

משימות והצעת תשובות

קיץ תשע"ד

מתמטיקה

3 יחידות לימוד – שאלון שלישי

מחמט וاقترح إجابات

صيف 2014

الرياضيات

3 وحدات تعليمية – النموذج الثالث

مسائل شراء وبيع المهّمة 1

- اشترت نسرين من محلّ للأدوات المكتبيّة x دفاتر، ودفعت مقابلها 300 شيقل.
بعد مرور يومين أعلن المحلّ عن تخفيض.
في نفس اليوم، اشترت دانا 10 دفاتر أكثر من نسرين، ودفعت 2 شيقل أقلّ مقابل كلّ دفتر.
دفعت دانا 350 شيقل مقابل جميع الدفاتر التي اشترتها.
أ. جد كم دفترًا اشترت نسرين.
ب. جد سعر الدفتر الواحد قبل التخفيض.

اقتراح إجابة للمهّمة 1

أ. عدد الدفاتر التي اشترتها نسرين هو: x دفاتر
سعر الدفتر الواحد قبل التخفيض هو: $\frac{300}{x}$

عدد الدفاتر التي اشترتها دانا هو: $x + 10$
سعر الدفتر الواحد بتخفيض 2 شيقل للدفتر هو: $\frac{300}{x} - 2$

دفعت دانا مقابل الدفاتر 350 شيقل،

لذلك يتحقّق: $(x + 10) \left(\frac{300}{x} - 2 \right) = 350$

↓

$$300 + \frac{3000}{x} - 2x - 20 = 350$$

↓

$$2x^2 + 70x - 3000 = 0 \quad \text{تنتج معادلة تربيعية:}$$

↓

$$x = 25 \quad , \quad x = -60$$

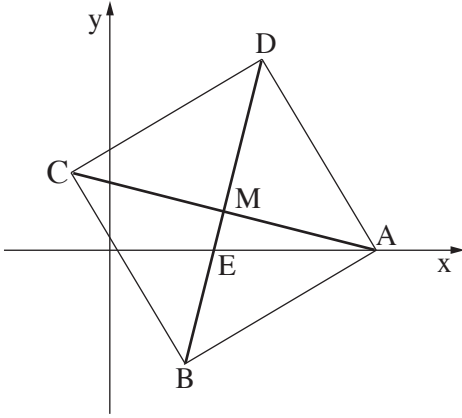
$x > 0$ ، لذلك عدد الدفاتر هو: $x = 25$

ب. سعر الدفتر الواحد قبل التخفيض هو: $\frac{300}{25} = 12$ شيقل

الهندسة التحليلية

المهمة 2

قطرا المربع ABCD موضوعان على المستقيمين $y = 4x - 11$ و $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ ويلتقيان في النقطة M، كما هو موصوف في الرسم.



- النقطة A تقع على المحور x .
 أ. جد إحداثيات النقاط A و M و C .
 ب. الإحداثي y للنقطة D هو 5 .
 جد الإحداثي x للنقطة D .
 ج. القطر DB يقطع المحور x في النقطة E .
 (1) جد إحداثيات النقطة E .
 (2) جد مساحة المثلث AED .

اقتراح إجابة للمهمة 2

أ. إيجاد إحداثيات النقطة A :

القطر AC يقطع المحور y في جزئه الموجب، لذلك معادلته: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

النقطة A تقع على المستقيم AC .

الإحداثي y للنقطة A هو 0 ،

لذلك :

$$0 = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

↓

$$x = 7$$

$$A(7, 0)$$

إحداثيات النقطة A هي :

إيجاد إحداثيات النقطة M :

النقطة M هي نقطة تقاطع القطرين، لذلك يتحقق :

$$\begin{cases} y = 4x - 11 \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4} \end{cases}$$

↓

$$x = 3 , y = 1$$

$$M(3, 1)$$

من حلّ هيئة المعادلات تنتج إحداثيات النقطة M :
 إحداثيات النقطة M هي :

إيجاد إحداثيات النقطة C :

في المربع، القطران ينصف أحدهما الآخر،

لذلك النقطة M هي نقطة منتصف القطعة AC .

نرمز إلى إحداثيات النقطة C :

$$C(x, y)$$

$$\frac{x+7}{2} = 3 , \frac{y+0}{2} = 1$$

↓

$$C(-1, 2)$$

إحداثيات النقطة C تحقق :

إحداثيات النقطة C هي :

تكملة إجابة المهمة 2.

$$y = 4x - 11$$

ب. النقطة D تقع على القطر BD الذي معادلته:

$$5 = 4x - 11$$

الإحداثي y للنقطة D هو 5، لذلك يتحقّق:

⇓

$$x = 4$$

$$D(4, 5)$$

إحداثيات النقطة D هي:

$$y = 4x - 11$$

ج. (1) النقطة E تقع على القطر BD الذي معادلته:

$$0 = 4x - 11$$

الإحداثي y للنقطة E هو 0، لذلك يتحقّق:

⇓

$$x = 2.75$$

$$E(2.75, 0)$$

إحداثيات النقطة E هي:

$$A(7, 0), E(2.75, 0)$$

(2) إحداثيات النقطتين A و E هي:

النقطتان A و E تقعان على المحور x،

$$AE = 7 - 2.75 = 4.25$$

لذلك طول القطعة AE هو:

الارتفاع على الضلع AE في المثلث AED

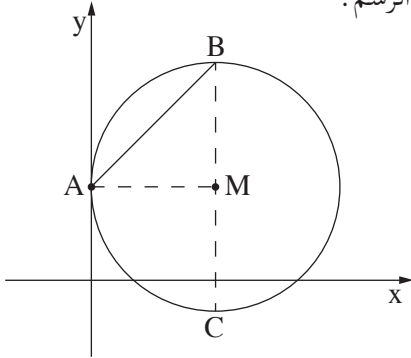
هو الإحداثي y للنقطة D.

$$S_{AED} = \frac{AE \cdot y_D}{2} = \frac{4.25 \cdot 5}{2} = 10.625$$

لذلك مساحة المثلث AED هي:

الهندسة التحليلية

المهمة 3



دائرة مركزها $M(4, 3)$ تمسّ المحور y في النقطة A ، كما هو موصوف في الرسم.

أ. (1) جد إحداثيات النقطة A .

(2) جد معادلة الدائرة.

ب. مرّروا من النقطة A وترًا يقطع الدائرة في نقطة إضافية، B .

ميل الوتر هو 1.

(1) جد معادلة الوتر AB .

(2) جد إحداثيات النقطة B .

ج. مرّروا من النقطة B قطرًا في الدائرة يقطع الدائرة في النقطة C .

جد إحداثيات النقطة C .

اقتراح إجابة للمهمة 3

أ. (1) $M(4, 3)$ هي مركز الدائرة.

الدائرة تمسّ المحور y في النقطة A ، لذلك AM هو نصف قطر في الدائرة يعامد المحور y .

الإحداثي y للنقطة A هو 3، كالإحداثي y للنقطة M ،

لذلك إحداثيات النقطة A هي: $A(0, 3)$

(2) الإحداثي x للنقطة M هو 4، لذلك

نصف قطر الدائرة هو: $R = 4$

معادلة الدائرة هي: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$

ب. (1) ميل الوتر AB معطى، وهو: 1

إحداثيات النقطة A هي: $A(0, 3)$

لذلك معادلة الوتر AB هي: $y = x + 3$

(2) النقطة B تقع على الوتر AB وكذلك على محيط الدائرة،

لذلك تحقّق هيئة المعادلات: $\begin{cases} y = x + 3 \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16 \end{cases}$

الحلّان الناتجان من هيئة المعادلات هما: $(0, 3)$ ، $(4, 7)$

إحدى النقطتين معطاة وهي النقطة A ،

النقطة الثانية هي النقطة B ،

لذلك إحداثيات النقطة B هي: $B(4, 7)$

تكملة إجابة المهمة 3.

ج. معطى أنّ: BC قطر في الدائرة.

مركز الدائرة M — هو منتصف القطر.

الطريقة I:

نرمز إلى إحداثيات النقطة C : $C(x, y)$

إحداثيات النقطة C تحقق:

$$\frac{x+4}{2} = 4, \quad \frac{y+7}{2} = 3$$

↓

$$C(4, -1)$$

إحداثيات النقطة C هي:

الطريقة II:

$$x_B = x_M = 4$$

↓

المستقيم BM يعامد المحور x

↓

$$x_C = 4$$

الإحداثي x للنقطة C هو:

$$y_C = y_M - 4$$

معطى أنّ: نصف قطر الدائرة هو 4 ، لذلك:

$$y_M = 3$$

↓

$$y_C = 3 - 4 = -1$$

↓

$$C(4, -1)$$

إحداثيات النقطة C هي:

حساب التفاضل والتكامل المهمّة 4

معطاة الدالة: $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}$.

- أ. اكتب مجال تعريف الدالة.
 ب. جد النقطة القصوى للدالة، وحدّد نوع هذه النقطة.
 ج. هل الدالة تصاعديّة أم تنازليّة في المجال $x < 0$ ؟ علّل.
 د. معلوم أنّ الرسم البيانيّ للدالة $f(x)$ يقطع المحور x في نقطة واحدة فقط، التي فيها $x = -2.52$.
 اعتمد أيضًا على إجاباتك عن البنود "أ" - "ج"، وارسم رسمًا بيانيًا تقريبيًا للدالة.

اقتراح إجابة للمهمّة 4

أ. مجال تعريف الدالة $f(x)$ هو: $x \neq 0$

ب. مشتقة الدالة $f(x)$ هي: $f'(x) = x - \frac{8}{x^2}$

$$f'(x) = 0$$

$$x - \frac{8}{x^2} = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$x = 2$$

حلّ المعادلة $f'(x) = 0$ هو:

فحص إشارة المشتقة $f'(x)$

في مجال تعريف الدالة $f(x)$ ،

وتحديد مجالات تصاعد وتنازل الدالة $f(x)$:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	-		-	0	+
	$f'(-1) = -9 < 0$		$f'(1) = -7 < 0$	نقطة نهاية صغرى	$f'(4) = 3.5 > 0$
$f(x)$	↘		↘	6	↗

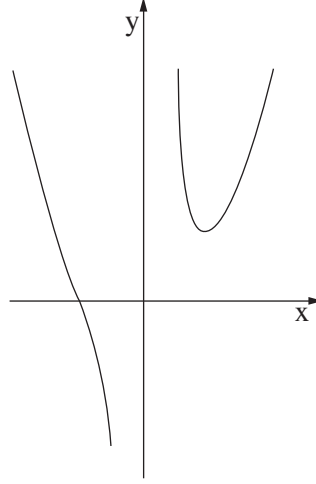
إحداثيات النقطة القصوى هي: $(2, 6)$

نوع النقطة القصوى: نقطة نهاية صغرى.

تكملة إجابة المهمة 4.

ج. حسب الجدول في البند "ب"، الدالة $f(x)$ تنازليّة في المجال $x < 0$ ، لأنّ المشتقة $f'(x)$ سالبة في هذا المجال.

د. رسم بيانيّ تقريبيّ للدالة:



حساب التفاضل والتكامل المهمة 5

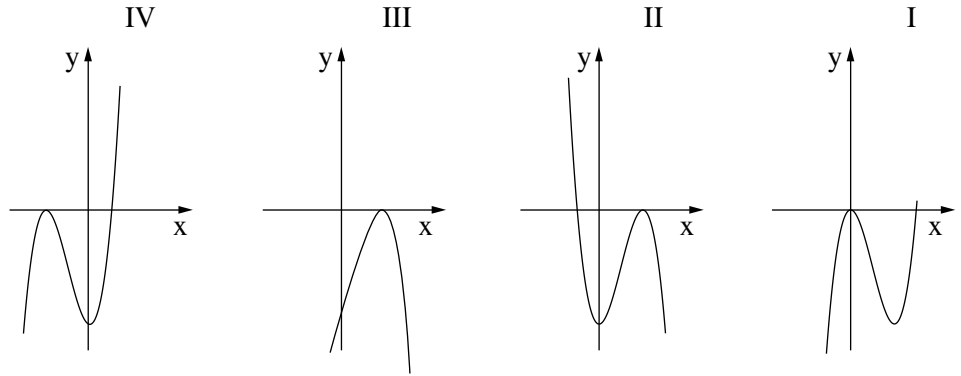
مشتقة الدالة $f(x)$ هي: $f'(x) = -3x^2 + 6x$.

أ. جد الإحداثيات x للنقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحدد نوع هذه النقاط.

ب. الإحداثي y لنقطة النهاية العظمى للدالة $f(x)$ هو 0.

جد الدالة $f(x)$.

ج. حدّد أيّ رسم بيانيّ من الرسوم البيانيّة IV-I التي أمامك هو الرسم البيانيّ للدالة $f(x)$ ، التي وجدتها في البند "ب".



اقتراح إجابة للمهمة 5

أ. معطاة دالة المشتقة $f'(x)$: $f'(x) = -3x^2 + 6x$

$$f'(x) = 0$$

$$-3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(-x + 2) = 0$$

↓

$$x = 0, \quad x = 2$$

الإحداثي x للنقطتين

اللتين فيهما المشتقة تساوي صفرًا:

فحص إشارة المشتقة $f'(x)$

وفحص مجالات تصاعد وتنازل

الدالة $f(x)$:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
	$f'(-1) = -9 < 0$		$f'(1) = 3 > 0$		$f'(3) = -9 < 0$
$f(x)$	↘	نقطة نهاية صغرى	↗	نقطة نهاية عظمى	↘

لذلك

الإحداثي x لنقطة النهاية الصغرى هو: $x = 0$

الإحداثي x لنقطة النهاية العظمى هو: $x = 2$

تكملة إجابة المهمة 5.

ب. معطى أنّ الإحداثي y لنقطة النهاية العظمى هو 0 ،
لذلك إحداثيات نقطة النهاية العظمى هي : $(2, 0)$

الدالة $f(x)$ هي الدالة الأصلية لـ $f'(x)$
التي تمرّ عبر النقطة $(2, 0)$ ، لذلك :

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-3x^2 + 6x) dx$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + C$$

$$f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 + C = 0$$

من تعويض إحداثيات النقطة $(2, 0)$

$$C = -4$$

تنتج قيمة C ،

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$$

لذلك الدالة $f(x)$ هي :

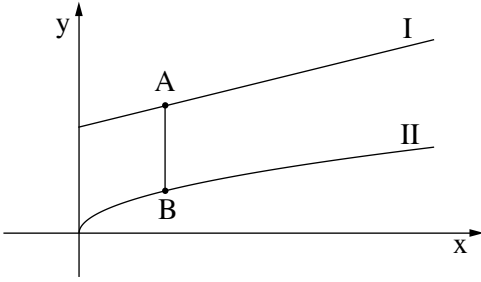
ج. نقطة النهاية العظمى هي $(2, 0)$ ، لذلك الرسم البياني I و IV غير ملائمين .

توجد للدالة نقطة نهاية صغرى في $x = 0$ ، لذلك الرسم البياني III غير ملائم أيضًا .

↓

الرسم البياني للدالة $f(x)$ هو الرسم البياني II .

حساب التفاضل والتكامل المهمة 6



في الرسم معطى الرسمان البيانيان I و II للدالتين:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + 5, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

في المجال $x \geq 0$.

أ. أيّ الرسمين البيانيين I و II هو الرسم البيانيّ للدالة $f(x)$,

وأيّ رسم بيانيّ هو للدالة $g(x)$? علّل.

ب. A هي نقطة على الرسم البيانيّ I و B هي نقطة على الرسم البيانيّ II،

بحيث تكون القطعة AB موازية للمحور y (انظر الرسم).

جد الإحداثيّ x للنقطتين A و B، الذي بالنسبة له طول القطعة AB هو أصغر ما يمكن.

ج. بالنسبة لـ x الذي وجدته في البند "ب"، احسب طول القطعة AB.

اقتراح إجابة للمهمة 6

أ. الرسم البيانيّ I هو الرسم البيانيّ للدالة $g(x)$ ، الرسم البيانيّ لدالة خطية.

الرسم البيانيّ II هو الرسم البيانيّ للدالة $f(x)$ ، الرسم البيانيّ لدالة الجذر التربيعي.

ب. نرمز بـ x إلى الإحداثيّ x للنقطة A.

النقطة A تقع على الدالة $g(x)$ ،

$$A(x, \frac{1}{4}x + 5)$$

لذلك إحداثيات النقطة A هي:

القطعة AB توازي المحور y،

لذلك الإحداثيّ x للنقطة B هو كإحداثيّ x للنقطة A.

النقطة B تقع على الدالة $f(x)$ ،

$$B(x, \sqrt{x})$$

لذلك إحداثيات النقطة B هي:

طول القطعة AB هو الفرق

بين الإحداثيّ y للنقطة A

والإحداثيّ y للنقطة B.

$$y_{AB}(x) = (\frac{1}{4}x + 5) - (\sqrt{x})$$

طول القطعة AB هو دالة لـ x:

$$y'_{AB}(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

المشتقة هي:

إيجاد الإحداثيّ x للنقطة القصوى

بواسطة مساواة المشتقة لـ 0:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

⇓

$$\sqrt{x} = 2$$

$$(\sqrt{x})^2 = (2)^2$$

نربّع طرفي المعادلة:

$$x = 4$$

الإحداثيّ x للنقطة القصوى هو:

תכלמה إجابة المهمة 6.

فحص نوع النقطة القصوى

حسب إشارة دالة المشتقة:

x	$0 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$y'_{AB}(x)$	-	0	+
$y_{AB}(x)$	↘	نقطة نهاية صغرى	↗

ج. الإحداثي y للنقطة القصوى هو: $y_{AB}(4) = \left(\left(\frac{1}{4} \cdot 4 + 5 \right) - (\sqrt{4}) \right) = 4$

أقصر طول ممكن لـ AB هو 4.

حقوق الطبع محفوظة لدولة إسرائيل.
 النسخ أو النشر ممنوعان إلا بإذن من وزارة التربية والتعليم.