מדינת ישראל

משרד החינוך

دولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

משימות והצעת תשובות

קיץ תשע"ד

מתמטיקה

4 יחידות לימוד — שאלון שני

مهمّات واقتراح إجابات

صيف 2014

الرياضيّات

4 وحدات تعليميّة – النّموذج الثّاني

/يتبع في الصفحة التالية/

المتواليات

المهمّة 1

يُباع حاسوب ثمنه 10,000 شيقل بأقساط شهريّة ليست متساوية.
كلّ قسط شهريّ أكبر بمبلغ ثابت من القسط الشهريّ الذي قبله.
مجموع عشرة الأقساط الأولى هو 25% من ثمن الحاسوب.
مجموع خمسة الأقساط التي تليها هو 20% من ثمن الحاسوب.

أ. جد القسط الأوّل.

ب. جد عدد الأقساط الشهريّة التي بيع بها الحاسوب.

اقتراح إجابة للمهمّة 1

أ. نرمز بـ a_n إلى القسط في الشهر الـ n.
معطى أنّ المتوالية هي متوالية حسابيّة تصاعديّة.

مجموع عشرة الأقساط الأولى يشكّل 25% من ثمن الحاسوب، لذلك: $S_{10} = 0.25 \cdot 10{,}000 =$ 2500 شيقل

<u>الطريقة I</u>:

مجموع خمسة الأقساط التي تليها يشكّل 20% من ثمن الحاسوب، لذلك: $S_{15} - S_{10} = 0.2 \cdot 10{,}000 =$ 2000 شيقل

$\Downarrow$

مجموع خمسة عشر الأقساط الأولى هو: $S_{15} =$ 4500 شيقل

$$\text{I} \quad S_{10} = \frac{(2a_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 2500$$

$\Downarrow$

$$2a_1 + 9d = 500$$

$$\text{II} \quad S_{15} = \frac{(2a_1 + 14d) \cdot 15}{2} = 4500$$

$\Downarrow$

$$2a_1 + 14d = 600$$

$\Downarrow$

من I وَ II ينتج: $a_1 = 160 \quad , \quad d = 20$

القسط الأوّل هو: $a_1 =$ 160 شيقل

/ يتبع في صفحة 3 /

تكملة إجابة المهمّة 1.

الطريقة II:

مجموع خمسة الأقساط التي تليها
يشكّل 20% من ثمن الحاسوب، لذلك: $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} =$ 2000 شيقل

مجموع عشرة الأقساط الأولى
هو: $\text{I} \quad S_{10} = \frac{(2a_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 2500$

مجموع خمسة الأقساط
التي تليها هو: $\text{II} \quad S_{\text{5 الأقساط التي تليها}} = \frac{(2a_{11} + 4d) \cdot 5}{2} = 2000$

من I وَ II ينتج: $\begin{cases} 2a_1 + 9d = 500 \\ 2a_1 + 24d = 800 \end{cases}$

$\Downarrow$

$d = 20$

$a_1 = 160$

القسط الأوّل هو: 160 شيقل

ب. مجموع كلّ الأقساط يحقّق: $S_n = \frac{(2 \cdot 160 + (n-1) \cdot 20)n}{2} = 10{,}000$

$\Downarrow$

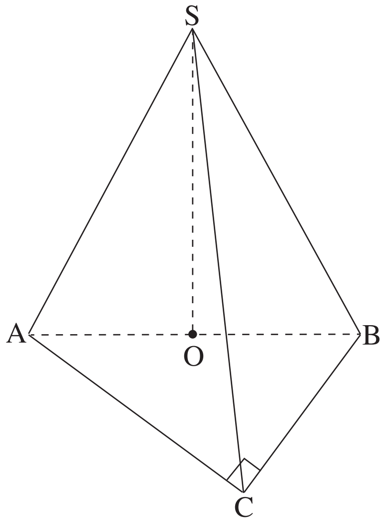
$n^2 + 15n - 1000 = 0$

$n = 25$ أو $n = -40$

$n > 0$، لذلك: بيع الحاسوب بِـ 25 قسطًا

/يتبع في صفحة 4/

حساب المثلّثات في الفراغ
المهمّة 2



في الرسم الذي أمامك هرم قائم SABC قاعدته مثلّث قائم الزاوية.

معطى أنّ: $\sphericalangle ACB = 90^o$ ، $\sphericalangle ASB = 100^o$ ،

. BC = سم 3a ، AC = سم 4a

أ. النقطة O هي منتصف AB .

فسّر لماذا SO هو ارتفاع الهرم.

ب. (1) عبّر بدلالة a عن نصف قطر الدائرة التي تحصر القاعدة.

(2) عبّر بدلالة a عن ارتفاع الهرم.

(3) احسب الزاوية التي بين الضلع SC وقاعدة الهرم.

جـ. معطى أنّ: حجم الهرم هو 113.28 سم^3.

جد قيمة a .

اقتراح إجابة للمهمّة 2

أ. في الهرم القائم، كعب الارتفاع النازل من رأس الهرم على القاعدة هو مركز الدائرة التي تحصر القاعدة.

الهرم المعطى SABC هو هرم قائم.

قاعدة الهرم هي مثلّث قائم الزاوية ABC .

في المثلّث، نقطة تقاطع ثلاثة الأعمدة المتوسّطة هو مركز الدائرة التي تحصر المثلّث،

لذلك مركز الدائرة التي تحصر قاعدة الهرم ABC هو منتصف الوتر.

من هنا ينبع أنّ: النقطة O هي كعب العمود، وَ SO هو ارتفاع الهرم.

ب. (1) المثلّث ABC هو مثلّث قائم الزاوية،

لذلك حسب قانون فيثاغورس

يتحقّق: $AB^2 = BC^2 + AC^2$

$$\Downarrow$$

$$AB^2 = (3a)^2 + (4a)^2 = 25a^2$$

$$\Downarrow$$

AB = سم 5a

AB هو قطر في الدائرة،

لذلك نصف قطر الدائرة الحاصرة هو: $R = \frac{AB}{2} =$ سم 2.5a

/يتبع في صفحة 5/

تكملة إجابة المهمّة 2.

(2) المثلّث ASB متساوي الساقين $SA = SB = SC$ (في الهرم القائم، جميع الأضلاع الجانبيّة متساوية)

$\Downarrow$

SO هو أيضًا ارتفاع على القاعدة AB في المثلّث المتساوي الساقين ASB ، لذلك ينصّف زاوية الرأس $\sphericalangle ASB$

$\Downarrow$

$$\sphericalangle ASO = \frac{100^o}{2} = 50^o$$

في المثلّث القائم الزاوية SOA يتحقّق: $\tan 50^o = \frac{AO}{SO} = \frac{2.5a}{SO}$

$\Downarrow$

$$\frac{2.5a}{\tan 50^o} = SO$$

$\Downarrow$

$SO = 2.098a$ سم

(3) <u>الطريقة I</u>

في المثلّث القائم الزاوية $\triangle SOC$ ($\sphericalangle SOC = 90^o$)

يتحقّق: $\tan(\sphericalangle SCO) = \frac{SO}{OC}$

$$\tan(\sphericalangle SCO) = \frac{2.098a}{2.5a} = 0.8392$$

$\Downarrow$

$$\sphericalangle SCO = 40^o$$

<u>الطريقة II</u>

في الهرم القائم، جميع الأضلاع الجانبيّة
تكوّن زوايا متساوية مع قاعدة الهرم،
لذلك في الهرم SABC يتحقّق: $\sphericalangle SCO = \sphericalangle SBO = \sphericalangle SAO$

في المثلّث القائم الزاوية SAO يتحقّق: $\sphericalangle SAO = 90^o - 50^o = 40^o$ (مجموع زوايا المثلّث هو 180^o)

$\Downarrow$

$$\sphericalangle SCO = 40^o$$

جـ. حجم الهرم هو: $V = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot SO}{3} = 113.28$

مساحة القاعدة ABC هي: $S_{\triangle ABC} = \frac{4a \cdot 3a}{2} = 6a^2$

$\Downarrow$

حجم الهرم يحقّق: $V = \frac{6a^2 \cdot 2.098a}{3} = 113.28$

$\Downarrow$

$$a^3 = 27$$

$\Downarrow$

قيمة a هي: $a = 3$ سم

/ يتبع في صفحة 6 /

بحث الدالّة اللوغريثميّة

المهمّة 3

معطاة الدالّة $f(x) = \ell og_2(x^2 + 4x + 5) - 2\ell og_4 10$.

أ . جد مجال تعريف الدالّة.

ب . استعمِل قوانين اللوغريثمات، وَجِد بدون استعمال الحاسبة، نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحورين.

جـ. جد إحداثيّات النقطة القصوى للدالّة، وحدّد نوع هذه النقطة. علّل.

د . ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة.

اقتراح إجابة للمهمّة 3

أ . الدالّة $f(x) = \ell og_2(x^2 + 4x + 5) - 2\ell og_4 10$

معرَّفة لجميع قيَم x التي تحقّق: $x^2 + 4x + 5 > 0$

الطريقة I:

$\Delta = 16 - 20 < 0$ وكذلك $a = 1 > 0$

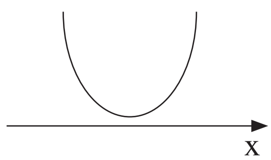
$\Downarrow$

$x^2 + 4x + 5 > 0$ لكلّ x

الطريقة II:

للمعادلة $x^2 + 4x + 5 = 0$ لا يوجد حلّ
لأنّ $\Delta < 0$ وكذلك $a > 0$

الرسم البيانيّ للقطع المكافئ $y = x^2 + 4x + 5$ موجب لكلّ x
(انظر الرسم).



الدالّة f(x) معرَّفة لكلّ x

/يتبع في صفحة 7/

تكملة إجابة المهمّة 3.

ب. إيجاد نقطة تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحور y :

$$f(0) = \ell og_2(0^2 + 4 \cdot 0 + 5) - 2\ell og_4 10$$

ننتقل إلى الأساس 2 مثلاً:

$$f(0) = \ell og_2 5 - \frac{2\ell og_2 10}{\ell og_2 4}$$

قوانين اللوغريثمات:

$$f(0) = \ell og_2 5 - \ell og_2 10$$

$$f(0) = \ell og_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\Downarrow$$

$$f(0) = -1$$

نقطة تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحور y هي: $(0, -1)$

إيجاد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحور x : $f(x) = 0$

$$\ell og_2(x^2 + 4x + 5) - 2\ell og_4 10 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\ell og_2(x^2 + 4x + 5) = \ell og_2 10$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + 4x + 5 = 10$$

$$\Downarrow$$

$x = 1$ أو $x = -5$

نقطتا تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$
مع المحور x هما: $(1, 0)$ وَ $(-5, 0)$

/يتبع في صفحة 8/

تكملة إجابة المهمّة 3.

جـ. مشتقّة الدالّة $f(x)$ هي: $f'(x) = \frac{1}{\ell n2} \cdot \frac{2x+4}{x^2+4x+5}$

نفحص بالنسبة لأيّة قيَم x
تساوي المشتقّة صفرًا: $2x + 4 = 0$

نقطة "محتملة" كنقطة قصوى هي: $x = -2$

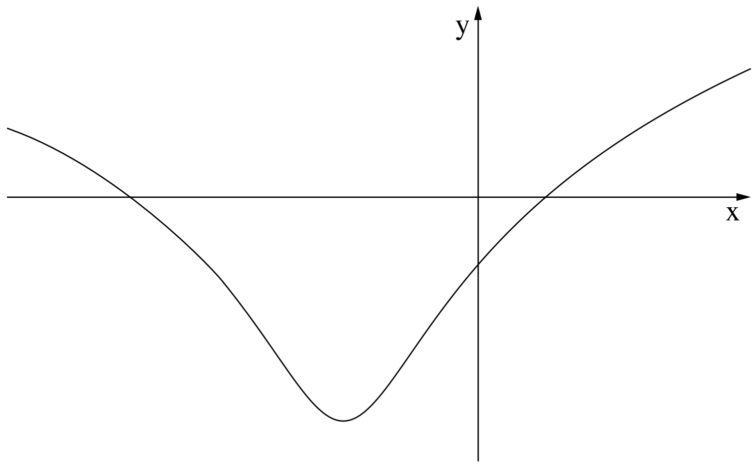
القاسم موجب لكلّ x لأنّه يتحقّق: $\ell n2 > 0$, $x^2+4x+5 > 0$ لكلّ x

لذلك: $\Downarrow$

x	$x < -2$	-2	$x > -2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	نقطة نهاية صغرى	$\nearrow$

نقطة النهاية الصغرى للدالّة $f(x)$ هي: $(-2, -\ell og_2 10)$

د. رسم الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$:



/يتبع في صفحة 9/

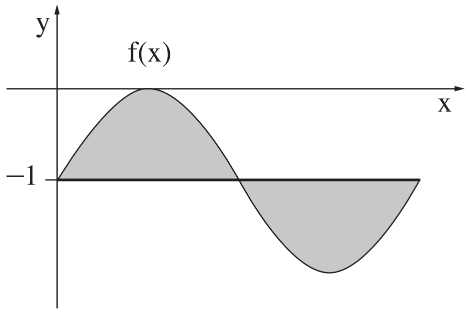
حساب التفاضل والتكامل للدوالّ المثلّثيّة
المهمّة 4

معطى أنّ $f'(x) = 2\cos(2x)$ هي دالّة المشتقّة لِـ $f(x)$ ، في المجال $0 \le x \le \pi$.

أ. في المجال المعطى، جد الإحداثيّات x للنقاط القصوى الداخليّة لِـ $f(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقاط.

ب. في المجال المعطى، المستقيم $y = 0$ يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في نقطة نهايتها العظمى.
جد الدالّة $f(x)$.

جـ. يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ وللمستقيم $y = -1$
في المجال $0 \le x \le \pi$.
في المجال المعطى، جد:
(1) نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المستقيم $y = -1$.
(2) المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمستقيم $y = -1$
(المساحة الرماديّة في الرسم).



اقتراح إجابة للمهمّة 4

أ. النقاط الداخليّة "المحتملة"
كنقاط قصوى للدالّة $f(x)$ هي النقاط
التي فيها المشتقّة $f'(x)$ تساوي صفرًا. $f'(x) = 0$

نجد النقاط التي فيها المشتقّة
تساوي صفرًا في المجال $0 < x < \pi$: $2\cos(2x) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\cos(2x) = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\Downarrow$$

حلّ عامّ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ k عدد صحيح

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة المهمّة 4.

الحلّان في المجال $0 < x < \pi$ هما: $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3}{4}\pi$

فحص إشارات المشتقّة $f'(x)$
في المجال $0 < x < \pi$:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5\pi}{6}$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	نقطة نهاية عظمى	↘	نقطة نهاية صغرى	↗

$\Downarrow$

الإحداثيّ x لنقطة النهاية العظمى الداخليّة هو: $x = \frac{\pi}{4}$

الإحداثيّ x لنقطة النهاية الصغرى الداخليّة هو: $x = \frac{3}{4}\pi$

ب. $y = 0$ يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في نقطة النهاية العظمى
الإحداثيّ x لنقطة النهاية العظمى هو: $\frac{\pi}{4}$
لذلك نقطة النهاية العظمى هي: $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$
$f(x)$ هي دالّة أصليّة
لِـ $f'(x)$ ولذلك: $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 2\cos(2x)\,dx = \sin(2x) + C$

تعويض نقطة النهاية العظمى في $f(x)$: $f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{2} + C = 0$

$1 + C = 0$

$\Downarrow$

قيمة C هي: $C = -1$

$\Downarrow$

الدالّة $f(x)$ هي: $f(x) = \sin(2x) - 1$

جـ. (1) إيجاد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$
مع المستقيم $y = -1$: $\sin(2x) - 1 = -1$

$\sin(2x) = 0$

حلّ عامّ: $2x = \pi k$

$x = \frac{\pi k}{2}$ ، k عدد صحيح

نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$
والمستقيم $y = -1$ هي: $(0, -1)$, $(\frac{\pi}{2}, -1)$, $(\pi, -1)$

/ يتبع في صفحة 11 /

تكملة إجابة المهمّة 4.

(2) قسم من المساحة الرماديّة موجود فوق المستقيم $y = -1$
وقسم منه موجود تحت المستقيم $y = -1$

$$\text{المساحة الرماديّة} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x) - (-1)\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-1 - f(x)\right)dx$$

$$\text{المساحة الرماديّة} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(2x)\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\sin(2x)\right)dx$$

نحسب كلّ مساحة على حِدة:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx = \frac{-\cos(2x)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos\pi}{2} + \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin(2x)\,dx = \frac{\cos(2x)}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\cos(2\pi)}{2} - \frac{\cos(\pi)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\text{المساحة الرماديّة} = 1 + 1 = 2$$

/ يتبع في صفحة 12 /

التزايد والتضاؤل

المهمّة 5

في 1/1/2008 كان في بِرْكة أسماك كمّيّة معيّنة من الأسماك.

كمّيّة الأسماك تزداد بنسبة مئويّة ثابتة كلّ سنة.

في 1/1/2011 كانت كمّيّة الأسماك في البِرْكة أكبر بـ 33.1% من كمّيّة الأسماك التي كانت فيها في 1/1/2008.

أ. جد النسبة المئويّة للزيادة السنويّة في كمّيّة الأسماك.

في 1/1/2011 باعوا نصف كمّيّة الأسماك التي كانت في البِرْكة.

ب. إذا استمرّت كمّيّة الأسماك التي تبقّت في البِرْكة في الازدياد بنفس النسبة المئويّة الثابتة كلّ سنة، بعد مرور كم سنة منذ التاريخ 1/1/2011 ستصل كمّيّة الأسماك في البِرْكة إلى نفس الكمّيّة التي كانت فيها قبل البيع في 1/1/2011؟
دقّق في إجابتك حتّى رقمين بعد الفاصلة العشريّة.

جـ. بعد أن باعوا في 1/1/2011 نصف كمّيّة الأسماك التي كانت في البِرْكة، قرّروا تغيير تغذية الأسماك.
بعد التغيير، ازدادت كمّيّة الأسماك بنسبة مئويّة ثابتة جديدة كلّ سنة.
حسب النسبة المئويّة الجديدة للزيادة السنويّة، ستصل كمّيّة الأسماك إلى نفس الكمّيّة التي كانت في 1/1/2011 قبل البيع، في سنتين أقلّ من عدد السنوات التي حسبتَها في البند "ب". جد النسبة المئويّة الجديدة للزيادة السنويّة.

اقتراح إجابة للمهمّة 5

أ. نرمز: بـ $f(t)$ إلى كمّية الأسماك في البركة بعد مرور t سنوات منذ التاريخ 1/1/2008،
وَبـ a إلى معامل التزايد السنويّ.
يتحقّق: $f(t) = f(0) \cdot a^t$

بعد مرور 3 سنوات في تاريخ 1/1/2011
الكمّيّة الابتدائيّة ازدادت بـ 33.1%،
لذلك يتحقّق: $1.331 \cdot f(0) = f(0) \cdot a^t$

$$\Downarrow$$

$$1.331 = a^3$$

$$\sqrt[3]{1.331} = a$$

$$1.1 = a$$

$$\Downarrow$$

النسبة المئويّة للزيادة السنويّة لكمّيّة الأسماك هي: 10%

في 1/1/2011 كان في البركة $1.331 \cdot f(0)$.

نصف الكمّيّة بيع،
لذلك كمّيّة الأسماك التي تبقّت في البركة هي: $\frac{1.331 \cdot f(0)}{2}$

/ يتبع في صفحة 13 /

تكملة إجابة المهمّة 5.

ب. إذا بقيت النسبة المئويّة للزيادة السنويّة 10%
فإنّ كمّيّة الأسماك ستضاعف نفسها بعد مرور t سنوات.

لذلك يتحقّق:

$$1.331 \cdot f(0) = \frac{1.331 \cdot f(0)}{2} \cdot 1.1^t$$

$$2 = 1.1^t$$

$$\Downarrow$$

$$t = \frac{\ell n2}{\ell n1.1}$$

$$\Downarrow$$

كمّية الأسماك ستضاعف نفسها بعد مرور: $t =$ 7.27 سنوات

ج. بعد بيع الأسماك في تاريخ 1/1/2011
كمّيّة الأسماك التي تبقّت في البركة هي: $\frac{1.331 \cdot f(0)}{2}$

كمّيّة الأسماك التي تبقّت في البركة في تاريخ 1/1/2011
ستضاعف نفسها بعد مرور $7.27 - 2 = 5.27$ سنوات.

نرمز بـ a_1 إلى معامل الزيادة السنويّة الجديد.
لذلك يتحقّق:

$$1.331 \cdot f(0) = \frac{1.331 \cdot f(0)}{2} \cdot a_1^{5.27}$$

$$\Downarrow$$

$$2 = a_1^{5.27}$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 = \sqrt[5.27]{2}$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 = 1.14$$

$$\Downarrow$$

النسبة المئويّة الجديدة للزيادة السنويّة هي: 14%