مدينت يشرائيل
משרד החינוך

دولة إسرائيل
وزارة التّربية والتّعليم

משימות והצעת תשובות

קיץ תשע"ד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון שני

مهمّات واقتراح إجابات

صيف 2014

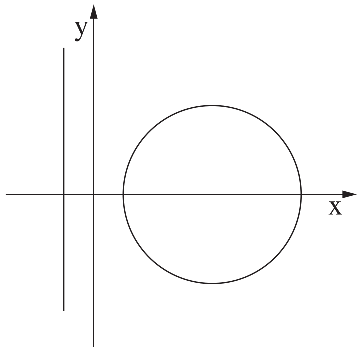
الرياضيّات

5 وحدات تعليميّة – النّموذج الثّاني

/يتبع في الصفحة التالية/

الهندسة التحليليّة

المهمّة 1



معطاة الدائرة $(x-a)^2 + y^2 = R^2$

ومعطى المستقيم $x = R - a$ ، $0 < R < a$

(انظر الرسم) .

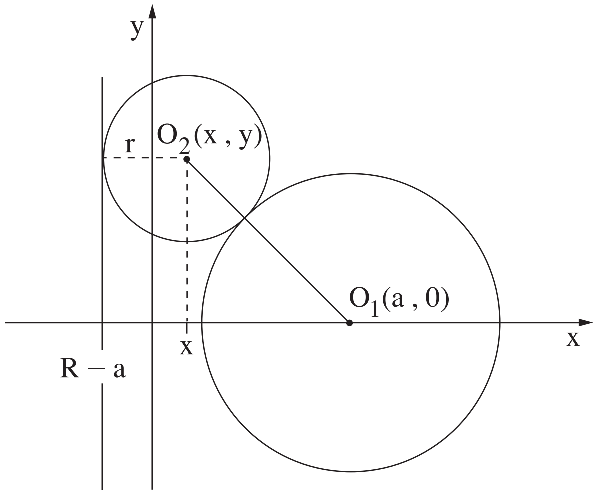
المحلّ الهندسيّ لمراكز الدوائر التي تمسّ من الخارج الدائرة المعطاة والمستقيم المعطى، هو قطع مكافئ معادلته $y^2 = 16x$.

أ. جد قيمة a .

ب. الدائرتان اللتان مركزاهما M وَ P تمسّان من الخارج الدائرة المعطاة والمستقيم المعطى.
نصف قطر كلّ واحدة من هاتين الدائرتين هو $5 - R$.
جد إحداثيّات نقطة التقاء المستقيمين اللذين يمسّان القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 16x$ في النقطتين M وَ P.

اقتراح إجابة للمهمّة 1

أ.



نرمز: $O_2(x , y)$ — مركز الدائرة الماسّة

$R - a < 0$ والإحداثيّ x لِـ O_2 أكبر من 0 ، لذلك
نصف قطر الدائرة التي تمسّ المستقيم المعطى والدائرة المعطاة هو:

$$r = x - (R - a)$$ انظر الرسم

$$\Downarrow$$

$$\text{I.} \quad r = a - R + x$$

البُعد بين مركز الدائرة المعطاة، $O_1(a , 0)$ ،
ومركز الدائرة الماسّة يحقّق:

$$\text{II.} \quad \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = r + R$$

البُعد بين مركزَي الدائرتين اللتين تمسّ إحداهما الأخرى هو مجموع نصفَي قطرهما .

حسب المعطى:

$$\text{III.} \quad y^2 = 16x$$

من تعويض I وَ III في II ينتج:

$$(x-a)^2 + 16x = (a - R + x + R)^2$$

$$\Downarrow$$

$$4ax = 16x \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

/ يتبع في صفحة 3 /

تكملة حلّ المهمّة 1.

ب. وجدنا في البند "أ" أنّ نصف قطر الدائرة الماسّة هو: $r = a - R + x$

$\Downarrow$

وجدنا أنّ $a = 4$ ، لذلك: $r = 4 - R + x$

$\Downarrow$

نعوّض المعطى $r = 5 - R$: $5 - R = 4 - R + x$

$\Downarrow$

الإحداثيّ x لمركز الدائرة الماسّة هو: $x = 1$

نعوّض $x = 1$ في معادلة القطع المكافئ وينتج
أنّ الإحداثيّ y لمركز الدائرة الماسّة هو: $y = \pm 4$

أي هناك نقطتان على القطع المكافئ تحقّقان
المعطى $r = 5 - R$ ، وهما: $(1, 4)$, $(1, -4)$

حسب القانون، معادلة المماسّ للقطع المكافئ
في النقطة $(1, 4)$ هي: $y = 2x + 2$

ومعادلة المماسّ للقطع المكافئ في النقطة $(1, -4)$ هي: $y = -2x - 2$

لذلك، يلتقي المماسّان في النقطة: $(-1, 0)$

/يتبع في صفحة 4/

المتّجهات
المهمّة 2

النقطة A تقع في المستوى π_1 الذي معادلته $x - z - 2 = 0$.

النقطة B والنقطة C تقعان في المستوى π_2 الذي معادلته $x - z - 12 = 0$.

أ. جد الزاوية التي بين مستقيم معامد للمستوى π_1 وبين المحور y .

ب. معطى أنّ: المستقيم AC يوازي المستقيم الذي تمثيله البارامتريّ هو $\underline{x} = t(2, 0, -2)$.

جد طول AC . علّل.

جـ. معطى أيضًا أنّ: $\overrightarrow{BC} = (2, -1, c)$.

جد مساحة المثلّث ABC .

اقتراح إجابة للمهمّة 2

أ. متّجه اتّجاه المحور y : $(0, 1, 0)$

متّجه اتّجاه المستقيم المعامد للمستوى π_1 : $(1, 0, -1)$

الزاوية α التي بين المحور y والمستقيم المعامد للمستوى π_1 تحقّق: $\cos\alpha = \frac{|(0,1,0)\cdot(1,0,-1)|}{\sqrt{1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = 0$

$\Downarrow$

$\alpha = 90^o$

ب. متّجه اتّجاه المستقيم المعامد للمستوى π_1 : $(1, 0, -1)$

$\Downarrow$

المستقيم $t(2, 0, -2)$ يوازي المستقيم المعامد لـِ π_1

$\Downarrow$

$\overrightarrow{AC}$ يوازي المستقيم $t(1, 0, -1)$ ، لذلك: $\overrightarrow{AC} \perp \pi_1$

$\Downarrow$

طول $\overrightarrow{AC}$ هو البُعد بين المستويين π_1 وَ π_2

$\Downarrow$

$$|\overrightarrow{AC}| = \frac{|-2+12|}{\sqrt{1^2+0+1^2}} = 5\sqrt{2}$$

/يتبع في صفحة 5/

تكملة حلّ المهمّة 2.

جـ. وجدنا في البند "ب" أنّ:

$\overrightarrow{AC} \perp \pi_1$

$\Downarrow$

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ المستقيم المعامد للمستوى يعامد كلّ مستقيم في المستوى

$\Downarrow$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\Downarrow$

$(2, 0, -2) \cdot (2, -1, c) = 0$

$\Downarrow$

$c = 2$

$\Downarrow$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$

مساحة المثلّث ABC هي: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|$

$\Downarrow$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3 = \frac{15\sqrt{2}}{2}$

/يتبع في صفحة 6/

الأعداد المركّبة
المهمّة 3

z هو عدد مركّب لا يساوي 0.

أ. إذا كانت ثلاثة الأعداد $\frac{1}{z}$, $z+\frac{1}{z}$, z هي ثلاثة حدود متتالية في متوالية حسابيّة،
جد z (جد جميع الحلول).

ب. إذا كان $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|$ وَ $0^\circ<\arg(z)<90^\circ$ ،
جد $\arg(z+\frac{1}{z})$.

ملاحظة: حلّ البند "ب" لا يتعلّق بحلّ البند "أ".

اقتراح إجابة للمهمّة 3

أ. في المتوالية الحسابيّة يتحقّق:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)-z=\frac{1}{z}-\left(z+\frac{1}{z}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$z^2=-1$$
$$\Downarrow$$
$$z=\pm\sqrt{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$z=\pm i$$

ب. الطريقة I

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$$
$$\Downarrow$$
$$|z|^2=1$$
$$\Downarrow$$

معلوم أنّ $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ ، لذلك:

$$z\cdot\bar{z}=1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{z}=\bar{z}$$

إذا كان $z=\cos\theta+i\sin\theta$ ، ينتج:

$$\bar{z}=\cos\theta-i\sin\theta$$
$$\Downarrow$$
$$z+\frac{1}{z}=z+\bar{z}=2\cos\theta+0\cdot i$$
$$\Downarrow$$

الزاوية α التي يكوّنها العدد $z+\frac{1}{z}$ مع الاتّجاه الموجب للمحور x تحقّق:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{0}{2\cos\theta}=0$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha=0\quad,\quad\alpha=180^\circ$$
$$\Downarrow$$

$2\cos\theta>0$ لأنّ z في الربع الأوّل، لذلك:

$$\arg(z+\frac{1}{z})=0$$

/يتبع في صفحة 7/

تكملة حلّ المهمّة 3.

الطريقة II

القيمة المطلقة لِـ z هي: $|z| = r$

القيمة المطلقة لِـ $\frac{1}{z}$ هي: $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r}$

حسب المعطى $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$، لذلك: $r = \frac{1}{r}$

$$\Downarrow$$

$$r = 1$$

إذا كان $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ، ينتج: $\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta + 0 \cdot i$$

$$\Downarrow$$

الزاوية α التي يكوّنها العدد $z + \frac{1}{z}$ مع الاتّجاه الموجب للمحور x تحقّق: $\text{tg}\alpha = \frac{0}{2\cos\theta} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 0 \ , \ \alpha = 180^\circ$$

$$\Downarrow$$

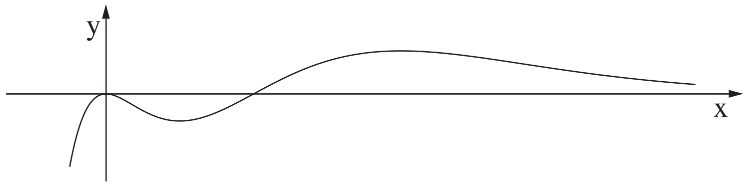
$2\cos\theta > 0$ ، لذلك: $\arg(z + \frac{1}{z}) = 0$

/يتبع في صفحة 8/

بحث الدالّة الأسّيّة

المهمّة 4

معطاة الدالّة $f(x) = (x^3 - ax^2)e^{-x}$ (انظر الرسم) .
a هو بارامتر أكبر من 0 .



أ . ما هو مجال تعريف الدالّة $f(x)$ ؟

ب . الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ يقطع المحور x في نقطة أصل المحاور وفي النقطة A .
المستقيم الذي يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في النقطة A يُكوِّن مع المحورين مثلّثًا مساحته $\frac{8}{e^a}$.
جد قيمة a .

عوِّض قيمة a التي وجدتَها، وأجب عن البنود "جـ" – "هـ" .

جـ. جد إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة $f(x)$.
حدِّد نوع هذه النقاط حسب الرسم البيانيّ.

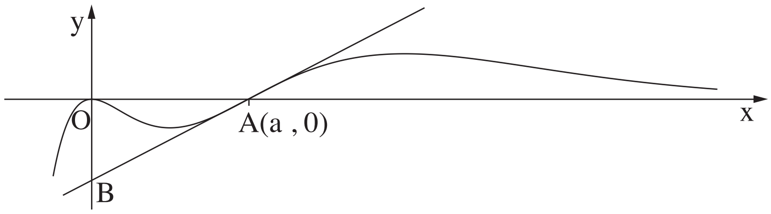
د . ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا لدالّة المشتقّة $f'(x)$. استعن بالحقيقة أنّ الجزء الموجب للمحور x هو خطّ تقارب أفقيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$.

هـ. جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والمحور x .

اقتراح إجابة للمهمّة 4

أ . مجال التعريف: الدالّة $f(x)$ معرَّفة لكلّ x

ب .



نقاط تقاطع $f(x)$ مع المحور x : $f(x) = 0 \Rightarrow x^2(x - a) = 0 \quad , \quad e^{-x} > 0$

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \quad , \quad x = a$$

$$\Downarrow$$

إحداثيّات النقطة A : $A(a, 0)$

/ يتبع في صفحة 9 /

تكملة حلّ المهمّة 4.

$$f(x) = \frac{x^3 - ax^2}{e^x}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2ax) \cdot e^x - e^x(x^3 - ax^2)}{e^{2x}}$$

$$\Downarrow$$

نقسم طرفَي المعادلة على e^x ، وينتج:

$$f'(x) = \frac{(3+a)x^2 - x^3 - 2ax}{e^x}$$

$$\Downarrow$$

ميل المماسّ في النقطة $A(a, 0)$:

$$f'(a) = \frac{a^2}{e^a}$$

معادلة المماسّ في النقطة $A(a, 0)$:

$$y = \frac{a^2}{e^a}(x - a) = \frac{a^2}{e^a}x - \frac{a^3}{e^a}$$

مساحة المثلّث هي:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OB|$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a^3}{e^a}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{8}{e^a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{e^a}$$

$$\Downarrow$$

$$a = 2$$

جـ. نعوّض $a = 2$:

$$f'(x) = \frac{5x^2 - x^3 - 4x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x(x^2 - 5x + 4) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = 4$$

$$f(0) = 0 \ , \ f(1) = -\frac{1}{e} \ , \ f(4) = \frac{32}{e^4}$$

حسب الرسم البيانيّ: نهاية عظمى في $(0, 0)$ ، $\left(4, \frac{32}{e^4}\right)$

نهاية صغرى في $\left(1, -\frac{1}{e}\right)$

/ يتبع في صفحة 10 /

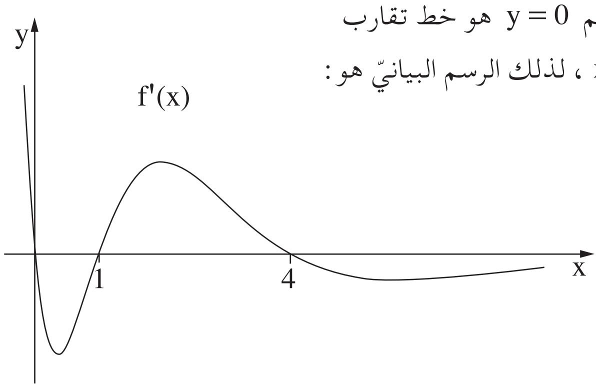
تكملة حلّ المهمّة 4.

د. حسب النقاط القصوى لِـ f(x) : $f'(0)=0 \;,\; f'(1)=0 \;,\; f'(4)=0$

حسب مجالات تصاعد وتنازل f(x) : $f'(x)>0$ بالنسبة لِـ $x<0 \;,\; 1<x<4$

$f'(x)<0$ بالنسبة لِـ $0<x<1 \;,\; x>4$

حسب المعطى، المستقيم $y=0$ هو خطّ تقارب لِـ f'(x) بالنسبة لِـ $x>0$ ، لذلك الرسم البيانيّ هو :



هـ. $$S=-\int_0^1 f'(x)\,dx+\int_1^4 f'(x)\,dx=-\left[f(x)\right]_0^1+\left[f(x)\right]_1^4=-f(1)+f(0)+f(4)-f(1)$$

$$\Downarrow$$

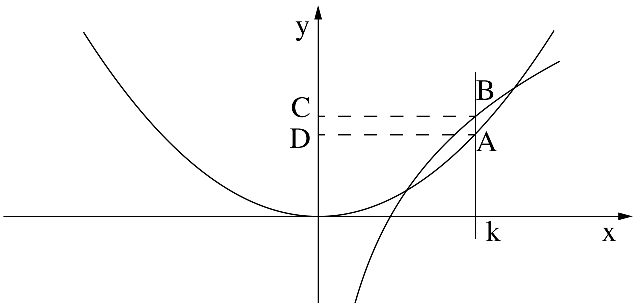
$$S=\frac{1}{e}+0+\frac{32}{e^4}+\frac{1}{e}$$

$$\Downarrow$$

$$S=\frac{32}{e^4}+\frac{2}{e}=1.32$$

/ يتبع في صفحة 11 /

بحث الدالّة اللوغريثميّة
مسألة نهاية صغرى – نهاية عظمى
المهمّة 5



الرسمان البيانيّان للدالّتين: $f(x) = x^2$

$g(x) = \ell n(ax)$

يلتقيان في نقطتين.

a هو بارامتر أكبر من 0 .

المستقيم $x = k$ يقطع الرسم

البيانيّ للدالّة $f(x)$ في النقطة A

والرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ في النقطة B .

يقع هذا المستقيم بين نقطتي تقاطع الرسمين البيانيّين (انظر الرسم).

أ. فسّر لماذا لا يمكن أن تتواجد قيَم k في المجال $0 < k < \frac{1}{a}$.

مرّروا عبر النقطتين B وَ A مستقيمين موازيين للمحور x ، يقطعان المحور y في النقطتين C وَ D بالتلاؤم (انظر الرسم).

ب. جد قيمة k ، التي بالنسبة لها محيط المستطيل ABCD هو أكبر ما يمكن.

جـ. مرّروا مستقيمًا يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ في النقطة B التي تنتج بالنسبة للمستطيل الذي محيطه أكبر ما يمكن. معطى أنّ المماسّ يمرّ في النقطة $(0 , 0)$.
جد الدالّة $g(x)$.

اقتراح إجابة للمهمّة 5

أ. حسب الرسم: $g(x) > f(x)$ في المجال الذي بين نقطتَي تقاطع الرسمين البيانيّين

$\Downarrow$

في المجال الذي بين نقطتَي التقاطع: $\ell n(ax) > x^2$

$\Downarrow$

$x^2 \geq 0$ ، لذلك: $\ell n(ax) > 0$

$\Downarrow$

$ax > 1$

$\Downarrow$

$x > \frac{1}{a}$

$\Downarrow$

$x = k$ ، لذلك: قيَم k <u>ليست</u> في المجال $0 < k < \frac{1}{a}$

/ يتبع في صفحة 12 /

تكملة حلّ المهمّة 5.

ب. الإحداثيّان x لِـ A ولِـ D هما: $x_D = 0 \quad , \quad x_A = k$

$\Downarrow$

$AD = k$

الإحداثيّان y لِـ A ولِـ B هما: $y_B = \ell n(ak) \quad , \quad y_A = k^2$

$\Downarrow$

$AB = \ell n(ak) - k^2$

محيط المستطيل ABCD : $P(k) = 2AD + 2AB$

$\Downarrow$

$P(k) = 2k + 2\ell n(ak) - 2k^2$

$\Downarrow$

$$P'(k) = 2 + \frac{2a}{ak} - 4k = 2 + \frac{2}{k} - 4k$$

$$P'(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 + \frac{2}{k} - 4k = 0$$

$\Downarrow$

$2k^2 - k - 1 = 0$

$\Downarrow$

$k = 1$ ($k = -\frac{1}{2}$ ليست في المجال)

فحص نهاية عظمى: $P''(k) = -\frac{2}{k^2} - 4$

$\Downarrow$

$P''(1) < 0$

$\Downarrow$

نهاية عظمى في $k = 1$

جـ. إحداثيّات النقطة B بالنسبة لِـ $k = 1$ هي: $B(1, \ell na)$

$$g'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

$\Downarrow$

ميل المماسّ لِـ$g(x)$ في النقطة $B(1, \ell na)$: $g'(1) = 1$

معادلة المماسّ: $y - \ell na = x - 1$

$\Downarrow$

$y = x - 1 + \ell na$

المماسّ يمرّ عبر $(0, 0)$ لذلك: $0 = 0 - 1 + \ell na$

$\Downarrow$

$a = e$

$\Downarrow$

$g(x) = \ell n(ex) = 1 + \ell nx$