודת מינימום	↗

ג. שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא: $y_{AB}(4) = \left(\frac{1}{4} \cdot 4 + 5 \right) - (\sqrt{4}) = 4$

האורך המינימלי של AB הוא 4.