

הנגזרת

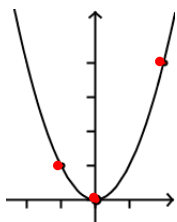
הצורך במושגים חדשים

מהירות רגעית - מהי?¹

הדיאלוג הבא לקוח מאחת ההרצאות המפורסמות של פיינמן בפיזיקה.

- גברת, עברת את המהירות המותרת, נסעת במהירות 90 קילומטר לשעה.
- אני מצטערת, זה לא ייתכן. איך יכולתי לנסוע במהירות 90 קילומטר לשעה, אם אני נוסעת רק 7 דקות!
- אני מתכוון שאם היית ממשיכה לנסוע באותה הצורה, בעוד שעה היית עוברת 90 קילומטר.
- אם הייתי נוסעת באותה הצורה עוד שעה, הייתי נכנסת בקיר בקצה הרחוב!
- הספידומטר שלך הראה 90 קילומטר לשעה.
- הספידומטר שלי מקולקל מזמן.

פונקציות מבעד למיקרוסקופ



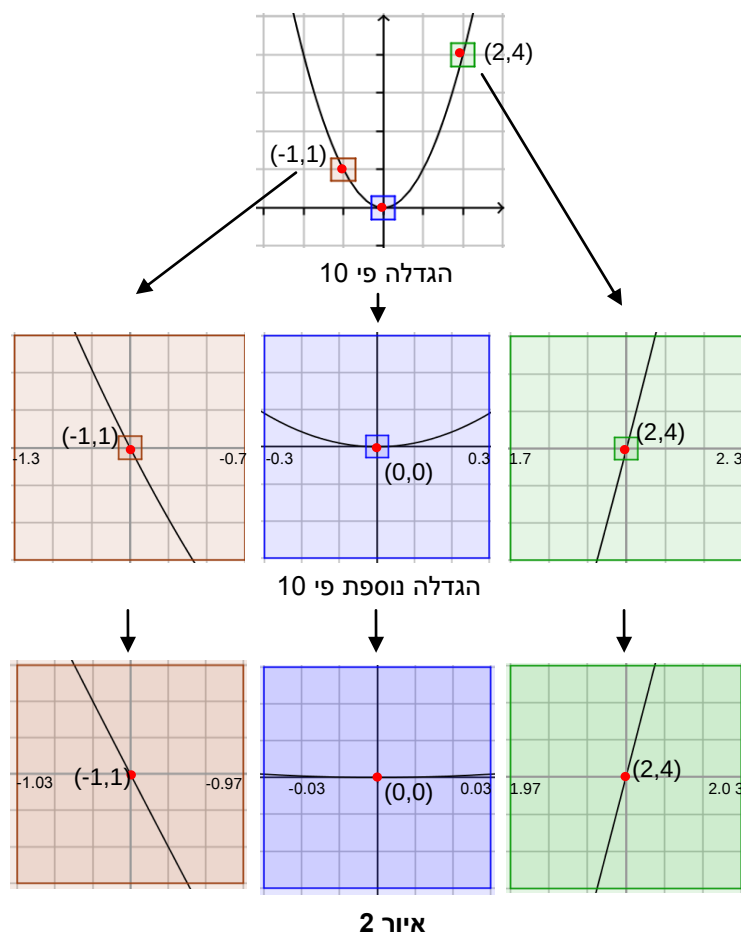
איור 1

לפניכם גרף הפונקציה $y = x^2$ (איור 1). על הגרף מסומנות שלוש נקודות $(0,0)$, $(2,4)$ ו- $(-1,1)$.

איך ייראה גרף הפונקציה אם נתבונן בו "מבעד למיקרוסקופ" בסביבת כל אחת מן הנקודות המסומנות?

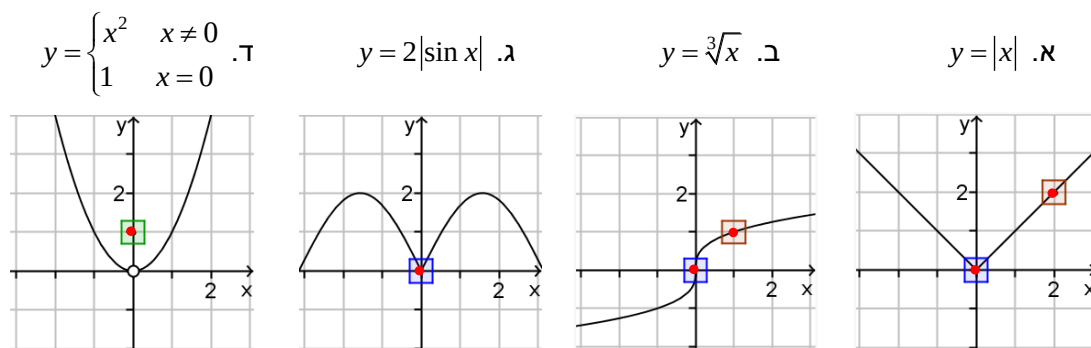
איור 2 מציג תמונות שהתקבלו "מבעד למיקרוסקופ", של גרף הפונקציה $y = x^2$, בשלוש הנקודות המסומנות על הגרף.

¹ ר' עמוד 193.

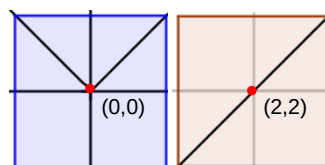


ניתן לראות כי מהגדלה להגדלה הגרף נהיה דומה יותר ויותר לקו ישר. כבר בהגדלה פי 10 קשה להבחין בעין כי חלק הגרף בסביבת הנקודה $(2, 4)$ אינו קטע ישר. לא קשה לדמיין כי גם בסביבת הנקודה $(0, 0)$ גרף הפונקציה יהיה דומה מאוד לקו ישר, אם נתבונן בו בהגדלה גדולה יותר. כך אכן קורה בהגדלה נוספת פי 10. האם תמיד, כאשר נתבונן בגרף של פונקציה בהגדלות הולכות וגדלות, גרף הפונקציה יידמה יותר ויותר לישר?

לפני המשך הקריאה נסו לדמיין כיצד ייראו הגרפים המוצגים באיור 3, בנקודות המסומנות, כאשר נתבונן בהם "מבעד למיקרוסקופ".

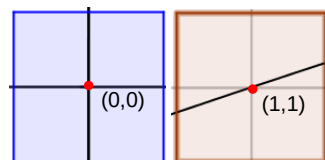


נתבונן בגרפים לאחר ההגדלה:



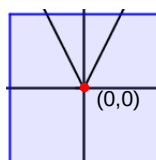
איור 4

הגרף $y = |x|$ נראה אחרי הגדלתו בסביבת הנקודה $(2,2)$ כקו ישר, ובסביבת הנקודה $(0,0)$ - כשני ישרים היוצרים זווית, (איור 4).



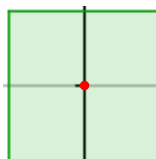
איור 5

הגרף $y = \sqrt[3]{x}$ נראה אחרי הגדלתו בסביבת הנקודה $(1,1)$ כקו ישר בעל שיפוע, ובסביבת הנקודה $(0,0)$ - כישר מאונך לציר ה- x , (איור 5).



איור 6

הגרף $y = 2|\sin x|$ נראה אחרי הגדלתו בסביבת $(0,0)$ כשני ישרים היוצרים זווית, (איור 6).



איור 7

הגרף $y = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ נראה אחרי הגדלתו בסביבת הנקודה $(0,1)$ כנקודה בודדת, (איור 7).

ההתבוננות בגרפים המוגדלים לעיל מעלה שאלות מסקרנות: מדוע הגדלת גרף בסביבת נקודות שונות מביאה לתוצאות שונות? מדוע לפעמים מתקבל ישר אחד ולפעמים שני ישרים היוצרים זווית? במה זה תלוי? האם ניתן לחזות ישרים אלה לפני הגדלת הגרף? מתי הגרף נראה כישר משופע? אופקי? מאונך?

התשובות לשאלות אלה קשורות למושגים מרכזיים של החשבון הדיפרנציאלי: נגזרת, משיק, קצב שינוי, קירוב לינארי, ומושגים קשורים נוספים.

ההסבר של מושגים רבים, הקשורים לתופעות מוכרות, כמו: המהירות שמראה הספידומטר, רוח שולי בתהליך ייצור, וקצב שריפת הקלוריות בפעילות ספורטיבית, קשור אף הוא למושגים אלה.

הנגזרת הראשונה בנקודה ומושגים נלווים

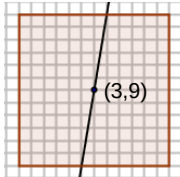
ראינו כי כאשר מתבוננים בפרבולה $y = x^2$ "מבעד למיקרוסקופ" בהגדלה פי 100, בסביבת נקודות שונות הגרף נראה כקו ישר. לא קשה גם לדמיין שבהגדלה גדולה מספיק, הגרף ייראה כקו ישר גם בסביבה של נקודות אחרות.

מיהו אותו ישר שגרף הפונקציה נראה דומה לו "מבעד למיקרוסקופ"? האם נוכל להעריך את שיפועו? האם קיימת דרך למצוא את משוואת הישר הזה?

נתבונן "מבעד למיקרוסקופ" בפרבולה $y = x^2$ בסביבת הנקודה $(3, 9)$, (איור 8). גרף הפונקציה נראה כקו ישר.

נוכל להעריך את שיפוע הישר כ- 6 באמצעות סריג המשבצות. הישר שעובר בנקודה $(3, 9)$ ושיפועו 6 הוא הישר $y = 6x + 9$.

נתבונן בישר המקורב בשתי גישות שונות – גישת המשיק וגישת הקירוב הלינארי.



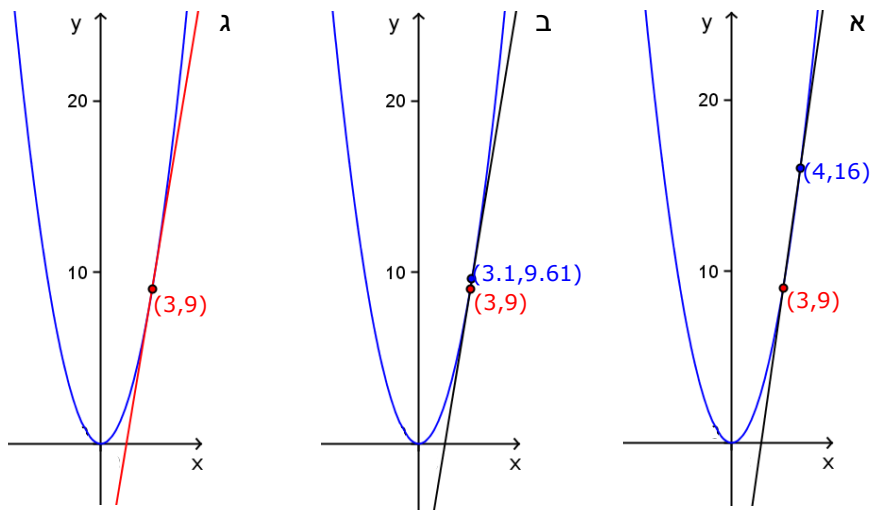
איור 8

משיק לגרף של פונקציה

כדי למצוא משוואת ישר, די לנו במידע על שיפוע הישר ושיעורי נקודה אחת על הישר. ידוע שהישר עובר דרך הנקודה $(3, 9)$, אולם כיצד נגדיר את שיפועו? למציאת שיפוע של ישר דרושות שתי נקודות שונות על הישר.

נעריך תחילה את שיפוע הישר על-ידי חישוב השיפוע הישר העובר דרך הנקודות $(3, 9)$ ו- $(4, 16)$ שעל הפרבולה (איור 9א).

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16 - 9}{4 - 3} = 7$$



איור 9

האם אפשר לקבל הערכה טובה יותר לשיפוע הישר? נוכל לחשב את שיפוע הישר העובר דרך הנקודות $(3, 9)$ ו- $(3.1, 9.61)$ (איור 9ב).

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9.61 - 9}{3.1 - 3} = 6.1$$

נוכל כמובן לבחור נקודות קרובות כרצוננו לנקודה $(3,9)$. לכן נחשב את השיפוע בין הנקודה $(3,9)$ לבין "נקודה שכנה כללית" $(3+h, (3+h)^2)$:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3+h)^2 - 9}{(3+h) - 3} = \frac{(9+6h+h^2) - 9}{(3+h) - 3} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h$$

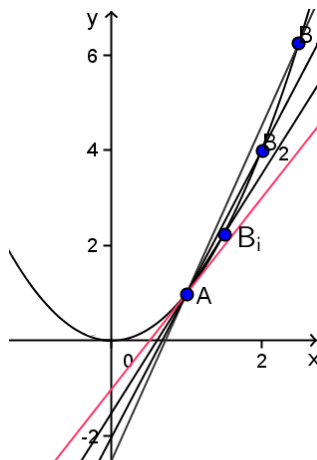
נשים לב שהביטוי שקיבלנו לשיפוע מתאים לשתי התוצאות המספריות שחישבנו. במקרה הראשון בחרנו $h = 0.5$ וקיבלנו $a = 6.5$. במקרה השני בחרנו $h = 0.1$ וקיבלנו $a = 6.1$.

כאשר הנקודה $(3+h, (3+h)^2)$ מתקרבת כרצוננו אל הנקודה $(3,9)$ מתקיים $h \rightarrow 0$ והביטוי $a = 6+h$ שואף ל-6.

הישר העובר דרך הנקודה $(3,9)$ ושיפועו שווה בדיוק ל-6 (איור 9) הוא המשיק לגרף הפונקציה $y = x^2$ בנקודה $(3,9)$. נביא עכשיו הגדרה מתמטית למושג המשיק שהצגנו בצורה אינטואיטיבית.

הגדרת מיתר

אם A ו- B הן שתי נקודות על גרף של פונקציה $y = f(x)$ ישר העובר דרך נקרא "מיתר AB " של הגרף.



איור 10

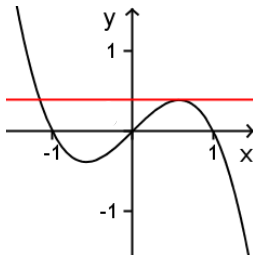
נתון גרף של פונקציה ונתונה עליו נקודה קבועה A בה רוצים להעביר משיק. נבחר נקודה B_1 השונה מ- A ונעביר את המיתר AB_1 . נבחר נקודה נוספת B_2 , הקרובה ל- A יותר מאשר B_1 , ונעביר את המיתר AB_2 . באופן דומה ניתן להעביר סדרת מיתרים AB_i . כאשר הנקודה הנעה B_i מתקרבת ל- A , המיתרים שואפים לישר המסומן באיור 10 בצבע אדום. אם הנקודות B_i יתקרבו לנקודה A לא מצד ימין אלא מצד שמאל המיתרים המתאימים ישאפו לאותו ישר אדום. הישר האדום הוא המשיק לגרף של הפונקציה בנקודה A .

הגדרת משיק

משיק לגרף של פונקציה בנקודה A הוא הישר אליו שואפים המיתרים AB_i כאשר הנקודות B_i שואפות (מתקרבות) לנקודה A , בתנאי שישר זה אינו תלוי בבחירת הנקודות B_i ובאופן התקרבותן לנקודה A - משמאל, מימין או משני הצדדים.

ניתן להוכיח, על סמך הגדרת המשיק כי בכל מקרה בו למשיק בנקודה A קיים שיפוע, שיפוע המשיק הוא גבול שיפועי המיתרים AB כאשר $B \rightarrow A$.

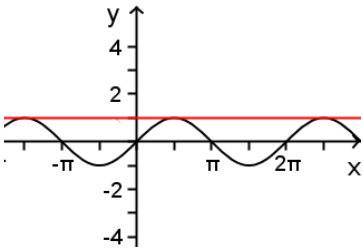
מה בין משיק לגרף של פונקציה לבין משיק למעגל?



איור 11

הגדרת המשיק לעיל כגבול מיתרים, תקפה לכל עקום במישור. במקרים אחדים, כגון, במקרה של מעגל, הגדרה זו והגדרת המשיק המקובלת בגאומטריה, כישר שיש לו נקודה משותפת אחת עם העקום, שקולות זו לזו. כך הוא הדבר גם במקרה של אליפסה. אבל יש עקומים רבים, בפרט גרפים של פונקציות, עבורם הגדרת משיק כישר בעל נקודה משותפת אחת עם העקום, אינה נכונה. למשל:

המשיק לגרף $y = x - x^3$ בנקודות מקסימום חותך את הגרף בנקודה נוספת (איור 11).

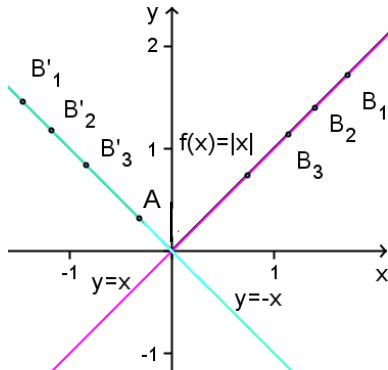


איור 12

לישר $y = 1$ ולגרף של פונקציה $y = \sin x$ (איור 12), יש אינסוף נקודות משותפות בהן הישר משיק לגרף $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

לאור הנ"ל נדגיש כי הגדרת משיק כגבול של מיתרים נכונה גם במקרה של משיק לגרף של פונקציה וגם במקרה של משיק לעקום כלשהו במישור.

משיקים חד-צדדיים וקיום המשיק



איור 13

נתבונן בגרף של פונקציית הערך המוחלט $y = |x|$ באיור 13. תהי $A = (0,0)$. אם הנקודות B_i נמצאות על הגרף מימין ל- A , אז המיתרים AB_i מתלכדים עם הישר $y = x$. אם הנקודות B_i נמצאות על הגרף משמאל ל- A (נקודות אלה מסומנות באיור 13 עם גרש), אז המיתרים AB_i מתלכדים עם הישר $y = -x$. מכאן, אם הנקודות B_i מתקרבות אל הנקודה $A = (0,0)$ בקפיצות סביב 0, אז המיתרים $y = x$ ו- $y = -x$ מתחלפים ואינם שואפים לאף ישר. לכן, לגרף $y = |x|$ לא קיים משיק בראשית הצירים. יחד עם זאת בהתקרבות הנקודות B_i לנקודה $(0,0)$ מימין בלבד, כל המיתרים AB_i מתלכדים עם הישר $y = x$, ולכן יש להם גבול $y = x$. בדומה, אם הנקודות B_i מתקרבות לנקודה $(0,0)$ משמאל בלבד, למיתרים AB_i יש גבול $y = -x$.

הגדרת משיקים חד-צדדיים

הישר אליו שואפים מיתרי AB_i , כאשר נקודות B_i שואפות לנקודה A מצד ימין, נקרא המשיק לגרף בנקודה A מצד ימין, והישר אליו שואפים מיתרי AB_i , כאשר נקודות B_i שואפות לנקודה A מצד שמאל, נקרא המשיק לגרף בנקודה A מצד שמאל.

שני המשיקים הנ"ל בנקודה A נקראים משיקים חד-צדדיים בנקודה A .

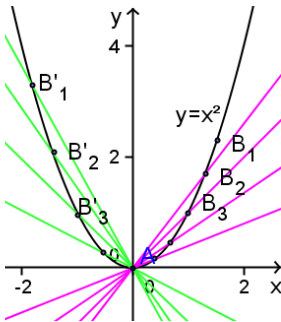
לפי הגדרה זו, לגרף $y = |x|$ בנקודה $A = (0,0)$ יש שני משיקים חד-צדדיים: משיק מצד ימין $y = x$, ומשיק מצד שמאל $y = -x$. המשיק לגרף $y = |x|$ בנקודה $A = (0,0)$ אינו קיים.

קריטריון לקיום משיק בנקודה

משפט

אם A היא נקודה פנימית של הגרף (כלומר, הגרף משתרע משני הצדדים של A), אזי המשיק לגרף בנקודה A קיים אם ורק אם בנקודה זו קיימים משיקים חד-צדדיים ושניהם זהים (מתלכדים).

טענת המשפט נובעת מהגדרת משיק לגרף בנקודה, והגדרת משיקים חד-צדדיים בנקודה.

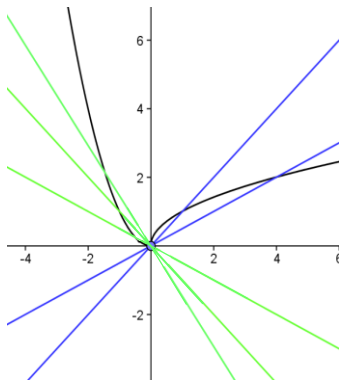


איור 14

באיור 14 מוצג גרף של פונקציה $y = x^2$ עם סדרת המיתרים AB_i , כאשר הנקודות B_i מתקרבות לנקודה קבועה $A = (0,0)$. ניתן לראות בהתקרבותן ל- A הן מצד שמאל והן מצד ימין, המיתרים שואפים לציר ה- x . כלומר, המשיקים החד-צדדיים בנקודה $A = (0,0)$ מתלכדים זה עם זה ולכן לגרף $y = x^2$ בנקודה $A = (0,0)$ קיים משיק שהוא ציר ה- x .

אם בנקודה A לגרף יש שני משיקים חד-צדדיים שונים, אז נוצרת זווית בין שני ענפי הגרף: הענף מימין ל- A והענף משמל ל- A . הנקודה A במצב זה נקראת נקודת "חוד".

בנקודה כזו לגרף אין משיק. למשל, בגרף המוצג באיור 15 המשיק בנקודה $(0,0)$ מצד ימין הוא ציר ה- y , והמשיק מצד שמאל באותה נקודה הוא ציר ה- x . בנקודה זו לגרף יש "חוד" והגרף מתחלק לשני ענפים, מימין לראשית הצירים ומשמאל לה, הזווית ביניהם בנקודה $(0,0)$ היא 90° . בנקודה זו המשיק לגרף אינו קיים.



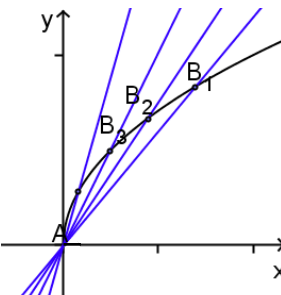
איור 15

הערה על משיק בנקודת קצה

בנקודת קצה שמאל / ימין של הגרף, המשיק מוגדר כמשיק חד-צדדי מצד ימין/שמאל.

דוגמה

המשיק לגרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$ בנקודה $A(0,0)$ (איור 16), מוגדר כמשיק מצד ימין. המשיק הזה קיים והוא ציר ה- y , כלומר, הישר $x = 0$.



איור 16

הגדרת הנגזרת של פונקציה בנקודה כשיפוע של משיק

סעיף זה עוסק בהגדרה גאומטרית (ויזואלית, מוחשית) של הנגזרת בנקודה.

הגדרה

הנגזרת של פונקציה $y = f(x)$ בנקודה $x = x_0$ בתחום הפונקציה, היא שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(x_0, f(x_0))$.
סימונים: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $f'(x)|_{x=x_0}$.

הגזירות של פונקציה בנקודה

פונקציה $f(x)$ נקראת גזירה ב- $x = x_0$ אם בנקודה זו קיימת הנגזרת $f'(x_0)$.

בהתאם, אם הנגזרת $f'(x_0)$ אינה קיימת, הפונקציה $f(x)$ **לא גזירה בנקודה** $x = x_0$. מצב אי-גזירות חל כאשר לא קיים משיק לגרף של פונקציה בנקודה $(x_0, f(x_0))$, או כאשר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו מאונך לציר ה- x .

דוגמאות למציאת הנגזרת כשיפוע של משיק

1. המשיק לגרף הפונקציה $y = x^2$ בנקודה $A(0,0)$ הוא ציר ה- x . השיפוע של ציר ה- x הוא 0. לכן, על-פי ההגדרה לעיל, הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^2$ כאשר $x = 0$ היא $f'(0) = 0$. הפונקציה $f(x) = x^2$ גזירה בנקודה $x = 0$.

2. לגרף $y = |x|$ בנקודה $A(0,0)$ המשיק אינו קיים. לכן, על-פי ההגדרה, לפונקציה $f(x) = |x|$ בנקודה $x = 0$ אין נגזרת, או, במילים אחרות, היא לא גזירה בנקודה זו.

3. המשיק לגרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$ בנקודה $A(0,0)$ הוא ציר ה- y (איור 16). ישר זה מאונך לציר ה- x ולכן אין לו שיפוע. מכאן שהפונקציה אינה גזירה כאשר $x = 0$.

קירוב ליניארי לפונקציה בנקודה

ראינו שכאשר מסתכלים בגרף של פונקציה נתונה "מבעד למיקרוסקופ", בסביבת נקודה שבה הפונקציה גזירה, גרף הפונקציה נראה דומה לקו ישר. בסעיף הקודם ראינו שישיר זה הוא המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה התמקדנו. האם ניתן למצוא את הפונקציה הליניארית שהמשיק מייצג, ישירות מתבנית הפונקציה הנתונה, ללא שימוש בגרף שלה? בשאלה זו נעסוק בסעיף זה.
נפנה למספר דוגמאות.

דוגמה 1

תהי $f(x) = x^2$, ותהי x_0 נקודה כלשהי מסוימת בציר המספרים, כאשר x נקודה כלשהי שרירותית באותו ציר. כדי לקשור בין x לבין x_0 נבטא את x כ- $x_0 + h$, כאשר h מבטא את המרחק בין x לבין x_0 . ($x - x_0 = h$). מרחק שלילי פירושו שהנקודה x נמצאת משמאל ל- x_0 .

נציג את $f(x)$ בצורה הבאה:

$$f(x) = x^2 = (x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2 = f(x_0) + 2x_0h + h^2$$

בביטוי הסופי סכום שני המחוברים הראשונים, מהווה פונקציה ליניארית של המשתנה $h = x - x_0$:

$$g(h) = f(x_0) + 2x_0h$$

ואילו המחובר השלישי מציג פונקציה ריבועית: $r(h) = h^2$.

נניח כעת שהנקודה x הולכת ומתקרבת לנקודה x_0 , כך שהגודל של $x - x_0 = h$ שואף ל-0. אז הגודל של

$$r = h^2 \text{ נעשה זניח בהשוואה עם } h, \text{ במובן ש- } \frac{r}{h} \rightarrow 0 \text{ כאשר } h \rightarrow 0.$$

נתבונן שוב ב- $g(h) = f(x_0) + 2x_0h$. נוכל להחליף את המשתנה h ב- $x - x_0$ (כך מוגדר h) ולקבל:

$$f(x_0) + 2x_0h = f(x_0) + 2x_0(x - x_0)$$

נציין כי מחוק ההתאמה של הפונקציה $g(h)$ לעיל, נובע שהגרף שלה במערכת צירים (x, y) הוא הישר $y = f(x_0) + 2x_0(x - x_0)$. ישר זה עובר דרך הנקודה $(x_0, f(x_0))$ ושיפועו $2x_0$, זהו שיפוע המשיק לפרבולה בנקודה זו.

במילים אחרות: הגרף של $g(x)$ הוא המשיק לפרבולה בנקודה $(x_0, f(x_0))$.

דוגמה 2

תהי $f(x) = x^3$, ותהי x_0 נקודה כלשהי מסוימת בציר המספרים, כאשר x נקודה כלשהי שרירותית באותו ציר. נסמן $x - x_0 = h$, ונציג את $f(x)$ בצורה הבאה:

$$f(x) = x^3 = (x_0 + h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3$$

בביטוי הסופי סכום שני המחוברים הראשונים מהווה פונקציה ליניארית של המשתנה h :

$$g(h) = f(x_0) + 3x_0^2h$$

ואילו סכום שני המחוברים הנוספים מהווים פונקציה ממעלה שלישית של המשתנה h :

$$r(h) = 3x_0h^2 + h^3$$

נניח כעת שהנקודה x הולכת ומתקרבת לנקודה x_0 , כך שהגודל של $x - x_0 = h$ שואף ל-0. אז הגודל של

$$r(h) = 3x_0h^2 + h^3 \text{ נעשה זניח בהשוואה עם } h, \text{ במובן ש- } \frac{r}{h} \rightarrow 0 \text{ כאשר } h \rightarrow 0.$$

הפונקציה $g(x)$ לעיל, נובע כי הגרף של $g(h)$ במערכת צירים (x, y) הוא הישר $y = f(x_0) + 3x_0^2(x - x_0)$,

העובר דרך הנקודה $(x_0, f(x_0))$ ובעל שיפוע $3x_0^2$. קל לוודא כי שיפוע זה הוא שיפוע המשיק לגרף $y = x^3$ בנקודה $(x_0, f(x_0))$. אכן שיפוע המיתר לגרף זה העובר דרך הנקודות $A(x_0, f(x_0))$ ו- $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$ הוא:

$$k = \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2$$

מכאן נובע שכאשר $h \rightarrow 0$ השיפוע של המיתר AB שואף ל- $3x_0^2$, כלומר, $3x_0^2$ הוא שיפוע המשיק לגרף $y = x^3$ בנקודה $(x_0, f(x_0))$. לכן הגרף של $g(x)$ הוא המשיק לגרף $y = x^3$ בנקודה $(x_0, f(x_0))$.

נכליל את הדוגמאות לעיל בהגדרת המושג "קירוב ליניארי".

קירוב ליניארי לפונקציה בנקודה - הגדרה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x = x_0$. הפונקציה הליניארית:

$$g(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

כאשר m מספר קבוע ממשי, נקראת הקירוב הליניארי של $f(x)$ בנקודה x_0 , או בנקודה $(x_0, f(x_0))$,

אם ההפרש $r = f(x) - g(x)$ זניח בהשוואה עם $h = x - x_0$, כלומר, $\frac{r}{h} \rightarrow 0$ כאשר $h \rightarrow 0$.

המשפט הבא חושף קשר הדוק בין קירוב ליניארי לבין משיק לגרף של פונקציה.

משפט

א. אם לגרף של פונקציה $f(x)$ בנקודה $(x_0, f(x_0))$ יש משיק בעל שיפוע, אזי הפונקציה הליניארית

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (*)$$

היא הקירוב הליניארי של $f(x)$ בנקודה $(x_0, f(x_0))$.

ב. אם לפונקציה $f(x)$ בנקודה $(x_0, f(x_0))$ יש קירוב ליניארי

$$g(x) = f(x_0) + m(x - x_0) \quad (**)$$

אז הישר $y = g(x)$ הוא המשיק לגרף $y = f(x)$ בנקודה $(x_0, f(x_0))$.

הוכחה

א. נגדיר:

$$r(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow \frac{r(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

השבר בצד ימין הוא שיפוע המיתר לגרף $y = f(x)$ העובר דרך הנקודות $A(x_0, f(x_0))$ ו- $B(x, f(x))$. מהגדרת הנגזרת כשיפוע של משיק נובע כי $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \rightarrow 0$ כאשר $h = x - x_0 \rightarrow 0$, כלומר,

$\frac{r}{h} \rightarrow 0$ כאשר $h \rightarrow 0$. מכאן, הפונקציה $g(x)$ המוצגת ב- (*) היא הקירוב הליניארי של $f(x)$ בנקודה $x = x_0$.

ב. נניח כי פונקציה $g(x)$ המוצגת בתבנית (**) היא הקירוב הליניארי של $f(x)$ בנקודה $x = x_0$. אז לפי ההגדרה, לכל x בסביבת $x = x_0$ מתקיים:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + m(x - x_0) + r(x) \\ &\Downarrow \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= m + \frac{r(x)}{x - x_0} \quad (x \neq x_0) \end{aligned} \quad (1)$$

כאשר:

$$h = x - x_0 \rightarrow 0 \text{ אם } \frac{r(x)}{x - x_0} \rightarrow 0 \quad (2)$$

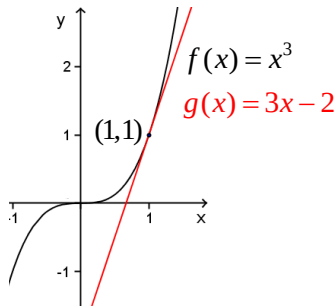
מ- (1) ו- (2) לעיל נובע כי שיפוע המיתר לגרף $y = f(x)$ העובר דרך הנקודות $A(x_0, f(x_0))$ ו- $B(x, f(x))$ שואף למספר קבוע m , כאשר נקודה B מתקרבת לנקודה A . זה אומר כי בנקודה A לגרף $y = f(x)$ קיים משיק בעל שיפוע m , כלומר, $m = f'(x_0)$.

המשפט הוכח והוא מאפשר להביא הגדרה שנייה של נגזרת הפונקציה בנקודה.

הגדרה

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = x_0$, היא שיפוע m של הפונקציה הליניארית $g(x) = mx + n$, המהווה קירוב ליניארי של $f(x)$ בנקודה $x = x_0$. הגדרה זו של נגזרת בנקודה, על-פי המשפט שלעיל, שקולה להגדרה הראשונה של מושג זה כשיפוע של משיק.

דוגמה למציאת הקירוב הליניארי



איור 17

מצאו קירוב ליניארי לפונקציה $f(x) = x^3$ כאשר $x = 1$.

פתרון

מהתוצאות הקודמות נובע כי $f'(x_0) = 3x_0^2$, ולכן $f'(1) = 3$.

הקירוב הליניארי המבוקש הוא:

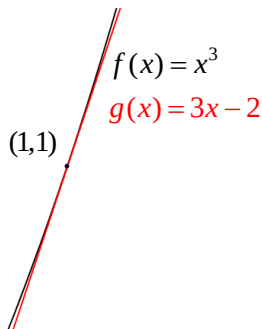
$$g(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + 3(x-1) = 3x - 2$$

באיור 17 מוצגים הגרף של הפונקציה $f(x) = x^3$, והגרף של

הפונקציה $g(x)$ המהווה קירוב ליניארי של $f(x)$ בנקודה $x = 1$. הגרף של

הקירוב הליניארי משיק לגרף של $f(x)$ בנקודה $M_0(1,1)$.

כשמגדילים גרפים בסביבת נקודות גזירות, הם נעשים דומים מאוד לגרפים של הקירובים הליניאריים שלהם, עד כי בהגדלה מספיק גדולה, בסביבה קטנה מספיק של נקודה, לא ניתן להבחין בעין בין הגרף לבין הקירוב הליניארי שלו בנקודה זו. איור 18 מציג את גרף הפונקציה $f(x) = x^3$ בהגדלה בסביבת הנקודה $(1,1)$.



איור 18

האם תמיד קיים קירוב ליניארי לפונקציה?

אם $f(x)$ אינה גזירה בנקודה $x = x_0$, כלומר, הנגזרת של $f(x)$ בנקודה

$x = x_0$ אינה קיימת, אז גם הקירוב הליניארי ל- $f(x)$ בנקודה $x = x_0$ אינו

קיים. בפרט לפונקציה $f(x) = |x|$ בנקודה $x = 0$ אין קירוב ליניארי.

לכן בהגדלה חוזרת של הגרף $y = |x|$ בסביבת ראשית הצירים הוא לא נראה כקו ישר אלא כזווית (ר' איור 4).

הגדרת נגזרת בנקודה כגבול של מנת הפרשים

כפי שצוין קודם, ניתן לחשב את שיפוע המשיק כגבול של שיפועי המיתרים.

נרשום ביטוי אלגברי לשיפוע המיתר בין הנקודה $(x_0, f(x_0))$ לבין "נקודה שכנה כללית" $(x_0 + h, f(x_0 + h))$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

שיפוע המשיק בנקודה $(x_0, f(x_0))$ הוא הגבול של שיפוע המיתר הנ"ל כאשר $h \rightarrow 0$. לכן נוכל לרשום:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

קיבלנו את הגדרת הנגזרת של פונקציה בנקודה, כגבול של מנת הפרשים Δy ו- Δx .

להגדרה זו קוראים "ההגדרה הקלאסית" או "ההגדרה האנליטית", ולפעמים "ההגדרה האלגברית", וזאת בניגוד להגדרת הנגזרת של פונקציה בנקודה כשיפוע של משיק לגרף שלה בנקודה זו, הנקראת "ההגדרה הגאומטרית".

להלן נציג את ההגדרה הקלאסית של נגזרת של פונקציה בנקודה במלוא הדיוק. נציין שסגולתה של הגדרה זו היא בכך שהיא אינה קשורה לתמונה גרפית של פונקציה, אלא מתבססת רק על הפונקציה עצמה, תוך שימוש בכלי היסוד של האנליזה - הגבול.

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה x_0 . אם קיים הגבול הסופי

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

אז המספר L נקרא הנגזרת $f'(x_0)$ של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 .

הערה 1

בהגדרה לעיל Δx מסמן שינוי של x_0 הנקרא תוספת (חיובית או שלילית) ל- x_0 . קיימות צורות שונות לרישום הגדרת הנגזרת בנקודה באמצעות גבול, למשל כך:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

או:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

או:

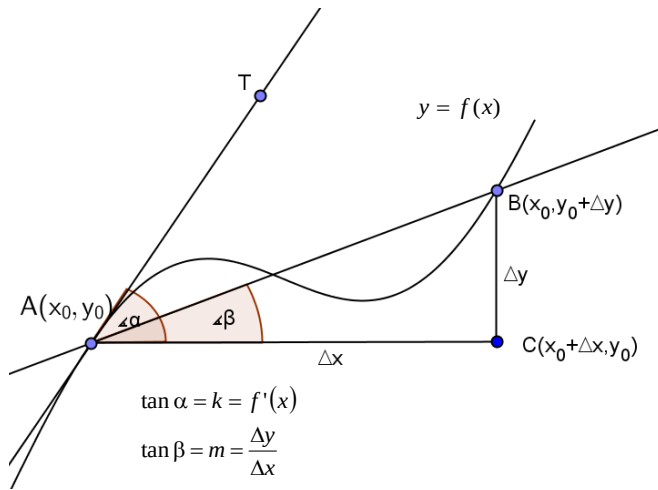
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

הערה 2

אם הנקודה x_0 נמצאת בקצה השמאלי/הימני של תחום הפונקציה, אז הגבול בהגדרת הנגזרת בנקודה x_0 מחושב כגבול חד-צדדי, מצד ימין/שמאל, בנקודה זו.

שקילות הגדרות הנגזרת בנקודה

שקילות של שתי הגדרות הנגזרת בנקודה: באמצעות משיק ובאמצעות גבול



איור 19

$$k = \lim_{B \rightarrow A} m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

מכאן נובעת השקילות של שתי ההגדרות של נגזרת בנקודה, הגאומטרית והאנליטית.

שקילות של שלוש הגדרות הנגזרת בנקודה: באמצעות משיק, באמצעות קירוב ליניארי ובאמצעות גבול

הוכחנו כעת שהגדרת הנגזרת בנקודה באמצעות גבול שקולה להגדרתה באמצעות משיק. קודם הוכחנו כי ההגדרה באמצעות משיק שקולה להגדרת הנגזרת בנקודה באמצעות קירוב ליניארי. מכאן נובע כי כל שלוש ההגדרות הנ"ל של מושג הנגזרת של פונקציה בנקודה שקולות זו לזו.

בטבלה 1 להלן מוצג פירוש תכונות גזירות ואי-גזירות של פונקציה, על-פי שתי הגדרות שקולות של נגזרת. נזכיר, כי פונקציה עברה קיימת נגזרת בנקודה נקראת **גזירה בנקודה** זו.

תכונה	פירוש על-פי הגדרת הנגזרת באמצעות גבול	פירוש על-פי הגדרת הנגזרת באמצעות משיק
פונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x = x_0$, כלומר, $f'(x_0)$ קיימת.	הגבול $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ קיים ויש לו ערך סופי.	בנקודה $(x_0, f(x_0))$ לגרף של פונקציה $f(x)$ יש משיק בעל שיפוע, כלומר, הוא אינו מקביל לציר ה- y .
פונקציה $f(x)$ לא גזירה בנקודה $x = x_0$, כלומר, הנגזרת $f'(x_0)$ אינה קיימת.	הגבול $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ אינו קיים או קיים, אבל יש לו ערך אינסופי ($-\infty$ או ∞).	בנקודה $(x_0, f(x_0))$ לגרף של פונקציה $f(x)$ אין משיק, או המשיק קיים אבל הוא מקביל לציר ה- y .

טבלה 1

דוגמאות למציאת הנגזרת בנקודה באמצעות גבול

דוגמה 1

תהי $f(x) = x^2$ ו- $x_0 = 0$. אזי:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

הנגזרת לפונקציה $f(x) = x^2$ בנקודה $x = 0$ קיימת. הפונקציה גזירה בנקודה זו.

דוגמה 2

תהי $f(x) = \sqrt{x}$ ו- $x_0 = 0$. אזי:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$$

מכאן, הנגזרת $f'(0)$ אינה קיימת. לכן $f(x) = \sqrt{x}$ אינה גזירה בנקודה $x = 0$.

נגזרות חד-צדדיות בנקודה והקשר ביניהן לבין הנגזרת בנקודה

להלן הגדרות של נגזרות חד-צדדיות בנקודה.

א. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בחצי-סביבה ימנית של הנקודה x_0 , כולל x_0 , כלומר: בקטע $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ כאשר $\varepsilon > 0$. אם קיים הגבול הסופי:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

אז הוא נקרא **הנגזרת** של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 **מצד ימין**, ומסומן על-ידי $f'_+(x_0)$.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בחצי-סביבה שמאלית של הנקודה x_0 , כולל x_0 , כלומר, בקטע $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ כאשר $\varepsilon > 0$. אם קיים הגבול הסופי:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

אז הוא נקרא **הנגזרת** של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 **מצד שמאל**, ומסומן על-ידי $f'_-(x_0)$.

ג. הנגזרות $f'_+(x_0)$ ו- $f'_-(x_0)$ נקראות **נגזרות חד-צדדיות** של פונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 .

הקשר בין נגזרת של פונקציה בנקודה והנגזרות החד-צדדיות שלה בנקודה זו

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של הנקודה x_0 , כלומר, בקטע $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, כאשר $\varepsilon > 0$. אזי $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 , כלומר, הנגזרת $f'(x_0)$ קיימת, אם ורק אם בנקודה x_0 קיימות הנגזרות החד-צדדיות של $f(x)$, והן שוות זו לזו. במקרה זה מתקיים:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

המשפט נובע מהגדרת הנגזרת באמצעות הגבול, ומהקריטריון לקיום גבול הפונקציה בנקודה: הגבול קיים אם ורק אם קיימים גבולות חד-צדדיים של פונקציה זו באותה נקודה, והם שווים זה לזה.

דוגמה ליישום המשפט

האם פונקציית הערך המוחלט $f(x) = |x|$ גזירה בנקודה $(0,0)$?

פתרון

על-פי הגדרת נגזרות חד-צדדיות מחשבים:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

היות ו- $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, הנגזרת $f'(0)$ אינה קיימת, כלומר, הפונקציה $f(x) = |x|$ אינה גזירה בנקודה $x = 0$.

המשמעות הגאומטרית של נגזרות חד-צדדיות

מהגדרת נגזרות חד-צדדיות של פונקציה בנקודה, נובע שהן מהוות את שיפועי המשיקים החד-צדדיים לגרף של הפונקציה בנקודה: הנגזרת מצד ימין היא שיפוע של המשיק מצד ימין, והנגזרת מצד שמאל היא שיפוע של המשיק מצד שמאל. לאור זה, ניתן לפתור את הדוגמה לעיל בדרך אחרת: כפי שראינו קודם, לגרף $y = |x|$ בנקודה $(0,0)$ יש משיקים חד-צדדיים שונים. מכאן, לפונקציה $f(x) = |x|$ בנקודה $x = 0$ יש שתי נגזרות חד-צדדיות שונות, לכן הנגזרת בנקודה $x = 0$ אינה קיימת, כלומר, הפונקציה אינה גזירה בנקודה זו.

הקשר בין גזירות לבין רציפות של פונקציה בנקודה

כפי שכבר הוגדר קודם, פונקציה $f(x)$ נקראת **גזירה בנקודה** $x = x_0$, אם בנקודה זו קיימת הנגזרת $f'(x_0)$. המשפט הבא קובע קשר בין גזירות של פונקציה בנקודה לבין רציפותה בנקודה זו.

משפט

אם הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 אזי היא רציפה בנקודה זו.

הוכחת המשפט

תהי פונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 . אזי בנקודה זו קיים גבול סופי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

מכאן, על סמך תכונות גבולות, מקבלים:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 \end{aligned}$$

היות ו- $f'(x_0) \neq \pm\infty$, מתקיים: $f'(x_0) \cdot 0 = 0$ ולכן:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

או:

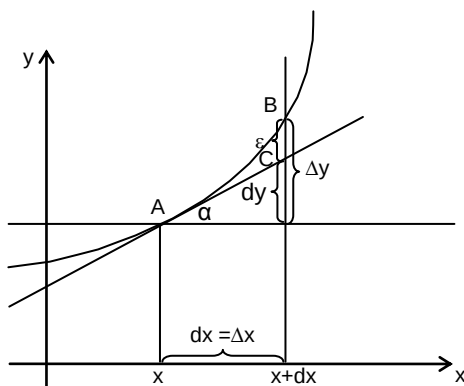
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

מכאן, על-פי הגדרת רציפות פונקציה בנקודה, הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה x_0 . בכך הוכחה טענת המשפט.

הערה

טענה הפוכה לטענת המשפט שלעיל אינה נכונה: רציפות פונקציה בנקודה אינה בהכרח גוררת את גזירותה בנקודה זו. למשל, הפונקציה $f(x) = |x|$ רציפה בנקודה $x = 0$, אבל היא לא גזירה בנקודה זו, כפי שראינו קודם.

דיפרנציאל של פונקציה בנקודה: הגדרתו ומשמעותו הגאומטרית



איור 20

נתבונן באיור 20, בו מוצגת הפונקציה $y = f(x)$. בנקודה כלשהי $A(x, y)$ על הגרף של פונקציה זו, נעביר משיק. נוסיף ל- x תוספת Δx שניתן לסמן אותה גם dx , כלומר, $dx = \Delta x$. לנקודה $x + dx$ מתאימה נקודה C על המשיק ונקודה B על גרף הפונקציה.

במעבר מ- x ל- $x + dx$, התוספת ב- y על גרף הפונקציה היא:

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

התוספת ל- y על המשיק המסומנת ב- dy היא:

$$dy = \tan \alpha \cdot dx = f'(x) \cdot dx$$

ל- dy קוראים הדיפרנציאל של $f(x)$ בנקודה x_0 .

הגדרה

תהי $y = f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה x , ותהי $\Delta x = dx$ תוספת כלשהי ל- x הנקראת גם הדיפרנציאל של x . הביטוי $dy = f'(x)dx$ נקרא הדיפרנציאל של פונקציה $f(x)$ בנקודה x , והוא מתפרש כשינוי (תוספת) ב- y על המשיק לגרף של הפונקציה, במעבר מנקודה x לנקודה $x + dx$.

במה תלוי הדיפרנציאל dy של פונקציה $y = f(x)$?

הדיפרנציאל dx של המשתנה x אינו תלוי בנקודה x , אבל הדיפרנציאל dy של פונקציה $y = f(x)$ כן תלוי ב- x : אם נעביר משיק בנקודה x אחרת, שיפועו $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ משתנה, ולכן dy משתנה (אף אם dx נשאר ללא שינוי). כמו כן, הדיפרנציאל dy תלוי ב- dx : אם בנקודה קבועה x נשנה את dx , הערך של dy ישתנה. כלומר, הדיפרנציאל dy של פונקציה $y = f(x)$ תלוי בשני משתנים: x ו- dx .

הקשר בין התוספת Δy והדיפרנציאל dy של פונקציה $y = f(x)$

נתבונן שוב באיור 19. לפי ההגדרה, התוספת ל- x והדיפרנציאל של x שווים זו לזה, כלומר, $\Delta x = dx$. אבל, כפי שרואים באיור, התוספת לפונקציה Δy והדיפרנציאל של פונקציה dy אינם שווים זו לזה, כלומר, $\Delta y \neq dy$. ניתן לרשום: $\Delta y = dy + \varepsilon$ כאשר $\varepsilon = (\Delta y - dy)$ הוא הפרש בין תוספת Δy ודיפרנציאל dy (איור 20). על-פי הגדרת ε קל לוודא כי $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta x} = 0$. מכאן, במקרה ו- $f'(x) \neq 0$ נובע כי $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{dy} = 0$, כלומר, הגודל של ε זניח בהשוואה עם dy כאשר $\Delta x = dx \rightarrow 0$. לכן לדיפרנציאל dy קוראים החלק העיקרי של Δy ומניחים ש-

$$\Delta y \approx dy \quad \text{כאשר } \Delta x = dx \rightarrow 0 \quad (*)$$

לשני האגפים של השוויון המקורב (*), בתנאי של- $f'(x) \neq 0$ יש סדר גודל של Δx , כאשר הטעות של השוויון זניחה ביחס ל- Δx .

השוויון (*) מהווה בסיס לשימוש בדיפרנציאל לחישוב מקורב של ערכי פונקציה לפי הנוסחה:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$$

כאשר $dy = f'(x)dx$, וטעות החישוב זניחה ביחס ל- Δx כאשר $\Delta x \rightarrow 0$.

הקשר בין דיפרנציאל של פונקציה והקירוב הליניארי שלה

הביטוי $f'(x_0)(x - x_0)$ הוא דיפרנציאל של $f(x)$ בנקודה $x = x_0$, כאשר $dx = \Delta x = x - x_0$. לכן את הקירוב הליניארי ל- $f(x)$ בנקודה $x = x_0$, אשר הוא $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, ניתן לרשום בצורה: $g(x) = f(x_0) + dy$ כאשר dy הוא דיפרנציאל של $y = f(x)$ בנקודה $x = x_0$.

הפונקציה הנגזרת וחוקי הגזירה

עד עתה הגדרנו את המושג "הנגזרת של פונקציה בנקודה". כעת נגדיר את המושג "הפונקציה הנגזרת של פונקציה".

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום D שהוא קטע או קרן או איחוד של מספר קטעים או/ו קרניים נפרדים. תהי D' תת-קבוצה של כל הנקודות ב- D בהן $f(x)$ גזירה, כלומר, קיימת נגזרת $f'(x)$.

הגדרת הפונקציה הנגזרת

פונקציה המתאימה לכל נקודת גזירות של פונקציה $f(x)$ את ערך הנגזרת שלה, נקראת **הפונקציה הנגזרת של $f(x)$** , ומסומנת $f'(x)$, כלומר:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x \in D'$$

כאשר D' היא קבוצת כל נקודות הגזירות של $f(x)$.

דוגמאות לחישוב הפונקציה הנגזרת לפי הגדרתה

חשבו לפי ההגדרה את הפונקציות הנגזרות של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^2$ ב. $f(x) = x^3$ ג. $f(x) = |x|$.

פתרון

א. על-פי ההגדרה לעיל לכל x ממשי מחשבים:

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \\ f'(x) &= (x^2)' = 2x \text{ היא } D = \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \text{ בתחום } f(x) = x^2 \end{aligned}$$

בתחום $D' = D$.

ב. על-פי ההגדרה לעיל לכל x ממשי מחשבים:

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 &\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \\ f'(x) &= (x^3)' = 3x^2 \text{ היא } D = \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \text{ בתחום } f(x) = x^3 \end{aligned}$$

בתחום $D' = D$.

ג. תהי $f(x) = |x|$. פונקציה זו מוגדרת בתחום $D = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. הגרף של הפונקציה מוצג באיור 13. כאשר הנקודה על פני הגרף נמצאת מימין לראשית הצירים, המשיק לגרף בנקודה זו מתלכד עם הישר $y = x$.

ששיפועו הוא 1. לכן: $f'(x) = (|x|)' = 1$ לכל $x > 0$. כאשר הנקודה על פני הגרף נמצאת משמאל לראשית הצירים, המשיק לגרף בנקודה זו מתלכד עם הישר $y = -x$ ששיפועו הוא (-1) . לכן $f'(x) = (|x|)' = -1$ לכל $x < 0$.
 בנקודה $x = 0$ לפונקציה $f(x) = |x|$ אין נגזרת, כפי שראינו קודם. לכן, הפונקציה הנגזרת של $f(x) = |x|$ היא:

$$f'(x) = (|x|)' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

התחום של פונקציה זו הוא: $D' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

הפונקציה הנגזרת של פונקציית החזקה עם מעריך טבעי

בסעיף הקודם הוכח כי: $(x^2)' = 2x$ ו- $(x^3)' = 3x^2$.

המסקנות שקיבלנו ניתנות להכללה. נראה עתה כי $(x^n)' = nx^{n-1}$ לכל n טבעי גדול מ-1. כדי להוכיח זאת, נשתמש בנוסחה:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

אשר תקפה לכל שני מספרים ממשיים a, b ולכל מספר טבעי n (ניתן לבדוק את השוויון על-ידי פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים בצידו הימני). על-פי נוסחה זו מוצאים:

$$\begin{aligned} f(x) = x^n &\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((x+h) - x)((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1})}{(x+h) - x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} ((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}) \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

בכך, הוכח כי:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ לכל } n \text{ טבעי גדול מ-1.}$$

הערה: במקרה $n=1$, מהגדרת הנגזרת נובע כי $(x)' = 1$ לכל x ממשי ללא יוצא מן הכלל. מצד שני פונקציית החזקה x^0 שווה ל-1 לכל $x \neq 0$, ואינה מוגדרת בנקודה $x=0$. לכן הכלל $(x^n)' = nx^{n-1}$ במקרה ש- $n=1$ תקף בכל הנקודות בהן $x \neq 0$ ורק בהן.

מהנוסחה הכללית לעיל מקבלים, למשל, עבור $n=5$ וכל x ממשי: $(x^5)' = 5x^4$.

חוקי גזירה ראשונים

לפעולת מציאת הפונקציה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ קוראים "הגזירה של $f(x)$ ". הביטויים: "לבצע גזירת פונקציה", "למצוא נגזרת של פונקציה", ו"לגזור פונקציה" הם תיאורים שונים של אותה פעולה של מציאת הפונקציה הנגזרת. נכיר חוקים עליהם מתבססת פעולה זו.

נגזרת של פונקציה קבועה

משפט

אם $f(x) = C$ לכל x , כאשר C מספר קבוע, אז $f'(x) = (C)' = 0$ לכל x .

הוכחה

על-פי הגדרת הפונקציה הנגזרת מקבלים:

$$f'(x) = (C)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

לכל x ממשי, ובכך טענת המשפט הוכחה.

הוצאת גורם קבוע בגזירה

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה x , ויהי c מספר קבוע. אזי $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

המשפט נובע מהגדרת הפונקציה הנגזרת ותכונת הגבולות, לפיה ניתן להוציא גורם קבוע מחוץ לסימן הגבול.

גזירת סכום של פונקציות

משפט

תהינה $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה x . אזי: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

המשפט נובע מהגדרת הפונקציה הנגזרת ותכונת הגבולות, לפיה הגבול של סכום של פונקציות שווה לסכום גבולותיהן, בתנאי ששניהם קיימים וכל אחד בעל ערך סופי.

גזירת הפרש של פונקציות

אם במשפט הקודם נחליף את $g(x)$ ב- $(-g(x))$, נגיע למשפט הבא:

משפט

תהינה $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה x . אזי: $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$.

לסיכום נציין כי לפי שני המשפטים האחרונים, הנגזרת של סכום/הפרש של שתי פונקציות גזירות היא סכום/הפרש של נגזרותיהן.

הפונקציה הנגזרת של פונקציית פולינום

הידע שנצבר עד עתה לגבי הפונקציה הנגזרת מאפשר לבצע גזירה של כל פונקציית פולינום. נזכיר מושג זה.

הפונקציה $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ כאשר n מספר טבעי ו- $a_0, a_1, \dots, a_n$ מספרים ממשיים קבועים, נקראת **פונקציית פולינום** או בקצרה **פולינום** ממעלה n .

על-פי התוצאות הקודמות לגבי נגזרת פונקציית חזקה וחוקי הגזירה, מקבלים:

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$$

מתוצאה זו נובע:

הנגזרת של פונקציית פולינום ממעלה n היא פונקציית פולינום ממעלה $n-1$.

דוגמה לגזירת פולינום

אם:

$$f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x + 1$$

אז:

$$f'(x) = 5 \cdot 3x^2 - 7 \cdot 2x + 3 = 15x^2 - 14x + 3$$

הפונקציה הנגזרת של מכפלת פונקציות ושל מנת פונקציות

לאחר שראינו כי הפונקציה הנגזרת של סכום/הפרש פונקציות שווה לסכום/הפרש הפונקציות הנגזרות שלהן, נשאלת שאלה: האם נגזרת של מכפלת פונקציות שווה למכפלת הנגזרות? התשובה לשאלה זו במקרה הכללי שלילית, כפי שמראה הדוגמה הבאה.

דוגמה נגדית למניעת דעה מוטעית שנגזרת המכפלה היא מכפלת הנגזרות

תהיינה נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^5$, $g(x) = x^4$. אז:

$$f(x) \cdot g(x) = x^9 \Rightarrow (f(x) \cdot g(x))' = 9x^8$$

לעומת זאת,

$$f'(x) = 5x^4, g'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(x) \cdot g'(x) = 20x^7$$

כלומר, לפונקציות $f(x), g(x)$ הנתונות $(f(x) \cdot g(x))' \neq f'(x) \cdot g'(x)$. דוגמה נגדית זו מעידה שבמקרה הכללי הנגזרת של מכפלת פונקציות אינה שווה למכפלת נגזרותיהן.

את החוק הכללי לפונקציה הנגזרת של מכפלת פונקציות נותן המשפט הבא.

גזירת מכפלת פונקציות

משפט

תהיינה $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה x . אזי $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.
או, בקצרה, $(f \cdot g)' = f'g + g'f$.

הוכחה

על סמך הגדרת הפונקציה הנגזרת וחוקי גבולות, מקבלים:

$$\begin{aligned} y = f(x) \cdot g(x) &\Rightarrow y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(g(x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

ובכך הוכח המשפט.

דוגמה לגזירת מכפלת פונקציות

נתונה הפונקציה $f(x) = (2x^3 - 5x^2 + 1)(x^2 - 2)$. גזרו את הפונקציה בשתי דרכים: א. על-ידי הבאת הפונקציה לצורת פולינום וגזירתו, ב. על-ידי שימוש בחוק הגזירה של מכפלת פונקציות. בדקו אם בשתי הדרכים מתקבלת אותה תשובה.

פתרון

א.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^3 - 5x^2 + 1)(x^2 - 2) = 2x^5 - 4x^3 - 5x^4 + 10x^2 + x^2 - 2 = 2x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 2 \\ \Rightarrow f'(x) &= 10x^4 - 20x^3 - 12x^2 + 22x \end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned} f &= 2x^3 - 5x^2 + 1, \quad g = x^2 - 2 \\ &\Downarrow \qquad \qquad \Downarrow \\ f' &= 6x^2 - 10x, \quad g' = 2x \\ (fg)' &= f'g + g'f = (6x^2 - 10x)(x^2 - 2) + (2x)(2x^3 - 5x^2 + 1) \\ &= 6x^4 - 12x^2 - 10x^3 + 20x + 4x^4 - 10x^3 + 2x \\ &= 10x^4 - 20x^3 - 12x^2 + 22x \end{aligned}$$

בשתי הדרכים התקבלה אותה תשובה.

נציין כי בדוגמה לעיל הייתה אפשרות להימנע מהשימוש בכלל גזירת המכפלה, על-ידי שינוי תבנית הפונקציה הנתונה באמצעות פתיחת סוגריים. במקרה כללי לא קיימת אפשרות כזאת וניתן לחשב את הנגזרת של מכפלה רק על-פי החוק שנקבע במשפט לעיל. למשל,

$$f(x) = x \cdot \sin x \Rightarrow$$

$$f'(x) = (x \cdot \sin x)' = (x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = \sin x + x \cdot \cos x$$

(השתמשנו בנוסחה $(\sin x)' = \cos x$ אשר תוכח בהמשך).

נעבור כעת למציאת הפונקציה הנגזרת של מנת פונקציות. קל מאוד להראות על-ידי דוגמה נגדית שבמקרה הכללי גזרת מנת פונקציות אינה שווה למנת נגזרותיהן. אחת הדוגמאות:

$$\left(\frac{x^3}{x^2}\right)' = (x)' = 1 \neq \frac{(x^3)'}{(x^2)'} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}x$$

החוק לגזירת מנת פונקציות ניתן על-ידי המשפט הבא.

גזירת מנת פונקציות

משפט

תהייה $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה x ו- $g(x) \neq 0$ בנקודה זו. אזי

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

או, בקצרה,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

הוכחה

על סמך הגדרת הפונקציה הנגזרת ותכונות הגבולות, מקבלים:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x+h)g(x)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x+h)g(x)} = \\ &= \frac{g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{g(x) \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} - \frac{f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x) \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} = \\ &= \frac{g(x)f'(x)}{g^2(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0) \end{aligned}$$

ובכך טענת המשפט הוכחה.

דוגמה לגזירת מנת פונקציות

נגזור את הפונקציה $f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{2x + 4}$.

נסמן:

$$\begin{array}{ll} u = 3x^2 - 5x & v = 2x + 4 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ u' = 6x - 5 & v' = 2 \end{array}$$

על סמך חוק גזירת מנת הפונקציות אשר נקבע במשפט לעיל, מוצאים:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(6x-5)(2x+4) - 2(3x^2-5x)}{(2x+4)^2} \\ &= \frac{12x^2 + 24x - 10x - 20 - 6x^2 + 10x}{(2x+4)^2} = \frac{6x^2 + 24x - 20}{(2x+4)^2} \end{aligned}$$

הפונקציה הנגזרת של פונקציית חזקה עם מעריך שלם

כפי שהוכח קודם,

$$(x^n)' = nx^{n-1}; (x^0)' = 0; (x^1)' = 1 \quad \text{לכל } x \text{ ממשי וכל } n > 1.$$

תהי $f(x)$ פונקציית חזקה עם מעריך שלם שלילי, כלומר,

$$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad \text{כאשר } n > 1.$$

נציין כי פונקציה זו מוגדרת בתנאי ש- $x \neq 0$.

לפי חוק גזירת המנה של פונקציות שנקבע בסעיף הקודם, מוצאים:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n} \right)' = \frac{(1)' \cdot x^n - (x^n)' \cdot 1}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}, \quad x \neq 0$$

את הנגזרת של הפונקציה $(x^{-1})' = \frac{1}{x}$, לא נוכל להוכיח בדרך זו². בהמשך נוכיח בדרכים אחרות³ כי

$$(x^{-1})' = -1x^{-2}.$$

לפיכך:

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1} \quad \text{לכל } x \neq 0 \text{ וכל } n = 1, 2, 3, \dots$$

הראינו כי: $(x^m)' = mx^{m-1}$ לכל x כאשר $m > 1$, ולכל $x \neq 0$ כאשר $m \leq 0$ (m מספר שלם).

² כדי להימנע מהביטוי 0^0 שאינו מוגדר, לא הגדרנו את $(x^1)'$ באמצעות נוסחת הנגזרת של פונקציית חזקה ולא הגדרנו את

הפונקציה הקבועה $y = 1$ כ- x^0 . ניתן להגדיר את הפונקציה הקבועה כ- x^0 לכל $x \neq 0$.

³ הפרק "הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ ונגזרתה".

סקירת הנגזרות של פונקציות אלמנטאריות בסיסיות

עד כאן קיבלנו רק נוסחה לנגזרת פונקציית חזקה עם מעריך שלם. פיתוח הנוסחה לנגזרת של פונקציית חזקה עם מעריך ממשי כלשהו עוד לפנינו, כמו גם פיתוח נוסחאות לנגזרות של פונקציות ממשפחות נוספות הנלמדות באנליזה. כהקדמה לפיתוח זה, נביא להלן סקר נוסחאות לנגזרות של פונקציות ממשפחות שונות. הנוסחאות תפוחנה בפרקים הבאים של הספר, המוקדשים לחקירת משפחות אלה.

א. נגזרת של פונקציית חזקה עם מעריך ממשי כלשהו

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1} \quad \text{כאשר } a \text{ מספר ממשי כלשהו ו- } x \text{ שייך לתחום הפונקציה } x^{a-1}.$$

מקרים פרטיים חשובים:

$$\Leftarrow a = -1$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{לכל } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \text{ למעט } x = 0,$$

$$\Leftarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{לכל } x > 0.$$

ב. נגזרת של פונקציה מעריכית

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a \quad \text{כאשר } 0 < a \neq 1 \text{ ו- } x \in \mathbb{R}.$$

מקרה פרטי: $a = e$

$$\left(e^x\right)' = e^x \quad \text{לכל } x \in \mathbb{R}.$$

ג. נגזרת של פונקציה לוגריתמית

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \quad \text{כאשר } 0 < a \neq 1 \text{ ו- } x > 0.$$

מקרה פרטי: $a = e$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x} \quad \text{לכל } x > 0.$$

ד. נגזרות של פונקציות טריגונומטריות

$$\left(\sin x\right)' = \cos x \quad \text{לכל } x \in \mathbb{R}.$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x \quad \text{לכל } x \in \mathbb{R}.$$

$$\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{לכל } x \in \mathbb{R} \text{ למעט } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ כאשר } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\left(\cot x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{לכל } x \in \mathbb{R} \text{ למעט } x = k\pi \text{ כאשר } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ה. נגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות

$$x \in (-1,1) \text{ לכל } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x \in (-1,1) \text{ לכל } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ לכל } (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ לכל } (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

הקשר בין תכונות פונקציה ותכונות הפונקציה הנגזרת

הקריטריון של פונקציה קבועה במונחי הנגזרת

משפט

יהי D תחום קשיר בציר ה- x , כלומר, קטע אחד או קרן אחת. פונקציה $f(x)$ קבועה בתחום D אם ורק אם $f'(x)=0$ לכל $x \in D$.

הוכחה

כיוון א

נניח כי $f(x)$ פונקציה קבועה בתחום D , כלומר, $f(x)=C$ לכל $x \in D$, כאשר C מספר קבוע. אז כפי שהוכח קודם, $f'(x)=0$ לכל $x \in D$.

כיוון ב

נניח כי $f'(x)=0$ לכל $x \in D$. יהיו $x_1 < x_2$ שתי נקודות ב- D . היות ולפי הנתון D הוא תחום קשיר, הקטע $[x_1, x_2]$ מוכל ב- D ו- $f'(x)=0$ לכל x בקטע זה. היות ו- $f(x)$ גזירה ולכן גם רציפה בקטע $[x_1, x_2]$, אז לפי משפט הערך הממוצע של לגרנז' (עמוד 605) קיימת נקודה $c \in (x_1, x_2)$ כך ש-

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

ומכאן:

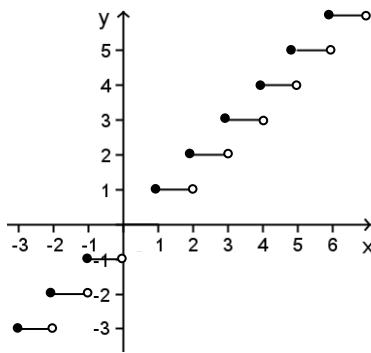
$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

בכך הוכח כי ערכי הפונקציה $f(x)$ בכל שתי נקודות $x_1, x_2 \in D$ שווים זה לזה, כלומר, $f(x)$ היא פונקציה קבועה בתחום זה. המשפט הוכח במלואו.

הוכחה בדרך אחרת

התנאי $f'(x)=0$ לכל $x \in D$ מתקיים אם ורק אם המשיק לגרף של $f(x)$ בתחום D בכל נקודה עליו מקביל לציר ה- x . מצב זה בתחום קשיר אפשרי אם ורק אם הגרף הוא קו ישר המקביל לציר ה- x , כלומר אם ורק אם $f(x)$ היא פונקציה קבועה.

שתי הערות למשפט על הקריטריון של פונקציה קבועה



איור 21

א. חשיבות התנאי של התאפסות הנגזרת בכל נקודה x בתחום

באיור 21 מוצגת הפונקציה $f(x) = [x]$ (החלק השלם של x) אשר מוגדרת לכל x ממשי. לפונקציה זו $f'(x) = 0$ לכל $x \in (-\infty, \infty)$, למעט הנקודות $x = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. למרות זאת פונקציה זו אינה פונקציה קבועה בכל התחום $(-\infty, \infty)$. דוגמה זו מראה, שבקריטריון הפונקציה הקבועה התנאי של התאפסות הנגזרת בכל x הכרחי.

ב. חשיבות הדרישה של קשירות התחום

ללא הדרישה ש- D הוא תחום קשיר, המשפט אינו תקף. לדוגמה, נתבונן בפונקציה

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

תחום ההגדרה D של פונקציה זו מורכב משתי קרניים נפרדות $-\infty < x < 0$ ו- $0 < x < \infty$. לכן הוא אינו קשיר. לכל $x \in D$ מתקיים: $f'(x) = 0$, ובכל זאת הפונקציה $f(x)$ אינה קבועה בתחום D .

עלייה/ירידה של פונקציה בנקודה והתנאים לכך במונחי הנגזרת

נפתח בהגדרת המושגים של עלייה וירידה של פונקציה בנקודה.

הגדרה

תהי x_0 נקודה בתחום ההגדרה של פונקציה $f(x)$.

א. אם x_0 היא נקודה פנימית בתחום של $f(x)$, אומרים כי הפונקציה $f(x)$ **עולה בנקודה** x_0 אם ורק אם קיימת סביבה של x_0 , כך שלכל זוג נקודות x_1, x_2 בסביבה זו, המקיימות את התנאי $x_1 < x_0 < x_2$, מתקיים האי-שוויון: $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

ב. אם x_0 היא נקודת קצה שמאל בתחום של $f(x)$, אומרים כי הפונקציה $f(x)$ **עולה בנקודה** x_0 אם ורק אם קיימת חצי סביבה ימנית של x_0 , כך שבכל נקודה $x \neq x_0$ בחצי סביבה זו מתקיים האי-שוויון $f(x_0) < f(x)$.

ג. אם x_0 היא נקודת קצה ימין בתחום של $f(x)$, אומרים כי הפונקציה $f(x)$ **עולה בנקודה** x_0 אם ורק אם קיימת חצי סביבה שמאלית של x_0 כך שבכל נקודה x בחצי סביבה זו מתקיים האי-שוויון $f(x_0) > f(x)$.

אם בהגדרות לעיל נהפוך את הסימנים באי-שוויונות בין ערכי פונקציה, נגיע להגדרות של פונקציה **יורדת בנקודה** x_0 .

אם פונקציה **עולה/יורדת בנקודה** x_0 , הנקודה x_0 נקראת **נקודת עלייה/ירידה** של הפונקציה.

עלייה וירידה של פונקציה בנקודה במובן החלש ובמובן החזק

אם בהגדרות של עלייה/ירידה של פונקציה בנקודה נחליף את כל האי-שוויונות החזקים בין ערכי הפונקציה $f(x)$ באי-שוויונות חלשים, נגיע למושג של עלייה/ירידה של פונקציה בנקודה **במובן החלש**. בהשוואה, לעלייה/ירידה של פונקציה בנקודה המוגדרת באמצעות אי-שוויונות חזקים, קוראים עלייה/ירידה של פונקציה בנקודה **במובן החזק**. בהמשך ברירת המחדל למושג "עלייה/ירידה של פונקציה בנקודה" היא "במובן החזק".

נציין כי אם פונקציה עולה/יורדת בנקודה במובן החזק, היא עולה/יורדת בנקודה זו גם במובן החלש, אבל לא להפך.

דוגמאות לאיתור ואפיון של נקודות עלייה וירידה

דוגמה 1

נתונה פונקציה

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

אילו נקודות של $x \in \mathbb{R}$ הן נקודות עלייה, ואילו נקודות הן נקודות ירידה של $f(x)$, במובן החזק? ובמובן החלש?

פתרון

בהתאם להגדרות לעיל, הנקודה $x = 0$ היא נקודת עלייה במובן החזק, וכל נקודה $x \neq 0$ היא נקודת עלייה במובן החלש וגם נקודת ירידה במובן החלש.

דוגמה 2

תהי $f(x) = [x]$ (החלק השלם של x). אילו נקודות $x \in \mathbb{R}$ הן נקודות עלייה ואילו נקודות הן נקודות ירידה של $f(x)$ במובן החזק? ובמובן החלש?

פתרון

הפונקציה הנתונה קבועה בכל קטע $[n, n+1)$ כאשר $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (איור 21). פונקציה זו עולה במובן החלש בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$, ובכל נקודה שאינה שלמה היא גם יורדת במובן החלש. לפונקציה זו אין אף נקודת עלייה/ירידה במובן החזק.

דוגמה 3

תהי $f(x) = x^2$. אילו נקודות $x \in \mathbb{R}$ הן נקודות עלייה ואילו נקודות הן נקודות ירידה של $f(x)$ במובן החזק? ובמובן החלש?

פתרון

הפונקציה $f(x) = x^2$ עולה במובן החזק בכל נקודה $x_0 > 0$ כי:

$$0 < x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_0^2 < x_2^2$$

בכל נקודה $x_0 < 0$ הפונקציה יורדת במובן החזק כי:

$$x_1 < x_0 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^2 > x_0^2 > x_2^2$$

בנקודה $x_0 = 0$ הפונקציה $f(x) = x^2$ אינה עולה ואינה יורדת באף מובן.

תנאי עלייה / ירידה של פונקציה בנקודה במובן החזק

משפט

תהי $f(x)$ גזירה בנקודה $x = x_0$.

א. אם $f'(x_0) > 0$, אזי הפונקציה עולה בנקודה x_0 במובן החזק.

ב. אם הפונקציה עולה בנקודה x_0 במובן החזק, אזי $f'(x_0) \geq 0$.

הוכחה

תהי תחילה x_0 נקודה פנימית בתחום ההגדרה של $f(x)$.

לפי הגדרת הנגזרת בנקודה:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

א. נניח כי $f'(x_0) > 0$, כלומר:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

מכאן נובע ש-

$$(*) \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ עבור כל } x \text{ בסביבה די קטנה של } x_0.$$

מאי-שוויון זה נובע שלמונה ומכנה השבר יש סימנים זהים בסביבה די קטנה של x_0 , כלומר, עבור כל x

בסביבה מסוימת של x_0 מתקיים:

$$(1) \quad f(x) - f(x_0) > 0 \text{ כאשר } x - x_0 > 0.$$

ו-

$$(2) \quad f(x) - f(x_0) < 0 \text{ כאשר } x - x_0 < 0.$$

מ- (1) ו- (2) נובע, כי לכל זוג x_1, x_2 בסביבה מסוימת של x_0 מתקיים:

$$x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

מכאן, על-פי ההגדרה, $f(x)$ עולה בנקודה $x = x_0$ במובן החזק. טענה א הוכחה.

ב. נניח כי $f(x)$ עולה בנקודה x_0 במובן החזק. אזי לפי ההגדרה, עבור x בסביבה די קטנה של x_0 מתקיימים

האי-שוויונות (1) ו- (2) לעיל, וכתוצאה מכך מתקיים האי-שוויון (*). נעבור באי-שוויון זה לגבול כאשר

$x \rightarrow x_0$. הכלל של מעבר לגבול באי-שוויון, אשר מנוסח ומבוסס בתורת הגבולות, קובע שבמעבר זה יש

להפוך אי-שוויון חזק לאי-שוויון חלש. לפי כלל זה, מהאי-שוויון (*) נובע כי:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ טענה ב הוכחה.}$$

הערה

בטענה ב של המשפט האחרון, לא ניתן להחליף את האי-שוויון החלש $f'(x_0) \geq 0$ באי-שוויון חזק, כי בנקודת עלייה של פונקציה $f(x)$ במובן החזק אכן ייתכן $f'(x_0) = 0$. למשל, הפונקציה $f(x) = x^3$ עולה בנקודה $x = 0$ במובן החזק, וביחד עם זאת $f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$. יחד עם זאת, התנאי $f'(x_0) = 0$ אינו גורר בהכרח את עליית $f(x)$ בנקודה x_0 . לכן, טענה א של המשפט מציגה תנאי מספיק אבל לא הכרחי לעלייה של $f(x)$ בנקודה במובן החזק, כאשר טענה ב מציגה תנאי הכרחי אבל לא מספיק לכך.

בדומה למשפט לעיל ניתן להוכיח את המשפט הבא:

משפט

תהי $f(x)$ גזירה בנקודה $x = x_0$.
 א. אם $f'(x_0) < 0$, אזי הפונקציה יורדת בנקודה x_0 במובן החזק.
 ב. אם הפונקציה יורדת בנקודה x_0 במובן החזק, אזי $f'(x_0) \leq 0$.

כמו במשפט הקודם, טענה א מציגה תנאי מספיק אבל לא הכרחי לירידת פונקציה בנקודה במובן החזק, כאשר טענה ב מציגה תנאי הכרחי אבל לא מספיק לכך.

תנאי עלייה וירידה של פונקציה בתחום, במונחי הנגזרת

מזכיר תחילה הגדרות של עלייה וירידה של פונקציה בתחום (במובן החזק) אשר כבר הובאו בפרק של פונקציות.

הגדרות

יהי D תחום בציר ה- x ותהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום D .
 א. הפונקציה $f(x)$ **עולה בתחום** D (במובן החזק) אם ורק אם מתקיים:

$$x_1 < x_2 \in D \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

 ב. הפונקציה $f(x)$ **יורדת בתחום** D (במובן החזק) אם ורק אם מתקיים:

$$x_1 < x_2 \in D \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

אם בהגדרות אלה נחליף את כל האי-שוויונות בין ערכי פונקציה $f(x)$ באי-שוויונות חלשים, נקבל הגדרות של עלייה וירידה של פונקציה בתחום, במובן החלש.

נציין כי פונקציה אשר עולה או יורדת במובן החזק, היא גם עולה או יורדת במובן החלש, אבל לא להפך. בהמשך, כאשר נציין עלייה או ירידה נתכוון, אם לא נציין אחרת, לעלייה או ירידה במובן החזק.

פונקציה אשר עולה או יורדת בתחום D נקראת **פונקציה מונוטונית בתחום D** . פונקציה מונוטונית בכל תחום הגדרתה נקראת **פונקציה מונוטונית**.

דוגמה לעלייה וירידה של פונקציה בתחום חלקי

הפונקציה $f(x) = x^2$ עולה בתחום החלקי $x \geq 0$ ויורדת בתחום החלקי $x \leq 0$. כלומר, $f(x) = x^2$ היא פונקציה מונוטונית בכל אחד מהתחומים החלקיים הנ"ל. יחד עם זאת, הפונקציה $f(x) = x^2$ אינה פונקציה מונוטונית כי היא לא מונוטונית (לא עולה ולא יורדת) בכל תחום הגדרתה $-\infty < x < \infty$.

דוגמאות לפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן

הפונקציות $f(x) = 2^x$ ו- $g(x) = [x]$ מוגדרות בתחום $-\infty < x < \infty$. לפי ההגדרה, $f(x)$ היא פונקציה עולה במובן החזק, ו- $g(x)$ היא פונקציה עולה במובן החלש.

תנאי עלייה וירידה במובן החזק של פונקציה בתחום קשיר

משפט

- יהי D תחום קשיר (קטע, קרן) ותהי $f(x)$ פונקציה גזירה בתחום זה.
- אם $f'(x) > 0$ לכל $x \in D$, אזי $f(x)$ עולה במובן החזק בתחום D .
 - אם פונקציה $f(x)$ גזירה ועולה במובן החזק בתחום D , אזי $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in D$.
 - אם $f'(x) < 0$ לכל $x \in D$, אזי $f(x)$ יורדת במובן החזק בתחום D .
 - אם פונקציה $f(x)$ גזירה ויורדת במובן החזק בתחום D , אזי $f'(x) \leq 0$ לכל $x \in D$.

הוכחה

א. נניח כי $f'(x) > 0$ לכל $x \in D$. יהיו $x_1, x_2 \in D$ שתי נקודות, המקיימות את התנאי $x_1 < x_2$. היות והתחום D קשיר, הקטע $[x_1, x_2]$ נמצא כולו בתחום D , והפונקציה $f(x)$ בקטע זה מקיימת את תנאי משפט הערך הממוצע (ר' עמוד 605). על סמך משפט זה קיימת נקודה c בין x_1 ו- x_2 כך שמתקיים: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. לפי ההנחה $f'(c) > 0$, וגם $x_2 - x_1 > 0$. לכן $f(x_2) - f(x_1) > 0$, או $f(x_2) > f(x_1)$. בכך הוכח כי $f(x)$ עולה בתחום D במובן החזק.

ב. נניח כי $f(x)$ עולה במובן החזק בתחום D . אזי היא עולה במובן החזק בכל נקודה $x \in D$, ולכן על-פי טענה ב של המשפט על תנאי עלייה של פונקציה בנקודה במובן החזק, $f'(x) \geq 0$ בכל נקודה $x \in D$. בכך, הוכחו טענות א ו- ב של המשפט. אם $f(x)$ מקיימת את תנאי הטענות ג ו- ד, אז הפונקציה $g(x) = -f(x)$ מקיימת את תנאי הטענות א ו- ב. מהחלת הטענות א ו- ב על הפונקציה $g(x)$, נוכל להסיק את הטענות ג ו- ד.

הערה 1

את האי-שוויונות החלשים בטענות ב ו- ד של המשפט לא ניתן להחליף באי-שוויונות חזקים. נגזרת של פונקציה עולה במובן החזק יכולה להתאפס בנקודות אחדות. למשל, פונקציה $f(x) = x^3$ עולה במובן החזק בכל התחום $-\infty < x < \infty$, וביחד עם זאת הפונקציה הנגזרת שלה $f'(x) = 3 \cdot x^2$ מתאפסת בנקודה $x = 0$. בדומה, הפונקציה $f(x) = -x^3$ יורדת במובן החזק בכל התחום $-\infty < x < \infty$, בעוד שהפונקציה הנגזרת שלה $f'(x) = -3x^2$ מתאפסת בנקודה $x = 0$.

הערה 2

התנאי ש- D הוא תחום קשיר הכרחי לתקפות הטענות א ו- ג של המשפט האחרון. אם התחום D אינו קשיר, אז מהתנאי $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) לא ניתן להסיק בוודאות ש- $f(x)$ עולה/יורדת ב- D . למשל, הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ מוגדרת וגזירה בתחום $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ שאינו קשיר, כי הוא מורכב משתי קרניים נפרדות. לכל $x \in D$ מתקיים: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. למרות זאת, הפונקציה $f(x)$ אינה יורדת בכל התחום D , כי במקרה $x_1 < 0 < x_2$ מתקיים: $f(x_1) < 0 < f(x_2)$.

לאור הערה 1 לעיל, הטענות א ו- ג של המשפט האחרון מציגות תנאי מספיק אבל לא הכרחי לעלייה/ירידה במובן החזק של פונקציה בתחום קשיר. מתברר כי לעלייה/ירידה במובן החלש כן קיים תנאי שהוא בו-זמנית מספיק והכרחי, כלומר, קריטריון, לתכונה זו.

הערה 3

קל לראות שאם בטענה א נחליף אי-שוויון חזק $f'(x) > 0$ באי-שוויון חלש $f'(x) \geq 0$, אז דרך שינויים מתאימים בהוכחה נגיע למסקנה על עליית פונקציה במובן החלש. אותו דבר לגבי הטענה ג. בטענות ב ו- ד החלפת התנאי של מונוטוניות במובן חזק למונוטוניות במובן חלש לא משנה את המסקנות. לאור הנ"ל מגיעים למשפט הבא אשר מציג קריטריון לעלייה וירידה במובן החלש של פונקציה בתחום קשיר.

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בתחום קשיר D .

א. הפונקציה $f(x)$ עולה במובן החלש בתחום D , אם ורק אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in D$.

ב. הפונקציה $f(x)$ יורדת במובן החלש בתחום D , אם ורק אם $f'(x) \leq 0$ לכל $x \in D$.

נציין כי אם התחום D אינו קשיר, טענות המשפט במקרה הכללי אינן תקפות (ראו הערה 2 למשפט הקודם).

נקודות קיצון ומבחניה

להלן הגדרות מדויקות של **נקודות מינימום ומקסימום מקומי/מוחלט** אשר נצטרך להשתמש בהן בהמשך סעיף זה.

הגדרות נקודות מינימום/מקסימום, מקומי ומוחלט

א. תהי x_0 נקודה פנימית בתחום ההגדרה של פונקציה $f(x)$. נקודה זו נקראת **נקודת מינימום מקומי** של $f(x)$, אם ורק אם קיימת סביבה $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ של הנקודה x_0 ($\varepsilon > 0$), כך ש- $f(x_0) \leq f(x)$ לכל x בסביבה זו.

ב. תהי x_0 נקודת קצה מצד שמאל בתחום ההגדרה של פונקציה $f(x)$. נקודה זו נקראת **נקודת מינימום מקומי** של $f(x)$, אם ורק אם קיימת חצי סביבה ימנית $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ של הנקודה x_0 ($\varepsilon > 0$) הכוללת את x_0 , כך ש- $f(x_0) \leq f(x)$ לכל x בחצי-סביבה זו.

ג. תהי x_0 נקודת קצה מצד ימין בתחום ההגדרה של פונקציה $f(x)$. נקודה זו נקראת **נקודת מינימום מקומי** של $f(x)$, אם ורק אם קיימת חצי-סביבה שמאלית $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ של הנקודה x_0 ($\varepsilon > 0$) הכוללת את x_0 , כך ש- $f(x_0) \leq f(x)$ לכל x בחצי-סביבה זו.

ד. הנקודה x_0 בתחום ההגדרה של פונקציה $f(x)$ נקראת **נקודת מינימום מוחלט** של $f(x)$ בתחום D , אם ורק אם $f(x_0) \leq f(x)$ לכל $x \in D$.
אם בהגדרות א-ד לעיל נחליף את האי-שוויון $f(x_0) \leq f(x)$ באי-שוויון $f(x_0) \geq f(x)$, נקבל הגדרות לנקודות מקסימום, מקומי ומוחלט.

נקודות מקסימום ומינימום נקראות **נקודות קיצון** או **נקודות אקסטריםום**.

ההגדרה המוחשית הוויזואלית של נקודות קיצון

נקודות קיצון ניתנות להגדרה מוחשית ויזואלית באופן הבא:

א. הנקודה $x = x_0$ היא **נקודת מינימום/מקסימום מקומי** של פונקציה $f(x)$, אם ורק אם הנקודה (x_0, y_0) על הגרף $y = f(x)$, היא הנקודה הגבוהה ביותר/ הנמוכה ביותר בהשוואה עם שאר הנקודות על הגרף בסביבה מסוימת של הנקודה, או, במקרה והיא נקודת קצה, בחצי סביבה מסוימת מתאימה.

ב. הנקודה $x = x_0$ היא **נקודת מינימום/מקסימום מוחלט** של פונקציה $f(x)$ אם ורק אם הנקודה (x_0, y_0) על הגרף $y = f(x)$, היא הנקודה הגבוהה ביותר/ הנמוכה ביותר בהשוואה עם שאר הנקודות על הגרף.

הקשר בין קיצון מקומי וקיצון מוחלט

מהגדרות נקודות קיצון נובע כי כל נקודת קיצון מוחלט היא גם נקודת קיצון מקומי, אבל לא להפך: לא כל נקודת קיצון מקומי היא נקודת קיצון מוחלט.

קיום נקודות קיצון

האם לכל פונקציה יש נקודות קיצון? קל לראות שהתשובה לשאלה זו שלילית. למשל, לפונקציה $f(x) = x^3$ אשר עולה בכל $\mathbb{R}$ אין אף נקודת קיצון. נכון לומר שיש אינסוף פונקציות ללא נקודות קיצון ואינסוף פונקציות עם נקודות קיצון. יש גם פונקציות בעלות אינסוף נקודות קיצון. למשל, לפונקציה $f(x) = \sin x$ כל נקודה

ומינימום לסירוגין).
 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) היא נקודת קיצון מוחלט (מקסימום

נציין שכאשר מתבוננים בגרף של פונקציה, נקודות הקיצון ניתנות לאיתור קל כנקודות "הבולטות ביותר".

דוגמאות לאיתור ואפיון ויזואלי של נקודות קיצון של פונקציות המוצגות על-ידי הגרפים שלהן

א. לפונקציה $f(x) = x^2 - 1$ המוגדרת בתחום $(-\infty, \infty)$ (איור 22), יש מינימום מקומי בנקודה $(0, -1)$ שהוא גם מינימום מוחלט, ואין נקודות מקסימום.

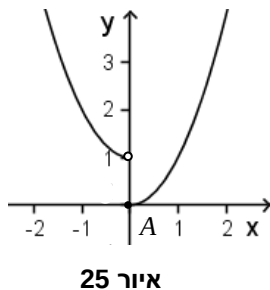
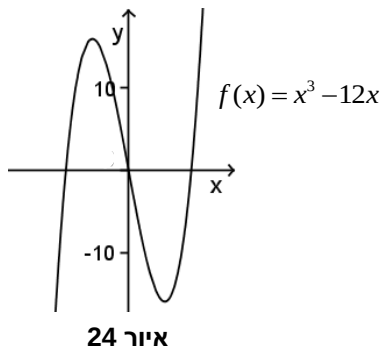
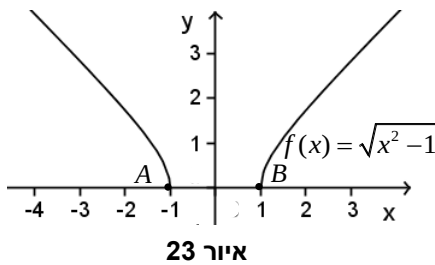
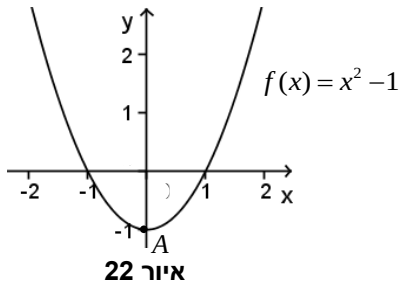
ב. לפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ המוגדרת בתחום $|x| \geq 1$ (איור 23), יש מינימום מקומי בנקודות $(-1, 0)$ ו- $(1, 0)$ שהוא גם מינימום מוחלט, ואין נקודות מקסימום.

ג. לפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$ המוגדרת על $\mathbb{R}$ (איור 24), יש מינימום מקומי בנקודה $(2, -16)$ ומקסימום מקומי בנקודה $(-2, 16)$. לפונקציה אין נקודות קיצון מוחלט. לפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x^2 + 1 & x < 0 \end{cases}$$

(איור 25), יש נקודת מינימום מוחלט בראשית הצירים ואין נקודות מקסימום.

לפי ההגדרות של נקודות קיצון, הן מתחלקות לנקודות קיצון פנימיות ונקודות קיצון בקצה תחום הפונקציה. שני המשפטים להלן דנים בתנאים הכרחיים לנקודות קיצון פנימיות.



ערך הנגזרת בנקודת קיצון פנימית שבה פונקציה גזירה

משפט

תהי $x = x_0$ נקודת קיצון פנימית של פונקציה $f(x)$. אם $f(x)$ גזירה בנקודה זו, כלומר, אם $f'(x_0)$ קיימת, אזי בהכרח $f'(x_0) = 0$.

הוכחה

נניח כי x_0 נקודת מקסימום מקומי. אזי עבור x בסביבה די קטנה של x_0 , מתקיים:

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \iff f(x_0) \geq f(x)$$

מכאן נובע כי:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

-I

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

לפי ההנחה, הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 , ולכן $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$ וגם $f'(x_0) \geq 0$ ו- $f'(x_0) \leq 0$. הדבר אפשרי רק אם $f'(x_0) = 0$. המשפט הוכח.

משיק (בעל שיפוע) לגרף של פונקציה בנקודת קיצון פנימית

את המשפט האחרון ניתן לנסח במונחים גאומטריים כך:

משפט

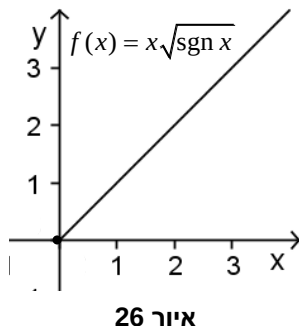
אם בנקודת קיצון פנימית של פונקציה $f(x)$ לגרף שלה קיים משיק בעל שיפוע, אזי הוא בהכרח מקביל לציר x .

הערה

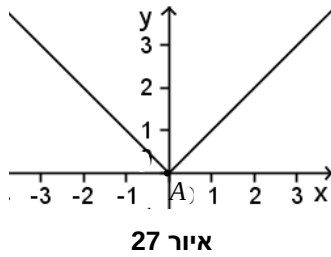
התנאי $f'(x_0) = 0$ הוא תנאי הכרחי אבל לא מספיק לכך שהנקודה x_0 תהיה נקודת קיצון של פונקציה גזירה $f(x)$. למשל, הפונקציה $f(x) = x^3$ מוגדרת וגזירה בכל ה- $\mathbb{R}$ ו- $f'(0) = 0$, אך הנקודה $x = 0$ אינה נקודת קיצון שלה, כי פונקציה זו עולה בכל ה- $\mathbb{R}$.

הנגזרת בנקודת קיצון הנמצאת בקצה תחום הפונקציה

בנקודת קיצון מקומי הנמצאת בקצה תחום הפונקציה הנגזרת לא חייבת להתאפס, אף אם היא קיימת. למשל, לפונקציה $f(x) = x\sqrt{\operatorname{sgn}(x)}$, המוצגת באיור 26, הנקודה $x = 0$ הנמצאת בקצה השמאלי של תחום ההגדרה, היא נקודת מינימום מקומי (וגם מוחלט) אבל $f'(0) = 1 \neq 0$.



נקודת קיצון של פונקציה בה הנגזרת אינה קיימת



המשפט על ערך הנגזרת בנקודת קיצון דורש ש- $f'(x)$ תהיה גזירה בנקודת קיצון. ללא דרישה זו טענת המשפט, כמו שהיא, אינה נכונה. למשל, הפונקציה $f(x) = |x|$ (איור 27), מוגדרת ורציפה בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$. הנקודה $x = 0$ היא נקודת מינימום מקומי וגם מינימום מוחלט של $f(x)$. אבל בנקודה זו $f(x)$ אינה גזירה, כלומר, הנגזרת בנקודה זו אינה קיימת, ולכן לא ניתן להסיק שום דבר לגבי ערכה.

המשפט הבא מתאר את שתי האפשרויות לנגזרת של פונקציה בנקודת קיצון פנימית, וקובע בכך את התנאי הכרחי לנקודת קיצון פנימית במקרה הכללי.

תנאי הכרחי לנקודת קיצון פנימית

משפט

אם הנקודה $x = x_0$ היא נקודת קיצון פנימית של הפונקציה $f(x)$, אז או ש- $f'(x_0) = 0$, או ש- $f'(x_0)$ אינה קיימת.

את המשפט ניתן לנסח באופן גאומטרי בצורה הבאה:

שלוש אפשרויות למשיק בנקודת קיצון

משפט

אם $x = x_0$ היא נקודת קיצון פנימית של $f(x)$, אז המשיק לגרף של $f(x)$ בנקודה $(x_0, f(x_0))$ או מקביל לציר ה- x , או מקביל לציר ה- y , או אינו קיים כלל.

תנאי הכרחי לנקודת קיצון פנימית של פונקציה מביא למושג חשוב של נקודות קריטיות.

נקודות קריטיות של פונקציה

הגדרה

הנקודה $x = x_0$ בתחום ההגדרה של פונקציה $f(x)$ נקראת **נקודה קריטית** של $f(x)$ אם ורק אם:
א. $f'(x_0) = 0$ או ב. $f'(x_0)$ אינה קיימת.

הגדרה זו היא הגדרה קונסטרוקטיבית, כלומר, היא מציינת דרך למציאת נקודות קריטיות של פונקציה נתונה.

דוגמה למציאת נקודות קריטיות של פונקציה נתונה

מצא את כל הנקודות הקריטיות של $f(x) = x\sqrt[3]{x+1}$.

פתרון

הפונקציה הנתונה מוגדרת בתחום $-\infty < x < \infty$. הפונקציה הנגזרת שלה היא:

$$f'(x) = \sqrt[3]{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{3(x+1) + x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{4x+3}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

נמצא נקודות קריטיות לפי הגדרתן:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} = -0.75 \quad \text{א.}$$

$$f'(x) = -1 \Rightarrow x = -1 \quad \text{ב. אינה קיימת.}$$

מצאנו כי לפונקציה הנתונה יש שתי נקודות קריטיות: $x = -1$, $x = -0.75$.

הקשר בין נקודות קיצון ונקודות קריטיות של פונקציה

לפי המשפט על נקודת קיצון פנימית של פונקציה, נקודת קיצון פנימית של פונקציה היא בהכרח נקודה קריטית שלה. ההפוך אינו נכון - לא כל נקודה קריטית פנימית של פונקציה היא בהכרח נקודת קיצון שלה. למשל, הנקודה $x = 0$ היא נקודה קריטית של הפונקציה $f(x) = x^3$ אבל היא לא נקודת קיצון של פונקציה זו.

נקודת קיצון בקצה תחום ההגדרה של פונקציה $f(x)$ יכולה להיות או לא להיות נקודה קריטית שלה. למשל, לפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ הנקודה $x = 0$, הנמצאת בקצה השמאלי של תחום הפונקציה, היא נקודה קריטית של $f(x)$, כי הנגזרת $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ אינה קיימת ב- $x = 0$. אבל לפונקציה $f(x) = x\sqrt{\sin x}$, המוצגת באיור 26, הנקודה $x = 0$, הנמצאת בקצה השמאלי של תחום הפונקציה, שהיא נקודת מינימום מקומי וגם מוחלט, אינה נקודה קריטית, כי $f'(0) = 1$.

ניתן להראות בעזרת דוגמה שנקודה קריטית הנמצאת בקצה תחום ההגדרה של פונקציה לא חייבת להיות נקודת קיצון שלה.

מכל הממצאים שתוארו לעיל נובעת המסקנה החשובה הבאה:

את נקודות הקיצון של פונקציה $f(x)$ יש לחפש בין הנקודות הקריטיות של $f(x)$, ונקודות הקצה שלה בתחום הגדרתה. כל הנקודות האלה הן רק "חשודות" כנקודות קיצון של $f(x)$. איתור נקודות קיצון מבין הנקודות הקריטיות דורש בדיקה נוספת.

איך נאתר את נקודות הקיצון של פונקציה מבין הנקודות החשודות כנקודות קיצון שלה? לשם כך יש להכיר את התנאים המספיקים לנקודות קיצון או, בקצרה, את מבחני נקודות הקיצון. אחד מהם, הנקרא "מבחן הנגזרת הראשונה" מוצג במשפט הבא. לניסוח המשפט נזדקק למושג "החלפת סימן של פונקציה בנקודה".

החלפת סימן של פונקציה בנקודה

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת נקודה $x = x_0$, למעט אולי נקודה זו.

- פונקציה $f(x)$ **בנקודה** $x = x_0$ **מחליפה סימן משלילי לחיובי**, אם ורק אם קיימת סביבה של נקודה זו, בה $f(x) < 0$ כאשר $x < x_0$ ו- $f(x) > 0$ כאשר $x > x_0$.
- פונקציה $f(x)$ **בנקודה** $x = x_0$ **מחליפה סימן מחיובי לשלילי**, אם ורק אם קיימת סביבה של נקודה זו, בה $f(x) > 0$ כאשר $x < x_0$ ו- $f(x) < 0$ כאשר $x > x_0$.
- פונקציה $f(x)$ **בסביבת הנקודה** $x = x_0$ **שומרת על סימן קבוע חיובי או שלילי**, אם ורק אם קיימת סביבה של נקודה זו, בה לכל $x \neq x_0$ מתקיים: $f(x) > 0$ או $f(x) < 0$.

מבחן הנגזרת הראשונה לנקודת קיצון פנימית

משפט

תהי פונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בסביבת הנקודה x_0 , כולל נקודה זו, וגזירה בסביבת הנקודה x_0 , למעט אולי הנקודה עצמה.

א. אם הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ בנקודה x_0 מחליפה סימן משלילי לחיובי, אזי x_0 היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.

ב. אם הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ בנקודה x_0 מחליפה סימן מחיובי לשלילי, אזי x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.

ג. אם הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ שומרת סימן קבוע בסביבת הנקודה x_0 , אזי x_0 אינה נקודת קיצון של $f(x)$.

הוכחה

א. אם $f'(x)$ בנקודה x_0 מחליפה סימן משלילי לחיובי, אזי לפי ההגדרה, קיימת סביבה $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ של הנקודה x_0 ($\varepsilon > 0$) כך שמתקיים: $f'(x) < 0$ כאשר $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ ו- $f'(x) > 0$ כאשר $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. מתנאים אלה, על-פי המשפט על תנאי עלייה וירידה של פונקציה בתחום קשיר, נובע כי $f(x)$ יורדת בקטע $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ ועולה בקטע $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. מכאן, היות ו- $f(x)$ רציפה בנקודה $x = x_0$, מסיקים כי נקודה זו היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.

ב. באופן דומה ל- א מוכיחים כי אם $f'(x)$ בנקודה x_0 מחליפה סימן מחיובי לשלילי, אז $f(x)$ עולה בקטע $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ ויורדת בקטע $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, כאשר $\varepsilon > 0$. לכן הנקודה $x = x_0$ היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.

ג. אם $f'(x)$ שומרת סימן קבוע בסביבת הנקודה x_0 , אזי $f(x)$ מונוטונית (עולה או יורדת) בסביבה מסוימת של הנקודה $x = x_0$, ולכן נקודה זו לא יכולה להיות נקודת קיצון של $f(x)$.

המשפט הוכח.

מבחן הנגזרת הראשונה משמש "מסנן" לאיתור נקודות קיצון בין נקודות קריטיות של פונקציה.

דוגמה לאיתור נקודות קיצון של פונקציה מבין הנקודות הקריטיות שלה

מצאו אילו מהנקודות הקריטיות של $f(x) = x\sqrt[3]{x+1}$ הן נקודות קיצון.

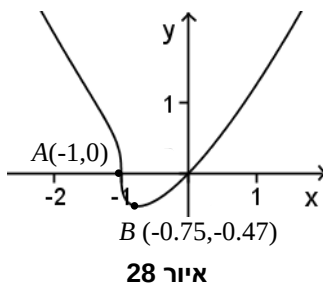
פתרון

כפי שמצאנו בדוגמה הקודמת,

$$f'(x) = \frac{4x+3}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

והנקודות הקריטיות של $f(x)$ הן: $x = -1$ ו- $x = -0.75$. המכנה של הביטוי

המציג את $f'(x)$ שומר על סימן קבוע (חיובי), והמונה מחליף את הסימן בנקודה $x = -0.75$. היות והסימן של $f'(x)$ מוחלף בנקודה $x = -0.75$ משלילי לחיובי, ו- $f(x)$ רציפה בנקודה זו, הנקודה $x = -0.75$ היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$ לפי המשפט האחרון. בנקודה $x = -1$ הסימן של $f'(x)$ אינו מתחלף אלא נשאר שלילי לכל x אשר די קרוב ל- $x = -1$. לכן הנקודה $x = -1$ אינה נקודת קיצון של $f(x)$. הגרף הממוחשב של $f(x)$ (איור 28), תואם את המסקנות שהתקבלו. כפי שרואים בגרף, הנקודה $A(-1, 0)$ היא לא נקודת קיצון של $f(x)$, והנקודה $B(-0.75, -0.47)$ היא נקודת מינימום מקומי שהוא גם מינימום מוחלט.



איור 28

דוגמה ליישום של מבחן הנגזרת הראשונה לפונקציה בתחום מפוצל

נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 + 4x), & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$$

מצאו את כל הנקודות הקריטיות של $f(x)$ ובדקו אם הן נקודות קיצון.

פתרון

הפונקציה הנתונה מוגדרת ורציפה בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$. הפונקציה הנגזרת של $f(x)$ היא:

$$f'(x) = \begin{cases} -(2x + 4), & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

בנקודה $x = 0$ הנגזרת אינה קיימת כי:

$$f'_-(0) = -4 \neq f'_+(0) = 2$$

הנגזרת $f'(x)$ מתאפסת בנקודה אחת ויחידה $x = -2$. מכאן, לפונקציה הנתונה יש שתי נקודות קריטיות: $x = -2, x = 0$. ניישם על נקודות אלה את מבחן הנגזרת הראשונה.

בנקודה $x = -2$ הנגזרת $f'(x)$ מחליפה סימן מחיובי לשלילי כי מתקיים:

$$x < -2 \Rightarrow f'(x) = -2(x + 2) > 0$$

-I

$$0 > x > -2 \Rightarrow f'(x) = -2(x + 2) < 0$$

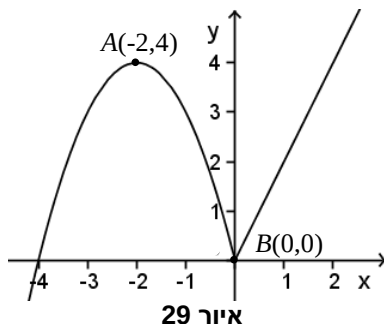
לכן, לפי המשפט על מבחן הנגזרת הראשונה לנקודת קיצון, הנקודה $x = -2$ היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.

בנקודה $x = 0$ הנגזרת $f'(x)$ מחליפה סימן משלילי לחיובי, כי מתקיים:

$$-2 < x < 0 \Rightarrow f'(x) = -2(x + 2) < 0$$

-I

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) = 2 > 0$$



לכן, לפי מבחן הנגזרת הראשונה לנקודת קיצון, הנקודה $x = 0$ היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$. הגרף הממוחשב של הפונקציה הנתונה (איור 29), תואם את מסקנות החקירה. רואים בגרף שתי נקודות קיצון: נקודת מקסימום מקומי $A(-2, 4)$ ונקודת מינימום מקומי $B(0, 0)$. בנקודה $A(-2, 4)$ הנגזרת של הפונקציה שווה ל-0, בנקודה $B(0, 0)$ היא לא קיימת. באפיון ויזואלי, בנקודה $A(-2, 4)$ לגרף של הפונקציה יש משיק המקביל לציר ה- x , ובנקודה $B(0, 0)$ המשיק אינו קיים. בנקודה זו לגרף יש חוד.

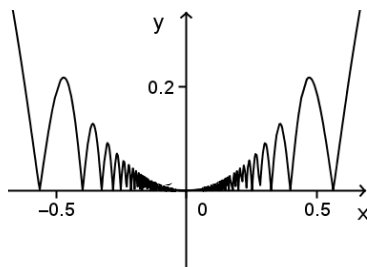
מבחן הנגזרת הראשונה – תנאי מספיק אבל לא הכרחי

המשפט על מבחן הנגזרת הראשונה לנקודת קיצון מציג רק תנאים מספיקים לנקודת קיצון פנימית. הנקודה $x = x_0$ עשויה להיות נקודת קיצון של פונקציה $f(x)$, גם ללא מצב של שינוי סימן של $f'(x)$ בנקודה $x = x_0$, כפי שמראה הדוגמה הבאה.

דוגמה לנקודת קיצון בה הנגזרת אינה מחליפה סימן

תהי:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



איור 30

פונקציה זו מוגדרת, רציפה וגזירה בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$, כולל $x=0$. הנקודה $x=0$ היא נקודת מינימום מקומי וגם מינימום מוחלט, כי $f(0)=0$ ו- $f(x) \geq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. יחד עם זאת בכל סביבה של הנקודה $x=0$, הנגזרת $f'(x)$ משנה את סימנה אינסוף פעמים עקב תנודה אינסופית בין $y=0$ ו- $y=x^2$ (איור 30).

המשפט הקודם מתייחס רק לנקודות קיצון פנימיות בתחום ההגדרה של $f(x)$. המשפט הבא מציג את מבחן הנגזרת הראשונה לנקודות קצה בתחום ההגדרה.

מבחן הנגזרת הראשונה לנקודת קיצון בקצה התחום

משפט

תהי $x = x_0$ נקודת קצה מצד שמאל או קצה מצד ימין של תחום ההגדרה של פונקציה $f(x)$, אשר היא רציפה בנקודה זו, וגזירה בחצי הסביבה שלה המסוימת, למעט אולי הנקודה עצמה.

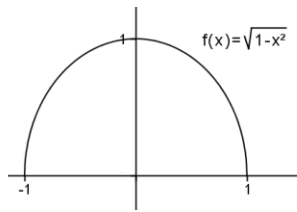
א. אם הנקודה $x = x_0$ היא קצה מצד שמאל של התחום של $f(x)$, וקיים $\varepsilon > 0$ כך שהפונקציה הנגזרת $f'(x)$ שומרת על סימן קבוע בקטע $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, אזי הנקודה $x = x_0$ היא נקודת קיצון מקומי של $f(x)$, דהיינו, נקודת מינימום כאשר $f'(x) > 0$ ונקודת מקסימום כאשר $f'(x) < 0$, לכל $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$.

ב. אם הנקודה $x = x_0$ היא קצה מצד ימין של תחום ההגדרה של $f(x)$, וקיים $\varepsilon > 0$ כך שהפונקציה הנגזרת $f'(x)$ שומרת על סימן קבוע בקטע $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, אזי הנקודה $x = x_0$ היא נקודת קיצון מקומי של $f(x)$, דהיינו, נקודת מקסימום כאשר $f'(x) > 0$ ונקודת מינימום כאשר $f'(x) < 0$, לכל $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$.

הוכחת המשפט מיידית ומתבססת על העובדה כי אם הפונקציה הנגזרת חיובית / שלילית בקטע כלשהו, אזי הפונקציה המקורית עולה / יורדת בקטע זה.

דוגמה למציאת כל נקודות הקיצון של פונקציה בקטע סגור

מצאו את כל נקודות הקיצון של הפונקציה:



איור 31

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

פתרון

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע סגור $-1 \leq x \leq 1$. הפונקציה הנגזרת

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

מתאפסת בנקודה פנימית $x=0$, ומחליפה בה סימן מחיובי לשלילי. על-פי מבחן הנגזרת הראשונה לנקודת קיצון פנימית, הנקודה $x=0$ היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$. הנקודה $x=-1$ היא קצה מצד שמאל של התחום של $f(x)$, ו- $f'(x) > 0$ כאשר $-1 < x < 0$. לפי המשפט האחרון, הנקודה $x=-1$ היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$. הנקודה $x=1$ היא קצה מצד ימין של התחום של $f(x)$, ו- $f'(x) < 0$ כאשר $0 < x < 1$. לפי המשפט האחרון, הנקודה $x=1$ היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$. בכך, לפונקציה הנתונה יש שלוש נקודות קיצון: שתי נקודות מינימום $x=\pm 1$, ונקודת מקסימום $x=0$. קל לוודא כי כל קיצון של הפונקציה הוא קיצון מוחלט. הגרף הממוחשב של $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (איור 31), תואם את כל המסקנות שהתקבלו. נשים לב שבנקודות מקסימום המשיק לגרף מקביל לציר ה- x , ובנקודות מינימום המשיקים לגרף מקבילים לציר ה- y . המצב נגרם על-ידי כך שהנגזרת $f'(x)$ בנקודה $x=0$ מתאפסת, ובנקודות $x=\pm 1$ אינה קיימת.

מקסימום ומינימום מוחלט של פונקציה רציפה בקטע סגור

אם $f(x)$ רציפה בתחום קשיר, חסום וסגור, כלומר, בקטע סגור $a \leq x \leq b$, אז היא בהכרח מקבלת בתחום זה מקסימום מוחלט ומינימום מוחלט. נקודות בהן מתקבלים מקסימום / מינימום מוחלט הן גם נקודות מקסימום/מינימום מקומי, והן יכולות להימצא בנקודות פנימיות של התחום או/ו בקצותיו. היות והנקודות הפנימיות של קיצון נמצאות בין הנקודות הקריטיות של $f(x)$, מגיעים למסקנה: נקודות בהן הפונקציה $f(x)$ בקטע $a \leq x \leq b$ מקבלת מקסימום / מינימום מוחלט, נמצאות בין הנקודות הקריטיות של $f(x)$ בקטע זה או/ו בקצותיו.

על סמך מסקנה זו ניתן לנסח את הכלל למציאת מקסימום ומינימום מוחלט של פונקציה רציפה בקטע. נציין כי לשני ערכים אלה קוראים גם "הערך המקסימלי והערך המינימלי", או "הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר" של הפונקציה בקטע.

כלל למציאת הערך המקסימלי והערך המינימלי של פונקציה רציפה בקטע סגור

כדי למצוא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, מבצעים שני שלבים:

א. מוצאים את כל הנקודות הקריטיות של $f(x)$ בקטע $[a, b]$, כלומר נקודות $x \in [a, b]$ בהן $f'(x) = 0$ או $f'(x)$ אינה קיימת.

ב. מוצאים את ערכי הפונקציה $f(x)$ בכל הנקודות הקריטיות ובקצות הקטע $[a, b]$ ובחרים ביניהם את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר.

דוגמה למציאת מקסימום ומינימום מוחלט של פונקציה רציפה בקטע סגור

מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של $f(x) = |x|e^{-x}$ בקטע $-1 \leq x \leq 3$. איור 32 מציג את גרף הפונקציה.

פתרון

עבור $x \neq 0$ הנגזרת של הפונקציה הנתונה היא:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x} - xe^{-x}, & x > 0 \\ -e^{-x} + xe^{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

וכאשר $x = 0$ הנגזרת $f'(x)$ אינה קיימת, כי

$f'_-(0) = -1 \neq f'_+(0) = 1$. הנגזרת מתאפסת בנקודה אחת $x = 1$.

לכן הנקודות הקריטיות של $f(x)$ בקטע $-1 \leq x \leq 3$ הן $x = 0$ ו-

$x = 1$. נחשב את ערכי הפונקציה $f(x) = |x|e^{-x}$ בנקודות אלה

ובקצות הקטע. $x = -1$ ו- $x = 3$ נקבל:

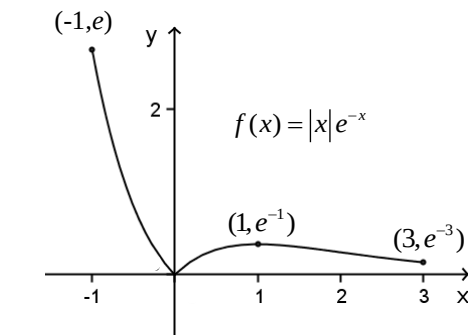
$$f(3) = 3e^{-3} = \frac{3}{e^3}; \quad f(-1) = 1 \cdot e^1 = e; \quad f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}; \quad f(0) = 0 \cdot e^{-0} = 0$$

כשבוחרים בין הערכים לעיל את הערך הקטן ביותר ואת הערך הגדול ביותר, מקבלים:

$$m = \min_{-1 \leq x \leq 3} f(x) = 0 = f(0)$$

$$M = \max_{-1 \leq x \leq 3} f(x) = e = f(-1)$$

נציין כי מינימום ומקסימום מוחלט של פונקציה רציפה בקטע סגור יכולים להתקבל במספר נקודות. למשל פונקציה $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ בקטע $-1 \leq x \leq 1$ מקבלת את הערך המינימלי שלה פעמיים – בשני קצות הקטע (איור 31).



איור 32

הקשר בין תכונות הפונקציה ותכונות הפונקציה הנגזרת – סיכום

טבלה 2 מציגה סיכום של הקשרים המרכזיים בין תכונות של פונקציה ותכונות הפונקציה הנגזרת שלה, אשר נידונו בסעיפים הקודמים.
נציין שבטבלה להלן "קטע (a,b) " ניתן להחליף ב- "תחום D קשיר".

טבלת הקשר בין תכונות הפונקציה והפונקציה הנגזרת

תכונות $f'(x)$		תכונות $f(x)$
$f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a,b)$	$\Rightarrow$	$f(x)$ גזירה ועולה במובן החלש בקטע (a,b) .
$f'(x) > 0$ לכל $x \in (a,b)$	$\Rightarrow$	$f(x)$ גזירה ועולה במובן החזק בקטע (a,b) .
$f'(x) \leq 0$ לכל $x \in (a,b)$	$\Rightarrow$	$f(x)$ גזירה ויורדת במובן החלש בקטע (a,b) .
$f'(x) < 0$ לכל $x \in (a,b)$	$\Rightarrow$	$f(x)$ גזירה ויורדת במובן החזק בקטע (a,b) .
$f'(x_0) = 0$ או $f'(x_0)$ אינה קיימת.	$\Leftarrow$	הנקודה $x = x_0$ היא נקודת קיצון פנימית של $f(x)$.
הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x = x_0$, והנגזרת $f'(x)$ בנקודה $x = x_0$ מחליפה סימן משלילי לחיובי.	$\Rightarrow$	הנקודה הפנימית $x = x_0$ היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.
הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x = x_0$, והנגזרת $f'(x)$ בנקודה $x = x_0$ מחליפה סימן מחיובי לשלילי.	$\Rightarrow$	הנקודה הפנימית $x = x_0$ היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.

טבלה 2

פעילויות דידקטיות לפרק הנגזרת הראשונה

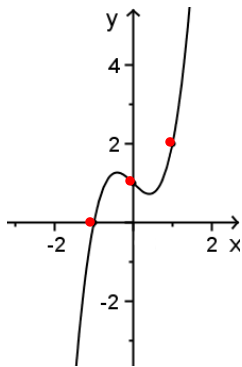
פעילויות מבוא

פעילות 1: מבט נוסף על טבלת ערכים של פונקציה ככלי לסרטוט גרף הפונקציה

נתבונן בגרף הפונקציה $f(x) = 2x^3 - x + 1$ (איור 33).

לפונקציה שתי נקודות קיצון: נקודת מינימום שבה $x = \sqrt{\frac{1}{6}}$ ונקודת מקסימום שבה

$x = -\sqrt{\frac{1}{6}}$. בתחום שבין נקודות הקיצון הפונקציה יורדת.



איור 33

אם מסרטטים גרף של הפונקציה באמצעות טבלה המכילה נקודות עם ערכי x שלמים בלבד מתקבל הרושם כאילו הפונקציה עולה.

יתרה מזו: אם מציבים בטבלה רק $x = -1$, $x = 0$, ו- $x = 1$, מתקבלות שלוש נקודות הנמצאות על ישר אחד, הישר $y = x + 1$ (הנקודות מסומנות באדום).

במטרה ליצור אצל התלמידים צורך בכלים חדשים, ולהכשיר את הקרקע להכנסת מושג הנגזרת, הפעילות במסגרת שלהלן חושפת בהדרגה תכונות של הפונקציה $f(x) = 2x^3 - x + 1$ שלא התגלו באמצעות טבלה ראשונית, ומעלה שאלה שאין לה עדיין

תשובה: האם הגרף המסורטט מתאר נאמנה את תכונות הפונקציה?

נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^3 - x + 1$

x	-1	0	1
$f(x)$			

טבלה 3

א. השלימו את הטבלה וסמנו את הנקודות הבאות במערכת צירים.

ב. האם לדעתכם הפונקציה f עולה בתחום $-1 < x < 1$?

ג. האם לדעתכם הפונקציה f ליניארית בתחום $-1 < x < 1$?

ד. שער: $f(2) =$

ה. חשבו את $f(2)$ ואת $f(-2)$. הוסיפו את הנקודות המתאימות לטבלה ולמערכת הצירים.

ענו שנית על הסעיפים ב ו- ג.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

טבלה 4

ו. השלימו: $f(0.5) =$ $f(1.5) =$

$f(-0.5) =$ $f(-1.5) =$, והוסיפו לגרף את

הנקודות המתאימות.

ז. ענו עוד הפעם על הסעיפים ב ו- ג.

ח. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ט. האם ניתן להסיק מהטבלה את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

לא נוכל, כמובן, להסיק מהטבלה את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה, ועל כן נשאלת השאלה:

⁴ הפעילות נבנתה ברוח פעילויות המופיעות אצל כהן וגוטליב (1998).

אם שימוש בטבלת ערכים לא מבטיח סרטוט גרף אמין – מדוע סרטוטו עד עתה גרפים של פונקציות באמצעות טבלת ערכים?

התשובה קשורה במידע נוסף על פונקציות ותכונותיהן, התומך בסרטוט הגרפים. למשל:

- לסרטוט גרף של פונקציה ליניארית דרושות שתי נקודות בלבד. במקרה זה טבלת ערכים המכילה שתי נקודות היא כלי אמין.
 - כשסרטוטנו פרבולות מצאנו תחילה את נקודת הקדקוד. התבססנו על העובדה שלפונקציה ריבועית נקודת קיצון יחידה. בדרך כלל התבססנו גם על תכונת הסימטריה של הפרבולה. תכונה זו נובעת מכך שפונקציה ריבועית מתקבלת מהזזות אופקיות ואנכיות של פונקציה מהמשפחה $y = ax^2$.
 - סרטוט בעזרת טבלה של גרפים ממשפחת הפונקציות $y = x^n$ היה מלווה בדיון בתכונות של פונקציות החזקה עם מעריך זוגי ועם מעריך אי-זוגי.
- במילים אחרות: בכל המקרים בהם סרטוטנו גרפים באמצעות טבלת ערכים היה לנו מידע נוסף שעזר לנו לתכנן את טבלת הערכים, באופן שהגרף המתקבל באמצעותה ישקף את תכונות הפונקציה.

פעילות 2: מה נוכל להסיק מן הנתונים שלפנינו

פעילות זו מורכבת מאוסף שאלות הדנות במידע שבעזרתו ניתן לסרטוט גרף של פונקציה באופן המשקף את תכונותיה העיקריות, לעומת מידע לא מספק לסרטוט גרף.

1. ידוע כי לפונקציה נקודת מינימום $A(3,5)$ ונקודת מקסימום $B(1,9)$. כמו כן, ידוע כי ניתן לסרטוט את גרף הפונקציה במשיכת קולמוס אחת.

האם הנתונים מאפשרים לקבוע את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

אם כן – מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

אם לא – סרטוט גרפים של שתי פונקציות המתאימות לנתונים, ואשר תחומי העלייה והירידה של האחת שונים מתחומי העלייה והירידה של השנייה.

2. האם תשובתכם לשאלה 1 תשתנה אם יתווסף המידע שהנקודות A ו- B הן נקודות הקיצון היחידות של הפונקציה? הסבירו.

3. ידוע כי לפונקציה f נקודת קיצון אחת $A(3,5)$ והנקודה $B(-1,9)$ נמצאת על גרף הפונקציה. כמו כן ידוע כי הפונקציה מוגדרת בכל ציר המספרים, וניתן לסרטוט את הגרף שלה במשיכת קולמוס אחת.

השלימו "נכון", "לא נכון", או "לא ניתן לדעת מהנתונים":

א. הנקודה $A(3,5)$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה.

ב. הנקודה $C(2,4)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

ג. הנקודה $D(2,6)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

ד. הנקודה $E(0,9)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

ה. הנקודה $F(-2,5)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

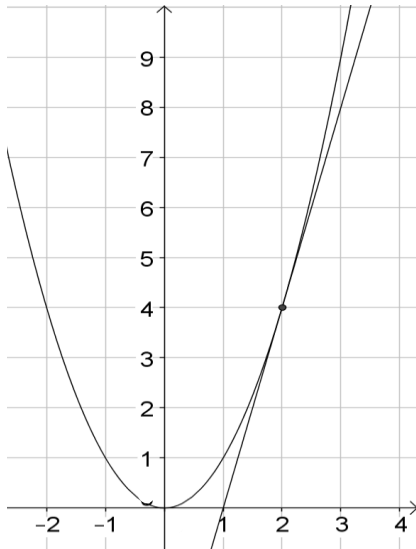
ו. הפונקציה יורדת בכל התחום.

ז. הפונקציה f יורדת כאשר $x < 3$ ועולה כאשר $x > 3$.

ח. לפונקציה f יש שתי נקודות חיתוך עם הצירים.

פעילות 3: פעילות מקדימה להגדרת הנגזרת בנקודה - מציאת שיפוע המשיק ל- $f(x) = x^2$ בנקודה $(2, 4)$ ⁵

פעילות זו היא פעילות מקדימה לקראת הגדרת מושג הנגזרת של פונקציה בנקודה. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ (איור 34). אנו רוצים לחשב את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת. ניקח לדוגמה את הנקודה $(2, 4)$.



איור 34

נעביר משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^2$ בנקודה $(2, 4)$ ונרצה למצוא את שיפוע המשיק.

על מנת למצוא שיפוע של ישר אנו זקוקים לשתי נקודות, אך ידועה לנו רק נקודה אחת: $(2, 4)$.

לכן ננסה למצוא קירוב.

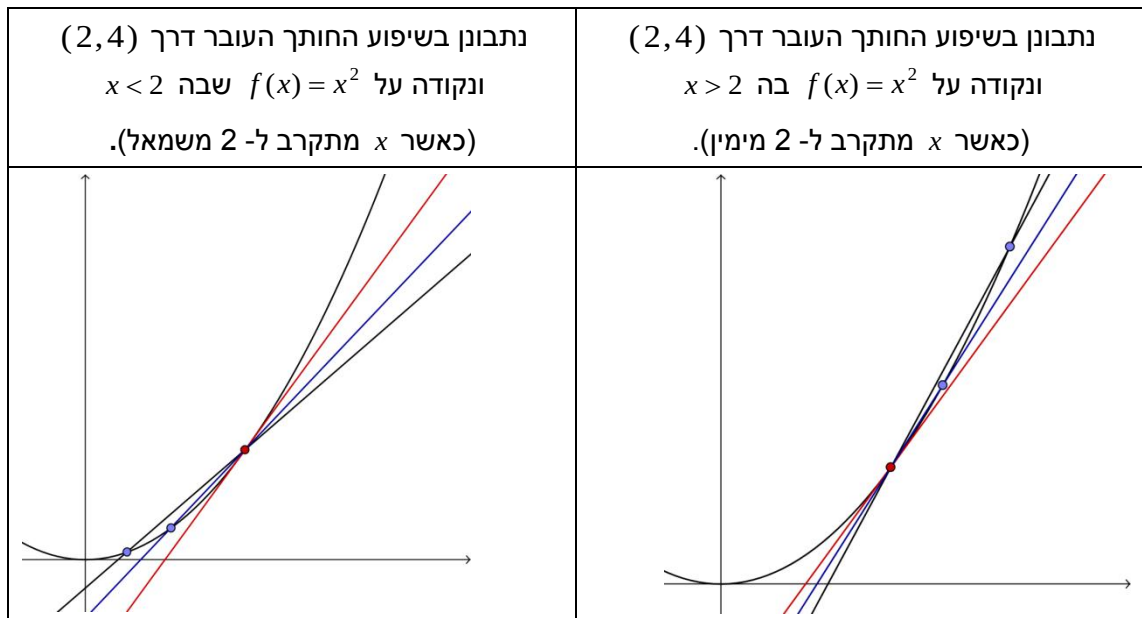
במקום משיק, נסרטט ישר החותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות: $(2, 4)$ ונקודה נוספת, הקרובה אליה: (x, x^2) .

$$\text{נחשב את שיפוע החותך לפי: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

(1) כיצד נבחר נקודה נוספת (x, x^2) ?

הנקודה השנייה יכולה להיות נקודה מימין או משמאל ל- $(2, 4)$. לכן

נבדוק את שני המקרים.



טבלה 5

בשני הסרטוטים המשיק מסומן באדום. ככל שהנקודה השנייה קרובה ל- $(2, 4)$ כך שיפוע החותך יהיה קרוב יותר לשיפוע המשיק.

⁵ בפעילות זו יש כפילות מסוימת עם המופיע בעמוד 140. כאן הדגש הוא על הצגת הנגזרת לתלמידים.

- נחשב את שיפועי החותכים כאשר x מתקרב ל-2 מימין ומשמאל. תוך כדי כך נאתגר את התלמידים בשאלות:
- כמה קרובה צריכה להיות הנקודה (x, x^2) ל- $(2, 4)$?
 - נחשב את השיפוע כאשר $x = 2.1$.
 - האם נוכל להתקרב יותר לנקודה $(2, 4)$?
 - האם נוכל למצוא נקודה עוד יותר קרובה?
- כשהיו בידינו שיפועי מיתרים העוברים בנקודות בהן ערכי x הולכים ומתקרבים ל-2, נארגן את התוצאות בטבלה, אותה יוכלו התלמידים להשלים בעצמם.

x	1.8	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.2
שיפוע החותך $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$					שיפוע המשיק				

טבלה 6

- החישוב של שיפוע החותך עבור מספר רב של נקודות עלול להיות מייגע. ניתן להקל על התלמידים בכמה דרכים:
- לחלק את הכיתה לקבוצות ולתת לכל קבוצה למלא רק חלק מהערכים בטבלה, למשל, לתת לקבוצה אחת למלא טבלה שבה x מתקרב ל-2 ימין, ולקבוצה השנייה למלא טבלה שבה x מתקרב ל-2 משמאל.
 - לאחר התנסות קצרה ניתן לתת לתלמידים טבלאות מלאות למחצה, כמו בדוגמה למטה. טבלאות אלה בנויות באופן הדרגתי כך שהתלמיד צריך למלא בכל יותר פרטים.

שתי טבלאות, מלאות למחצה, המתאימות לכל אחד מהמקרים.

x מתקרב ל-2 משמאל		
נקודה נוספת	נקודת ההשקה	שיפוע החותך
$(1.8, 3.24)$	$(2, 4)$	$\frac{4 - 3.24}{2 - 1.8} = 3.8$
$(1.9, 1.9^2)$	$(2, 4)$	$\frac{4 - 1.9^2}{2 - 1.9} = 3.9$
$(1.99, __)$	$(2, 4)$	$\frac{4 - __}{2 - __} = 3.99$
$(1.999, __)$	$(2, 4)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

טבלה 8

x מתקרב ל-2 מימין		
נקודת ההשקה	נקודה נוספת	שיפוע החותך
$(2, 4)$	$(2.2, 4.84)$	$\frac{4.84 - 4}{2.2 - 2} = 4.2$
$(2, 4)$	$(2.1, 2.1^2)$	$\frac{2.1^2 - 4}{2.1 - 2} = 4.1$
$(2, 4)$	$(2.01, __)$	$\frac{-4}{-2} = 4.01$
$(2, 4)$	$(2.001, __)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

טבלה 7

- הטבלה מראה את התקרבות שיפועי המיתרים ל-4, ולכן מאפשרת לקבל תחושה ששיפוע המשיק הוא 4. בכיתות שהידע המתמטי של התלמידים מאפשר זאת נוכל לערוך גם חישוב כללי.

הצעה א

בעמוד 141 הראינו דרך למציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה באמצעות החישוב. ניתן להציג זאת גם בכיתה.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 4}{(2+h) - 2} = \frac{(4+4h+h^2) - 4}{(2+h) - 2} = \frac{4h+h^2}{h} = 4+h$$

כאשר הנקודה הנוספת קרובה מאוד ל- $(2, 4)$ שיפוע המשיק קרוב מאוד ל- 4.

עד כמה קרוב?

חשוב להעלות את השאלה בכיתה כדי להמחיש שהתשובה לשאלה עד כמה שיפוע המשיק קרוב ל- 4, תלויה אך ורק בנקודה הנוספת ובמידת הקרבה שלה לנקודה $(2, 4)$.

הצעה ב

נתונה נקודה $(2, 4)$ ונקודה נוספת (x, x^2) על $f(x) = x^2$. נוכל להוסיף לטבלה שורה נוספת עבור הנקודה (x, x^2) .

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{שיפוע החותך דרך שתי נקודות אלה הוא:}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x-2} = x+2 \quad \text{נפתח את הביטוי ונקבל:}$$

הצמצום בגורם $(x-2)$ אפשרי כי $x \neq 2$.

אחרי שנגיע למסקנה ששיפוע המשיק הוא $m = x + 2$, נוכל לשאול סדרת שאלות המדגישות שאנחנו יכולים להתקרב אל השיפוע $m = 4$ **כרצוננו** על-ידי בחירת נקודה מספיק קרובה.

סדרת השאלות מתאימה לשתי הדרכים בהן ניתן להציג את שיפוע המשיק.

- מצאנו שהשיפוע בין $(2, 4)$ לבין $(2.001, __)$ הוא 4.001. האם אפשר לקבל שיפוע יותר קרוב ל- 4 מאשר 4.001?

- איזו נקודה עלינו לבחור לשם כך?

- האם אפשר למצוא נקודה כך שהשיפוע יהיה עוד יותר קרוב ל- 4?

- עד כמה יכול השיפוע להיות קרוב ל- 4? האם קיימת על כך מגבלה כלשהי?

כיוון שאנחנו יודעים ששיפוע המשיק ל- $f(x) = x^2$ בנקודה $(2, 4)$ הוא $m = x + 2$, נסיק שככל ש- x יהיה יותר קרוב ל- 2 כך השיפוע יהיה יותר קרוב ל- 4.

כיוון שאנחנו יכולים להתקרב לשיפוע 4 **כרצוננו** על-ידי **בחירת נקודות מספיק קרובות** לנקודת ההשקה, אנחנו טוענים ששיפוע המשיק הוא 4 (ולא "כמעט 4").

דיון מסוג זה אמנם לא נעשה בשפת הגבולות, אך הוא נוגע במהות של מושג הגבול.

הערות דידקטיות

א. לכל אחת משתי ההצעות יתרונות דידקטיים שונים.

- הצעה ב פשוטה יותר. הן מבחינת הסימונים וכיוון שאינה משתמשת במשתנה נוסף h . אולם צורת כתיבה זו מתאימה לפונקציה ריבועית. היא יכולה להתאים גם לפונקציה ממעלה שלישית, אם התלמידים שולטים בפירוק לגורמים של תבנית ממעלה שלישית. צורת כתיבה זו אינה ניתנת להכללה בבית ספר לכתיבת פונקציות אחרות.

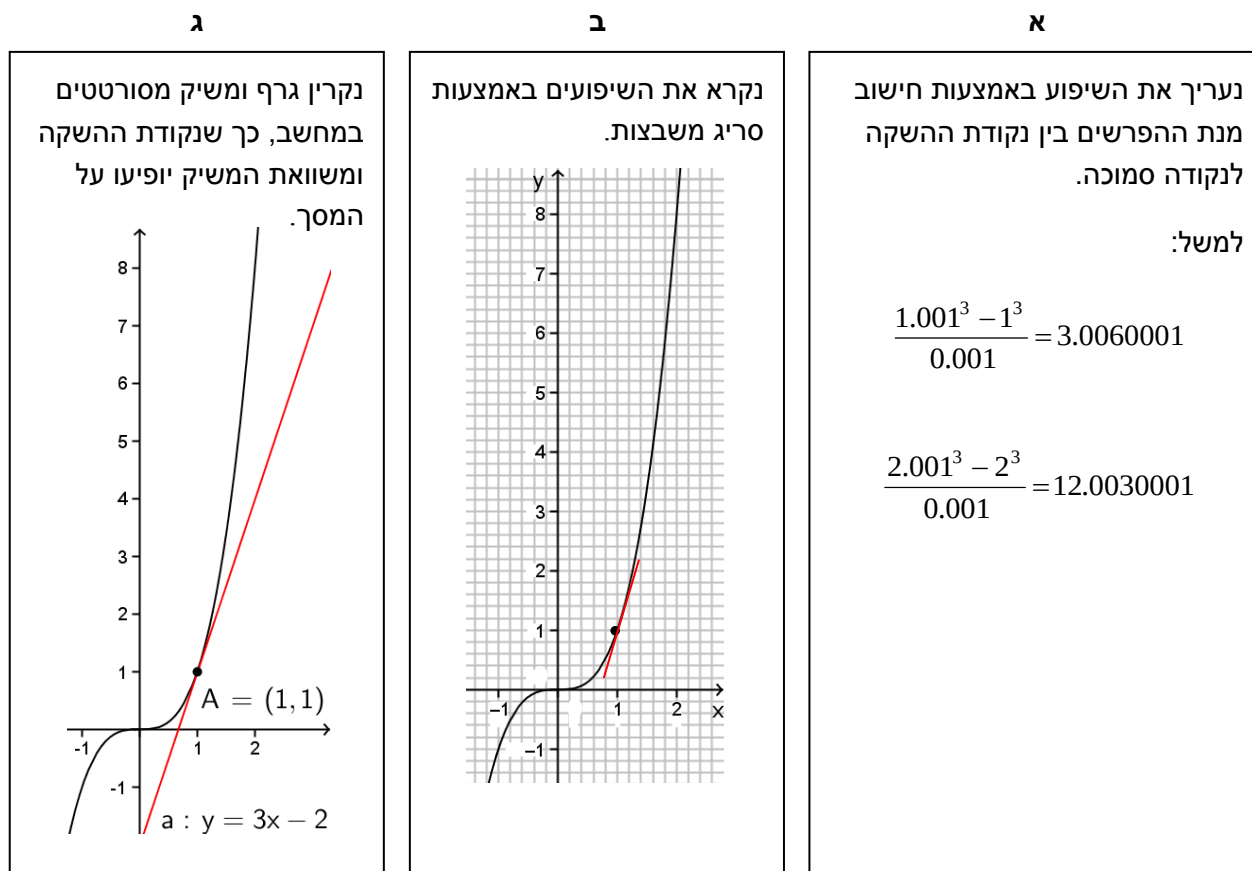
- הצעה א מורכבת יותר מבחינת צורת הכתיבה, אך היא ניתנת להכללה לפונקציות אחרות (נדגים זאת בהמשך). כמו כן, כבר בשלב הראשון עם פונקציה ריבועית, הביטוי המתקבל כשיפוע המשיק הוא $4 + h$ (לעומת $x + 2$ בהצעה ב), והעובדה שבנקודה $(2, 4)$ השיפוע הוא 4 יותר נראית לעין.

ב. את סדרת השאלות המדגישות שאנחנו יכולים להתקרב אל השיפוע $m = 4$ כרצוננו, מתאים לעשות בכל מקרה, ללא קשר בבחירת ייצוג השיפוע.

פעילות 4: נגזרת הפונקציה $f(x) = x^3$

מהנגזרת בנקודה אל הפונקציה הנגזרת

נמצא תחילה את נגזרת הפונקציה בנקודות אחדות. נוכל לעשות זאת באחת מן הדרכים הבאות (איור 35):



איור 35

נקודת השקה	שיפוע המשיק	שיפוע המשיק ככפולות של 3
$A(1,1)$	3	$3 \cdot 1$
$B(-1,-1)$	-3	$3 \cdot (-1)$
$C(2,8)$	12	$3 \cdot 4$
$D(-2,-8)$	-12	$3 \cdot (-4)$
$(0,0)$	0	$3 \cdot 0$
$(3,27)$	27	$3 \cdot 9$

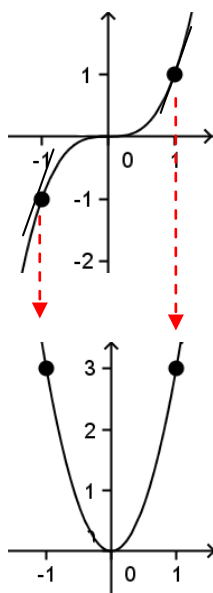
טבלה 9

נרכז את התוצאות בטבלה (טבלה 9) ונחפש חוקיות. ההשערה השכיחה ביותר היא $3x$. קל להבחין שכל המספרים בטבלה הם כפולות של 3.

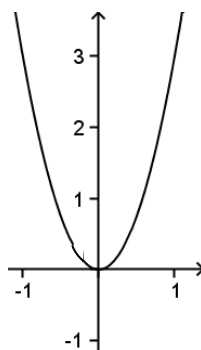
אחרי שהתלמידים מבחינים שכל המספרים בטבלה הם כפולות של 3, ניתן להוסיף לטבלה עמודה שבה השיפועים רשומים ככפולות אלה. אחרי שעולה ההשערה $f'(x) = 3x^2$ ניתן, בהתאם לאוכלוסיית התלמידים בכיתה, לאשר אותה, לבדוק נקודות נוספות ו/או להוכיחה. (ההוכחה מופיעה בעמוד 155)

על הקשר בין הפונקציה $y = x^3$ לנגזרתה

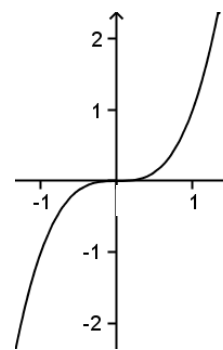
- א. באיור 36 מסורטט גרף הפונקציה $f(x) = x^3$. רשמו מתחתיו כמה שיותר תכונות של גרף הפונקציה.
- ב. באיור 37 מסורטט גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x) = 3x^2$. רשמו מתחתיו כמה שיותר תכונות של הגרף.
- ג. מתחו קווים בין תכונות של הנגזרת $f'(x) = 3x^2$ לבין תכונות הפונקציה $f(x) = x^3$ המתאימות להן.
- ד. הסבירו כל אחד מן הקשרים שמצאתם.



איור 38



איור 37



איור 36

נקודות שכדאי להעלות בדיון:

- שיפועי גרף הפונקציה חיוביים בכל נקודה פרט לראשית הצירים שם השיפוע שווה לאפס. הנגזרת חיובית בכל נקודה מלבד בראשית הצירים, וזאת למרות שהפונקציה עולה בכל התחום.
- ככל שמתרחקים מציר ה- y גרף הפונקציה תלול יותר – ככל שמתרחקים מציר ה- y ערכי הנגזרת גדולים יותר.
- הפונקציה $f(x) = x^3$ סימטרית ביחס לראשית הצירים. בנקודות סימטריות יש לגרף הפונקציה אותו שיפוע (איור 38).
- הפונקציה $y = 3x^2$ סימטרית ביחס לציר ה- y . בנקודות סימטריות יש לנגזרת הפונקציה אותו ערך. למשל, בנקודות $(1,1)$ ו- $(-1,-1)$ לגרף הפונקציה אותו שיפוע, 3. אכן $f'(1) = 3$ וגם $f'(-1) = 3$.

וכדאי גם להדגיש:

- הקשרים בין פונקציה לנגזרתה קשורים לשיפועי הפונקציה. לכן אין טעם לחפש תכונות של הנגזרת הקשורות לכך שהפונקציה עוברת בראשית הצירים, או לתחומי החיוביות והשליליות שלה.

פעילות 5: היפוך השאלה – תרגול עם ערך מוסף

נוכל לבקש מהתלמידים למצוא פונקציות על-פי נגזרותיהן כבר בראשית ההיכרות עם הפונקציה הנגזרת.

– הציעו פונקציה שהנגזרת שלה היא $y' = 2x$.

– ועוד אחת ...

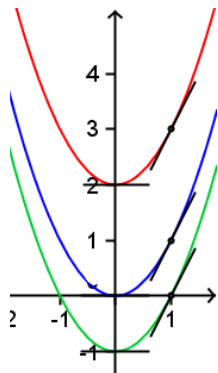
– ועוד אחת ...

– האם אפשר לתת לכל הפונקציות שהצעתם "שם משפחה"?

וגם לשאול:

– כיצד ייראו הגרפים של כל הפונקציות אם נסרטט אותם במערכת צירים אחת?

(איור 39)



איור 39

מה הרווחנו?

שמנו לב שלכל הפונקציות מהמשפחה $y = x^2 + m$ יש אותה פונקציה נגזרת.

שמנו לב שפעולת הזזה שומרת על שיפוע, במובן זה שהמשיקים לפונקציות בנקודות עם

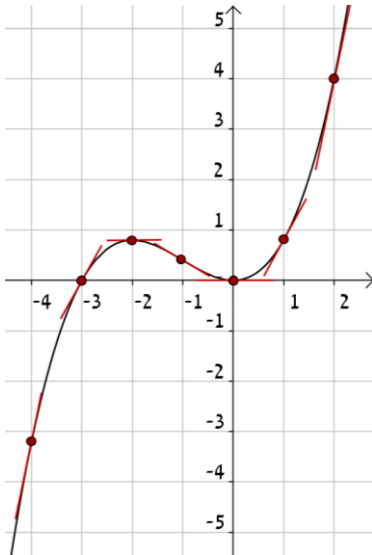
אותו שיעור x מקבילים זה לזה, ושיפועיהם שווים זה לזה.

קשרנו בין המושגים נגזרת, שיפוע משיק, פעולת ההזזה, משפחה של פונקציות.

זרענו זרעים למושג פונקציה קדומה.

פעילות 6: משיפועי המשיקים אל גרף הפונקציה הנגזרת

נתון גרף של פונקציה $f(x)$. לפונקציה זו העבירו משיקים ב-7 נקודות. קטעי המשיקים הנ"ל מופיעים בסרטוט. להלן משוואות המשיקים:



איור 40

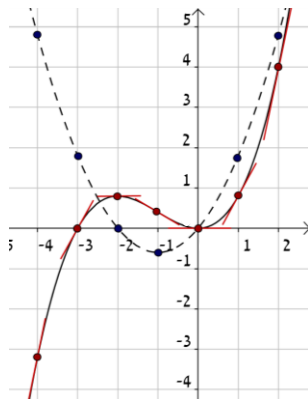
$$\begin{array}{ll} y = 0 & (2) \quad y = 0.8 \quad (1) \\ y = 4.8x + 16 & (4) \quad y = 4.8x - 5.6 \quad (3) \\ y = 1.8x - 1 & (6) \quad y = -0.6x - 0.2 \quad (5) \\ & y = 1.8x + 5.4 \quad (7) \end{array}$$

א. התאימו לכל אחד מהמשיקים את משוואתו.
ב. השלימו את הטבלה שלפניכם:

x	y'
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

טבלה 10

ג. על-פי הטבלה סרטטו את גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ באותה מערכת צירים של $f(x)$.



איור 41

פתרון

x	y'	משוואת המשיק
-4	4.8	$y = 4.8x + 16$
-3	1.8	$y = 1.8x + 5.4$
-2	0	$y = 0.8$
-1	-0.6	$y = -0.6x - 0.2$
0	0	$y = 0$
1	1.8	$y = 1.8x - 1$
2	4.8	$y = 4.8x - 5.6$

טבלה 11

הערות

- מטרת הפעילות היא לחזק את הבנת הקשר בין גרף של פונקציה לגרף הנגזרת על-ידי בניית גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ כאשר הביטוי האנליטי של $f(x)$ אינו נתון. מאחר והביטוי של הפונקציה $f(x)$ אינו ידוע לא ניתן להשתמש בחוקי גזירה לסרטוט הנגזרת.
- בפרט, הפעילות נועדה לחדד את הבנת המשמעות של ערך הנגזרת בנקודה, כשיפוע המשיק לגרף של הפונקציה בנקודה, ואת המשמעות של גרף הפונקציה הנגזרת כאוסף אינסופי של זוגות סדורים, בהם לכל x מתאים שיפוע המשיק לגרף של הפונקציה המקורית $f(x)$ ב- x .
- בסעיף א התלמידים מתבקשים להתאים לקטעי המשיקים את משוואותיהם. כיוון שבסרטוט נראים רק קטעים של המשיקים, ואי-אפשר לזהות את משוואת המשיק על-פי האיבר החופשי, התלמידים חייבים לזהות את שיפוע המשיק. בנוסף, עליהם להבחין לאיזה מבין שני משיקים מקבילים שייכת משוואת המשיק. למשל, המשיקים ב- $x=1$ ו- $x=3$ נראים מקבילים ויכולים להתאים למשוואות $y=1.8x-1$ ו- $y=1.8x+5.4$. על מנת להתאים למשיק את משוואתו יש צורך להביא בחשבון גם את נקודת החיתוך של כל אחד מהמשיקים עם ציר ה- y .
- חיבור הנקודות בקו ביד חופשית, חושף את גרף הפונקציה הנגזרת שהוא פרבולה.
- ניתן לשאול סדרת שאלות על הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת עוד לפני סרטוט הגרף, למשל:
 - באילו נקודות יחתוך גרף הפונקציה הנגזרת את ציר ה- x ?
 - באילו נקודות יהיה גרף הפונקציה הנגזרת מעל לציר ה- x ? מתחת לציר ה- x ?
 - היכן יהיה גרף הפונקציה הנגזרת יותר תלול: כאשר $x=1$ או כאשר $x=2$?
 - גרף הפונקציה הנגזרת נראה סימטרי. כיצד זה מתבטא בטבלה?
 - גרף הפונקציה $f(x)$ נראה יותר תלול בנקודה $x=-4$ ויותר מתון בנקודה $x=-3$. כיצד זה מתבטא בטבלת השיפועים? כיצד זה מתבטא בגרף הפונקציה הנגזרת שסרטטתם?
- אפשר להתייחס לעובדה שסרטטנו את גרף הנגזרת על-פי מספר מצומצם של נקודות. כיצד אנחנו יודעים שגרף הפונקציה הנגזרת אכן נראה כך? איך יודעים שבין הנקודות שסימנו אין נקודות מקסימום או מינימום נוספות? שאלה זו מחייבת להבחין היכן השיפועים הולכים וגדלים והיכן הם הולכים וקטנים.

הרחבות אפשריות לפעילות

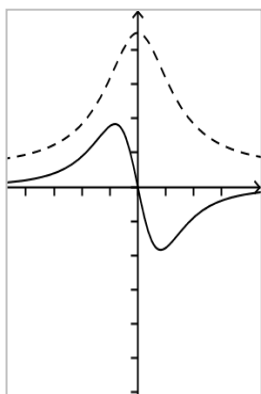
- אם התלמידים מנסים בעבודה עם פרמטרים, ניתן לבקש מהתלמידים לשחזר את הביטוי האלגברי של הפונקציה, אם ידוע שהפונקציה היא פולינום ממעלה שלישית.
- על-פי הסרטוט של הפונקציה ניתן למצוא את הייצוג הפרמטרי שלה: $f(x) = ax^2(x+3)$. משוואות המשיקים מספקות מידע מספיק למציאת ערך הפרמטר: $a = 0.2$.
- ניתן לתת לתלמידים פעילויות דומות, כאשר גרף הפונקציה קשה יותר לזיהוי. במקרה זה יש צורך לתת די נקודות עם קטעי משיקים, על מנת להבטיח שגרף הנגזרת יהיה מהימן יחסית.
- במקום לתת את משוואות המשיקים ניתן לתת לתלמידים לזהות את שיפועי המשיקים מתוך הגרף. במקרה זה כדאי לסרטט את הגרף על סריג צפוף יותר.

מי הפונקציה, מי הנגזרת?

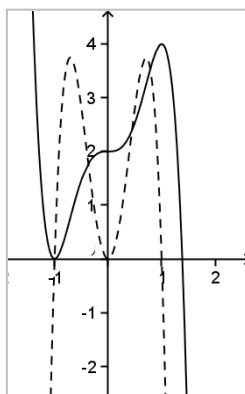
בכל אחד מהאיורים 42 - 45 מסורטטות פונקציה ונגזרת.

א. זהו מי הפונקציה ומי הנגזרת, ונמקו את קביעתכם.

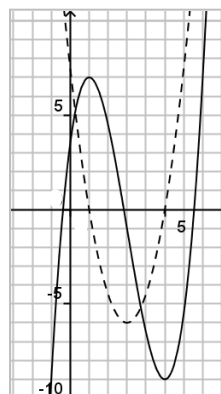
ב. ציינו קשיים אחדים שיכולים להתעורר אצל תלמידים שמקבלים את התרגיל.



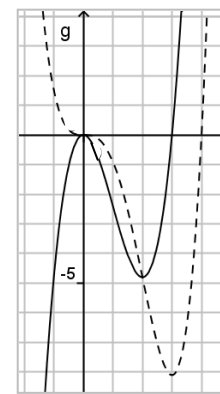
איור 45



איור 44



איור 43



איור 42

פעילויות דומות ניתן לשלב גם במהלך ההוראה של פרקים נוספים.

פעילות 7: משחק "דומינו" להתאמה בין פונקציות לנגזרות⁶



הנחיות

בידיכם "קלפי דומינו". בכל קלף שני גרפים: גרף אחד של נגזרת של פונקציה כלשהי, וגרף שני של פונקציה. עליכם ליצור "שרשרת" של קלפים על-ידי התאמה בין גרף של פונקציה f מקלף אחד לגרף אפשרי של נגזרתה f' מקלף אחר.

אם תתאימו ללא טעויות תוכלו לסגור את השרשרת.

שימו לב: קלף אחד צריך להישאר מחוץ לשרשרת. לכן, בסיום ההתאמה בדקו שנית: האם הקלפים שנשארו בלתי משובצים, אכן לא מתאימים במקומות מסוימים בשרשרת, או אולי עליכם להחליף בעזרתם קלפים ששיבצתם בה.

כדאי לצלם את קלפי המשחק בהגדלה כדי שיהיה נוח להבחין בפרטים של הגרפים.

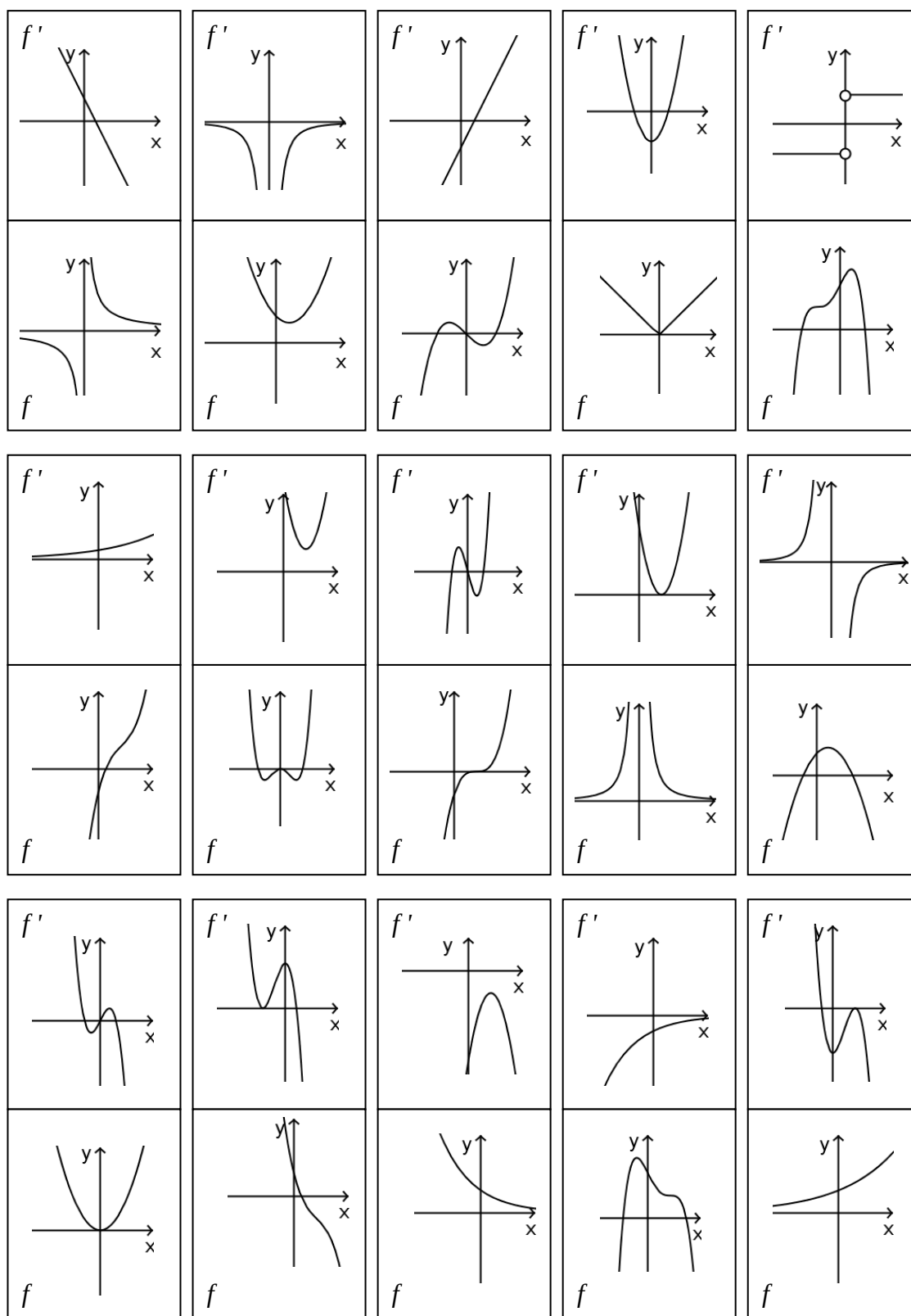
ערכת הקלפים מוצגת באיור 47.

הפתרון מוצג באיור 46.

$(f_6)'$	$(f_5)'$	$(f_4)'$	$(f_3)'$	$(f_2)'$
f_5	f_4	f_3	f_2	f_1
$(f_{11})'$	$(f_{10})'$	$(f_9)'$	$(f_8)'$	$(f_7)'$
f_{10}	f_9	f_8	f_7	f_6
	$(f_1)'$	$(f_{14})'$	$(f_{13})'$	$(f_{12})'$
	f_{14}	f_{13}	f_{12}	f_{11}

איור 46

⁶ מעובד מתוך דוד (2007).



איור 47: ערכת קלפים למשחק דומינו זיהוי פונקציות ונגזרותיהן

הנגזרת כקצב שינוי

לסיום, נציג משמעות נוספת, רבת יישומים, של הנגזרת. נפתח בדוגמה:

פונקציית המהירות כנגזרת של פונקציית הדרך

רכב חייזרים נוסע לאורך מסילה. הפונקציה המתאימה לזמן הנסיעה x בשניות, את הדרך שעוברים החייזרים $f(x)$, היא $f(x) = 2x^2$.

אין קושי למצוא את מהירות הנסיעה הממוצעת של רכב החייזרים ב-5 השניות הראשונות לנסיעתם: במשך 5 שניות החייזרים נסעו 50 מטרים, ולכן מהירותם הממוצעת היא 10 מטרים בשנייה.

נוכל גם לחשב את המהירות הממוצעת בפרק זמן קצרצר:

נחשב את המהירות הממוצעת באלפית השנייה שלאחר השנייה החמישית.

הדרך שעברו החייזרים: $f(5.001) - f(5) = 50.020002 - 50 = 0.020002$

המהירות הממוצעת בפרק זמן זה היא $\frac{0.020002}{0.001} = 20.002$, והיא מיוצגת על-ידי שיפוע הישר שבאיור 49.

כיצד נחשב את המהירות הרגעית של רכב החייזרים?

נוכל לחשב את המהירות בפרקי זמן קצרים עוד יותר, או להיעזר בחישוב גבול.

במשך $5+h$ שניות, רכב החייזרים נוסע $f(5+h) = 2(5+h)^2$ מטרים.

המהירות הרגעית בזמן $x=5$ היא הגבול של המהירות הממוצעת בפרק הזמן שבין 5 שניות לבין $5+h$ שניות, מתחילת הנסיעה כאשר $h \rightarrow 0$:

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{2(5+h)^2 - 2 \cdot 5^2}{h} = \dots = 20 + 2h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 20.$$

התהליך שעשינו הוא בדיוק חישוב הנגזרת של הפונקציה $f(x) = 2x^2$ כאשר $x=5$.

נוכל להכליל:

אם f היא פונקציה המתארת את הדרך שעובר גוף מתחילת התנועה ועד לנקודת זמן x , אז ניתן לייצג את המהירות הממוצעת בפרק הזמן שבין $x=x_0$ לבין $x=x_0+h$ כ-

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

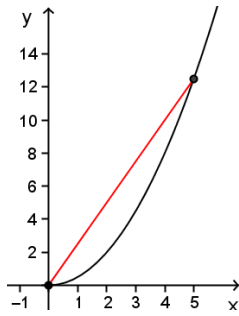
המהירות הרגעית ב- x_0 היא:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

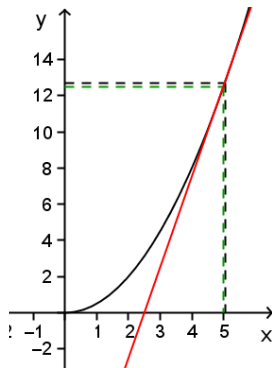
הגבול שחישבנו זה עתה הוא בדיוק הנגזרת של הפונקציה f בנקודה x_0 .

הפונקציה הנגזרת של פונקציית הדרך היא פונקציית המהירות הרגעית.

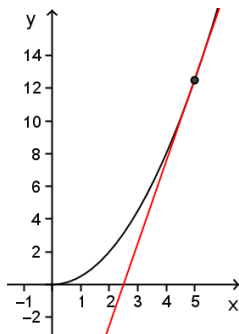
מד המהירות במכונית מראה את המהירות הרגעית.



איור 48



איור 49



איור 50

הגדרה

אם $y = f(x)$, אז היחס $\frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h}$ נקרא קצב השינוי הממוצע של y ביחס ל- x , בקטע $[x_1, x_2]$ שבין x_0 ל- $x_0 + h$.

הפירוש הגרפי של קצב השינוי הוא שיפוע הישר העובר דרך הנקודות $(x_0, f(x_0))$ ו- $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

הגדרה

הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, שהוא נגזרת הפונקציה $y = f(x)$ ב- x_0 , הוא קצב השינוי הנקודתי של הפונקציה בנקודה זו.

הפירוש הגרפי של קצב השינוי בנקודה הוא שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו.

מהירות ממוצעת מדגימה קצב שינוי ממוצע, במקרה בו הפונקציה מתאימה לזמן הנסיעה את אורך הדרך. במקרה זה הנגזרת מייצגת את המהירות הרגעית $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

אם הפונקציה $y = f(x)$ מתארת גידול של אוכלוסיית חיידיקים ביחס לזמן, אז הביטוי $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ מתאר את קצב השינוי הממוצע בגודלה של אוכלוסיית החיידיקים בפרק הזמן שבין $x = x_1$ לבין $x = x_2$, והביטוי $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ מתאר את קצב השינוי של אוכלוסיית החיידיקים ברגע מסוים $x = x_0$.

מה מתאר הביטוי $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ אם הפונקציה $y = f(x)$ מתאימה לזמן המילוי של בריכת מים את כמות המים בבריכה? מה מתאר הביטוי $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ במקרה זה?