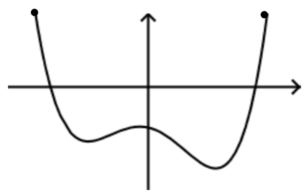
רציפות של פונקציות

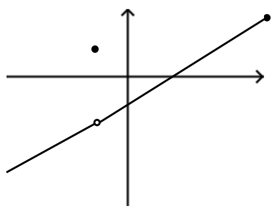
מבוא

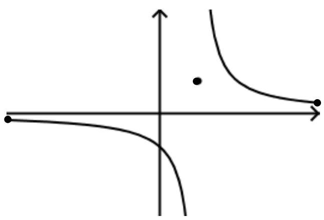
למרות שנושא הרציפות אינו מטופל באופן ישיר בלימודי האנליזה בבית הספר התיכון, הוא נמצא ברקע וקשור למושגים רבים וחשובים. תכונות של פונקציות רציפות קשורות באופן ישיר לכל הנושאים המטופלים בבית הספר במסגרת לימודי האנליזה. הפונקציות בהן עוסקים בלימודי האנליזה הן פונקציות רציפות. ההצדקה של חוקי הנגזרת, הקיום של מקסימום מוחלט ומינימום מוחלט לפונקציה רציפה בקטע סגור, והעובדה שנקודת קיצון יחידה בתחום קשיר היא נקודת קיצון מוחלט שלה בתחום זה, הן מעט מן הדוגמאות לשימוש סמוי בתכונות של פונקציות רציפות. הפרק יספק דוגמאות נוספות לתכונות של פונקציות רציפות ולתפקידן בהוראת האנליזה בבית הספר.

הדימוי החזק ביותר של פונקציות רציפות קשור ליכולת לסרטט גרף של פונקציה במשיכת קולמוס אחת. פונקציות שניתן לסרטט את הגרף שלהן במשיכת קולמוס אחת הן, אכן, פונקציות רציפות. כאשר הפונקציה מוגדרת בתחום קשיר (קטע, קרן, או ישר המספרים כולו), אי-היכולת לסרטט את הגרף של פונקציה במשיכת קולמוס אחת אכן, בדרך כלל, מעידה על אי-רציפות של הפונקציה[1].

בסרטוט למטה מופיעים גרפים של שלוש פונקציות המוגדרות בתחום D (איורים 1-3). הגרפים מציגים את הפונקציות בכל תחום הגדרתן. בעוד שאת הגרף הימני ניתן לסרטט במשיכת קולמוס אחת, שני הגרפים האחרים הנקטעים באופן כלשהו ואינם מאפשרים סרטוט במשיכת קולמוס אחת, מדגימים נקודות אי-רציפות של פונקציה.

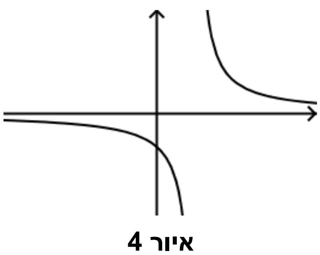

איור 1


איור 2


איור 3

יחד עם זאת הדימוי הזה אינו מתאים כאשר יש לפונקציה נקודות אי-הגדרה.

למשל, הפונקציה $y=\frac{1}{x-1}$ רציפה בכל תחום הגדרתה למרות שלא ניתן לסרטט אותה במשיכת קולמוס אחת. נקודת האי-רציפות של הפונקציה, $x=1$, איננה חלק מתחום הפונקציה (איור 4).

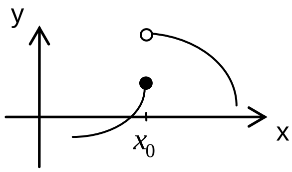

איור 4

הפרק מחדד את ההבחנות בין המושגים השונים הקשורים למושג הרציפות של פונקציה, ומספק דוגמאות לסוגים שונים של נקודות אי-רציפות. הבחנה חשובה שהפרק מבהיר ומספק לה דוגמאות היא ההבחנה בין תחום רציפות לתחום הגדרה.

[1] למעט פונקציות מיוחדות שאינן ניתנות להצגה גרפית שלמה או מוגדרות בתחום שאינו רציף (קשיר).

הגדרת הרציפות ומושגים נלווים

רציפות משמאל של פונקציה בנקודה

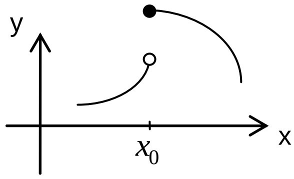


איור 5

אם נתבונן בנקודה $(x_0, f(x_0))$ על גרף הפונקציה f באיור 5, נראה כי כשמתקרבים ל- x_0 משמאל, ניתן לסרטט את הגרף, כולל הנקודה $(x_0, f(x_0))$ במשיכת קולמוס אחת. במצב זה אנחנו אומרים שהפונקציה f רציפה משמאל בנקודה $x = x_0$.

הגדרה: הפונקציה $f(x)$ היא רציפה משמאל בנקודה $x = x_0$ אם $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

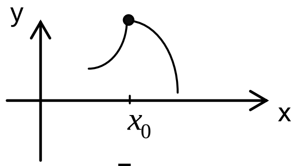
רציפות מימין של פונקציה בנקודה



איור 6

אם נתבונן בנקודה $(x_0, f(x_0))$ שעל גרף הפונקציה f באיור 6, נראה כי כשמתקרבים ל- x_0 מימין, ניתן לסרטט את הגרף במשיכת קולמוס אחת. הנקודה $(x_0, f(x_0))$ שייכת לאותו חלק של הגרף אשר ניתן לסרטט (מימין) במשיכת קולמוס אחת. במצב זה אנחנו אומרים שהפונקציה f רציפה מימין בנקודה $x = x_0$.

הגדרה: הפונקציה $f(x)$ רציפה מימין בנקודה $x = x_0$ אם $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.



איור 7

רציפות של פונקציה בנקודה

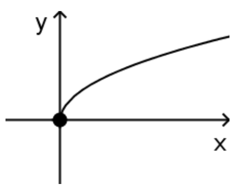
אם נתבונן בנקודה $(x_0, f(x_0))$ שעל גרף הפונקציה f באיור 7, נראה כי ניתן לסרטט את גרף הפונקציה, בסביבת הנקודה x_0, במשיכת קולמוס אחת.

הגדרה: הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x = x_0$ אם $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

נפרש את ההגדרה תוך הבחנה בין מקרים שונים של מיקום הנקודה $x = x_0$ בתחום הפונקציה:

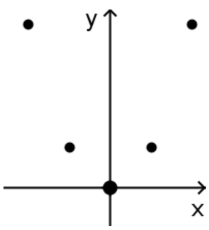
- כאשר מדובר בנקודה פנימית של התחום, משמעות הדרישה $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ היא, שהפונקציה רציפה בנקודה זו מימין ומשמאל, כלומר, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

  בנקודת קצה שמאלית משמעות הדרישה $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ היא שהגבול של הפונקציה $f(x)$ בקצה השמאלי של תחומה מוגדר כגבול חד-צדדי מימין. למשל, הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ רציפה בנקודה $x = 0$ הנמצאת בקצה השמאלי של תחום הגדרתה, כי: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$ (איור 8).



איור 8

- באופן דומה, בנקודת קצה ימנית משמעות הדרישה $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ היא, שהגבול של הפונקציה $f(x)$ בקצה הימני של תחומה מוגדר כגבול חד-צדדי משמאל.



איור 9

- נקודות מבודדות על גרף של פונקציה נחשבות לנקודות בהן הפונקציה רציפה. למשל, הפונקציה $y=x^2$ המוגדרת בקבוצת המספרים השלמים, נחשבת רציפה בכל נקודה, למרות שגרף הפונקציה בנוי מנקודות מבודדות. הסיבה לכך נעוצה בהגדרת הגבול בנקודות מבודדות. בנקודות אלו גבול הפונקציה בנקודה נחשב כערך הפונקציה בנקודה, כלומר, $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$ (איור 9).

הערות להגדרת הרציפות

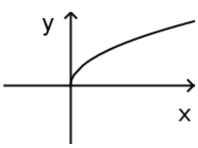
- הגדרת הרציפות בנקודה: $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$ מכילה את ההנחה כי $f\left(x\right)$ מוגדרת בנקודה $x=x_0$, פונקציה לא יכולה להיות רציפה בנקודה בה היא אינה מוגדרת.
- חשוב לשים לב: פונקציה שהגרף שלה ניתן לסרטוט במשיכת קולמוס אחת היא פונקציה רציפה, אולם ההיפך לא תמיד נכון. לא תמיד ניתן לסרטט פונקציה רציפה במשיכת קולמוס אחת. דוגמאות לכך יובאו בהמשך.
- הסרטוטים המובאים במקביל להגדרות הרציפות דלעיל הן למטרת ההמחשה בלבד. פונקציה יכולה להיות רציפה בנקודה, על-פי ההגדרה, עם תמונה גרפית הרבה יותר מסובכת מזאת שמלווה את ההגדרה, או אף ללא אפשרות להציג תמונה גרפית כלל (ר' עמוד 112).

רציפות של פונקציה בתחום

הגדרה: פונקציה $f\left(x\right)$ נקראת רציפה בתחום G אם ורק אם היא רציפה בכל נקודה ששייכת לתחום זה.

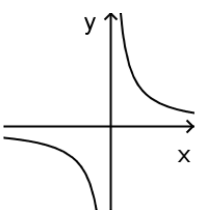
מהגדרת רציפות פונקציה בתחום נובע באופן מידי, כי אם פונקציה $f\left(x\right)$ רציפה בתחום G, אזי היא רציפה בכל תחום שמוכל בו.

דוגמאות



איור 10

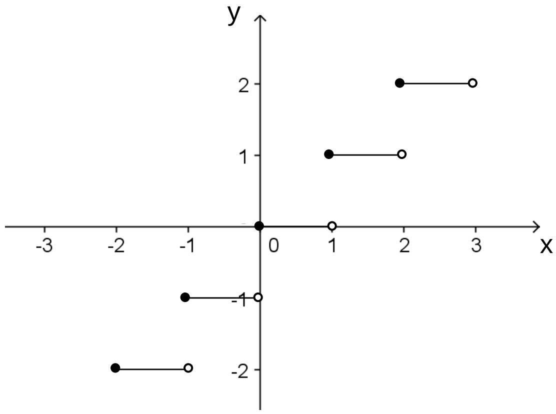
1. הפונקציה $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ מוגדרת בתחום $D=\left[0,\infty\right)$. ורציפה בו ובכל תחום חלקי שלו (איור 10).



איור 11

2. הפונקציה $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ מוגדרת בתחום $D=\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,\infty\right)$, והיא רציפה בתחום זה, כיוון שהיא רציפה בכל נקודה $x=x_0\neq 0$ (איור 11).
   זו דוגמה לפונקציה שרציפה בכל תחום הגדרתה, ובכל זאת הגרף שלה אינו ניתן לסרטוט במשיכת קולמוס אחת. גרף הפונקציה ניתן לסרטוט במשיכת קולמוס אחת בכל תחום חלקי שאין בו נקודת האי הגדרה $x=0$.

3. פונקציית הערך השלם $f\left(x\right)=\left[x\right]$ מתאימה לכל מספר ממשי x את המספר הקרוב ביותר ל- x, מבין המספרים שאינם גדולים ממנו (איור 12).
($\left[x\right]=n$ כאשר $\left(n=0,\pm1,\pm2,...\right)$ $n\le x<n+1$).
פונקציה זו מוגדרת בתחום $D=\mathbb{R}=\left(-\infty,\infty\right)$
בכל נקודה $x=n$ הפונקציה $f\left(x\right)=\left[x\right]$ רציפה מימין ואינה רציפה משמאל. היות ו- $f\left(x\right)=\left[x\right]$ קבועה בכל קטע פתוח $(n,n+1)$, היא רציפה בקטעים אלה. לכן התחום בו הפונקציה רציפה הוא איחוד הקטעים הפתוחים $\left(n,n+1\right)$ $G=\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}$.



איור 12: $y=\left[x\right]$

תחום זה מתקבל על-ידי סילוק הנקודות השלמות מתחום ההגדרה של הפונקציה.

פונקציית הערך השלם מדגימה פונקציה שמוגדרת בכל ישר המספרים, אך רציפה רק בתחום חלקי שלו.

על תכונות של פונקציות רציפות

הפונקציות בהן עוסקים בלימודי האנליזה בבית הספר הן פונקציות רציפות בתחום הגדרתן. כיוון שרבות מן התכונות של פונקציות רציפות תואמות את האינטואיציה, נוהגים להתייחס אליהן כמובנות מאליהן. בסעיף זה נציג מעט מן התכונות של פונקציות רציפות. חלק מן התכונות דרושות להוכחה של חוקי הנגזרות, ושל המשפטים המתארים את הקשר שבין פונקציות לנגזרותיהן. תכונות אחרות מוצגות כמובנות מאליהן בשעה שמצדיקים בעזרתן פעולות שגרתיות המשמשות לחקירת פונקציות. המטרה של הפרק הזה איננה לתת סקירה מלאה של התכונות של פונקציות רציפות, אלא לשפוך אור על חשיבות הנושא, ולעורר את סקרנות הקוראים להרחיב את ידיעותיהם בנושא, מעבר למוצג בספר זה.

תכונת הקיום של מקסימום מוחלט ומינימום מוחלט בקטע סגור: אם פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז קיימת בתחום זה נקודה (לפעמים יותר מנקודה אחת) שבה הפונקציה מקבלת ערך מינימלי, ונקודה (לפעמים יותר מנקודה אחת) שבה הפונקציה מקבלת ערך מקסימלי (איור 13).

תכונה של נקודת קיצון יחידה של פונקציה רציפה בתחום קשיר: אם פונקציה $f\left(x\right)$ רציפה בתחום קשיר (קטע, קרן, או הישר כולו), ויש לה נקודת קיצון יחידה, אז נקודה זו היא בהכרח נקודה של קיצון מוחלט.


איור 13

דוגמה: לפונקציה $f\left(x\right)=x^2$ בתחום $-\infty<x<\infty$ יש נקודת קיצון מקומי יחידה $x=0$, והקיצון הוא מינימום. הערך של הפונקציה בנקודה זו $f\left(0\right)=0$ הוא מינימום מוחלט של $f\left(x\right)=x^2$ בכל התחום $-\infty<x<\infty$.

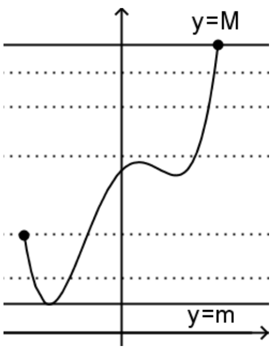
תכונה זו חשובה במיוחד בפתרון בעיות ערך קיצון, בהן עלינו להראות שנקודת הקיצון שמצאנו היא נקודת קיצון מוחלט.

תכונת ערך הביניים: אם פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז היא מקבלת בתחום זה כל ערך שבין הערך המינימלי לערך המקסימלי של הפונקציה. תכונה זו ידועה כמשפט ערך הביניים.

משפט ערך הביניים: תהי $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ויהיו $m=\min\limits_{a\le x\le b} f(x), M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$. אם $m<c<M$, אזי קיים x בתוך הקטע שבו $f(x)=c$.

פירוש גאומטרי

גרף הפונקציה חותך כל ישר $y=c$ כאשר $m\le c\le M$ (איור 14).



איור 14

מסקנה ישירה ממשפט ערך הביניים היא הקיום של נקודת אפס של פונקציה רציפה בכל תחום קשיר שבו היא מחליפה סימן. בפרט, לכל פונקציית פולינום ממעלה אי- זוגית יש לפחות נקודת אפס אחת. שיטות של אנליזה נומרית למציאת נקודות אפס של פונקציות, כגון שיטת החצייה, מתבססות על תכונת ערך הביניים.
אחת הטכניקות הנפוצות לחקירת פונקציות, המוגדרות וגזירות ברציפות (בעלות נגזרת רציפה) בציר המספרים, מבוססת על חלוקת ציר ה- x לקטעים שקובעות נקודות האפס של הנגזרת, ובדיקת סימן הנגזרת בכל קטע שבין נקודות אפס סמוכות של הנגזרת, באמצעות נקודה מייצגת הנבחרת בתוך הקטע באופן שרירותי. הידיעה שסימן הנגזרת נשמר בכל קטע שבין שתי נקודות אפס של הנגזרת מבוססת על משפט ערך הביניים. לו הנגזרת הייתה מחליפה סימן בקטע כזה, הייתה צריכה להיות בו נקודת אפס נוספת של הנגזרת, מה שלא יכול להתקיים כשמדובר בקטע שבין נקודות אפס סמוכות של הנגזרת.

תכונת שמירת סימן בסביבת נקודה: תהי $f(x)$ רציפה בסביבה שלמה של הנקודה $x=x_0$. אזי אם $f(x_0)>0$, קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $f(x)>0$ לכל $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$. בדומה, אם $f(x_0)<0$, קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $f(x)<0$ לכל $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$.

ניסוח אלטרנטיבי: פונקציה $f(x)$ שומרת על סימנה בסביבה די קטנה של כל נקודות הרציפות שבה $f(x)\neq 0$.

תכונה זו היא הצדקה נוספת לשימוש בטכניקה לחקירת פונקציות שתוארה לעיל, כי גם ממנה נובע שפונקציה רציפה בקטע יכולה להחליף בו סימן רק בנקודת אפס.

רציפות של פונקציות המתקבלות כתוצאה של פעולות בין שתי פונקציות

בפרקים הקודמים תוארו פעולות חשבון (חיבור, חיסור, כפל וחילוק) ופעולת ההרכבה של פונקציות. השאלה שעולה כעת היא, האם פעולות אלה שומרות על תכונת הרציפות של פונקציות? התשובה ניתנת בשורות הבאות:

- אם כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפה בנקודה $x=x_0$, אז גם כל אחת מהפונקציות $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ רציפה בנקודה זו.
- אם כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפה בנקודה $x=x_0$ ו- $g(x_0)\neq 0$, אז גם הפונקציה $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

  רציפה בנקודה זו.
- אם פונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x=x_0$, ופונקציה $g(x)$ רציפה בנקודה $x=f(x_0)$, אזי הפונקציה המורכבת $g(f(x))$ רציפה בנקודה $x=x_0$.

אי-רציפות של פונקציה בנקודה ובתחום

נקודות בהן הפונקציה רציפה שייכות תמיד לתחום הפונקציה.

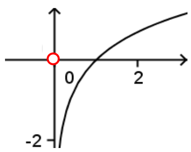
תכונה זו אינה קיימת לגבי נקודות אי-רציפות של פונקציה אשר יכולות להיות שייכות או לא שייכות לתחום הפונקציה. לכן הדיון בנקודות אי-רציפות של פונקציה מחייב דיון מקדים בנקודות אי-הגדרה של פונקציה.

יהי D תחום ההגדרה (התחום) של פונקציה $f\left(x\right)$. תהי $x=x_0$ נקודה בה $f\left(x\right)$ אינה מוגדרת. נקודה זו אינה שייכת לתחום D ונקראת נקודת אי-הגדרה של $f\left(x\right)$.

נסמן ב- r מספר חיובי כלשהו: $r>0$. נבחין בין סוגים שונים של נקודות אי-הגדרה.

נקודת אי-הגדרה $x=x_0$ של פונקציה $f\left(x\right)$ גובלת משמאל בתחום D, אם ורק אם בכל קטע $\left(x_0,x_0+r\right)$ יש נקודות מ- D.

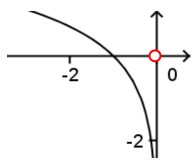
לדוגמה, הנקודה $x=0$ היא נקודת אי-הגדרה של הפונקציה $y=\ln(x)$, שגובלת בתחום הפונקציה משמאל, כי כל קטע פתוח $(0,r)$ שייך לתחום הפונקציה (איור 15).



איור 15: $y=\ln(x)$

נקודת אי-הגדרה $x=x_0$ של פונקציה $f\left(x\right)$ גובלת מימין בתחום D, אם ורק אם בכל קטע $\left(x_0-r,x_0\right)$ יש נקודות מ- D.

לדוגמה, הנקודה $x=0$ היא נקודת אי-הגדרה של הפונקציה $y=\ln(-x)$ הגובלת בתחום הפונקציה מימין, כי כל קטע פתוח $(-r,0)$ שייך לתחום הפונקציה (איור 16).

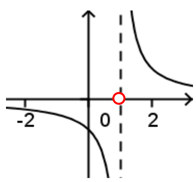


איור 16: $y=\ln(-x)$

נקודת אי-הגדרה $x=x_0$ של פונקציה $f\left(x\right)$ גובלת משני צדדים בתחום D, אם ורק אם היא גובלת ב- D הן משמאל והן מימין.

לדוגמה, הנקודה $x=1$ היא נקודת אי-הגדרה של הפונקציה $y=\dfrac{1}{x-1}$

הגובלת בתחום הפונקציה הן מימין והן משמאל (איור 17).



איור 17: $y=\dfrac{1}{x-1}$

בהגדרת נקודות אי-רציפות נבחין בין נקודות אי-רציפות ששייכות לתחום הפונקציה, לבין נקודות אי-רציפות שגובלות בתחום הפונקציה.

נקודת אי-רציפות ששייכת לתחום הפונקציה

הגדרה: תהי $x = x_0$ נקודה ששייכת לתחום של פונקציה $f(x)$. הנקודה $x = x_0$ נקראת נקודת אי-רציפות של פונקציה $f(x)$ אם ורק אם $f(x)$ אינה רציפה בנקודה זו, כלומר, $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

נקודת אי-רציפות שגובלת בתחום הפונקציה

הגדרה: תהי $x = x_0$ נקודת אי-הגדרה של פונקציה $f(x)$. הנקודה $x = x_0$ נקראת נקודת אי-רציפות של פונקציה $f(x)$, אם ורק אם הנקודה $x = x_0$ גובלת בתחום ההגדרה של $f(x)$, לפחות מצד אחד.

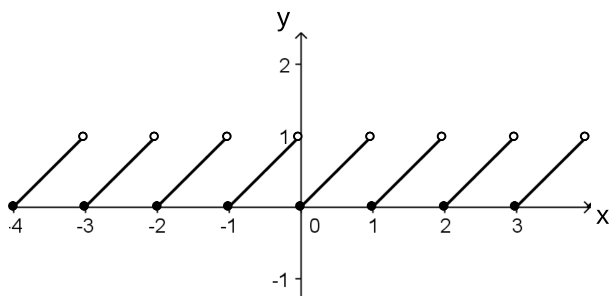
דוגמאות

1. תהי $f(x) = x - [x]$ כאשר $[x]$ הוא הערך השלם של x. ניתן לפרש את $f(x)$ כחלק השבור של x.

למשל,
$$f(1.25) = 1.25 - 1 = 0.25$$
$$f(-1.25) = -1.25 - (-2) = 0.75$$

פונקציה זו מוגדרת בתחום $D = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

אם n מספר שלם כלשהו, אזי $f(n) = n - n = 0$



איור 18: $f(x) = x - [x]$

בנקודות שמייצגות מספרים שלמים הפונקציה רציפה מימין ואיננה רציפה משמאל.
במילים אחרות, לפונקציה זו יש אינסוף נקודות אי-רציפות, כל הנקודות השלמות, אשר כולן נקודות השייכות לתחום ההגדרה של הפונקציה (איור 18).

2. הפונקציה $f(x) = \operatorname{tg} x$ מוגדרת לכל x למעט $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ כאשר n מספר שלם כלשהו. כל אחת מנקודות אי-הגדרה אלה גובלת בתחום ההגדרה משני צדדים. לכן, על-פי ההגדרה, כל נקודה $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ עם n שלם היא נקודת אי-רציפות של $f(x) = \operatorname{tg} x$. מכאן שלפונקציה זו יש אינסוף נקודות אי-רציפות, כולן נקודות אי-הגדרה של הפונקציה.

בדוגמאות לעיל נקודות האי-רציפות של $f(x)$, אף אם יש אינסוף כאלה, הן נקודות מבודדות, כלומר, לכל נקודת אי-רציפות של $f(x)$ יש סביבה בה אין אף נקודת אי-רציפות נוספת של $f(x)$. האם נקודות האי-רציפות של $f(x)$ יכולות להיות צפופות בקטע? למלא את הקטע? למלא את ציר ה- x? התשובה החיובית לכל השאלות האלה ניתנת על-ידי פונקציה מיוחדת הנקראת פונקציית דיריכלה.

3. פונקציית דיריכלה היא פונקציה שמקבלת שני ערכים שונים בלבד, C_1 ו- C_2, כאשר הערך C_1 מתקבל לכל x רציונלי והערך C_2 - לכל x אי-רציונלי.

נבחר $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ ונגדיר את אחת הגרסאות של פונקציית דיריכלה:

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{כאשר } x \text{ רציונלי} \\ f(x) = -1 & \text{כאשר } x \text{ אי-רציונלי} \end{cases}$$

פונקציית דיריכלה מוגדרת בכל נקודה בציר ה- x , כלומר, תחום ההגדרה שלה הוא $D=\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$.

כידוע, מספרים רציונליים ומספרים אי-רציונליים צפופים בכל מקום, כלומר, בכל קטע על ציר ה- x יש אינסוף מספרים מכל סוג. לכן הפונקציה $f(x)$, שהוגדרה לעיל, מקבלת אינסוף פעמים את הערך 1 ואינסוף פעמים את הערך 1-, בכל סביבה של כל נקודה $x=x_0$. מכאן נובע כי באף נקודה $x=x_0$ לפונקציה $f(x)$ לא קיים גבול כלשהו מאף צד. לכן כל נקודה $x=x_0$ בציר ה- x היא נקודת אי-רציפות של פונקציית דיריכלה.

לא נוכל להציג את פונקציית דיריכלה על-ידי גרף, לא ביד ולא במחשב, כי אין באפשרותנו להציג על ציר המספרים את כל המספרים הרציונליים ואת כל המספרים האי-רציונליים. ניתן לדמיין ולתאר את הגרף של פונקציית דיריכלה שהצגנו כמורכב משני ישרים מנוקבים: הישר $y=1$ המנוקב בכל נקודה עם שיעור x אי-רציונלי, והישר $y=-1$ המנוקב בכל נקודה עם שיעור x רציונלי.

4. דוגמה מעניינת של פונקציית דיריכלה היא הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{כאשר } x \text{ רציונלי} \\ 0 & \text{כאשר } x \text{ אי-רציונלי} \end{cases}$$

הפונקציה רציפה בנקודה $x=0$, כי $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, ואינה רציפה באף נקודה אחרת. הגרף של

פונקציה זו מורכב משני ישרים מנוקבים, הישר $y=x$ המנוקב בנקודות אי-רציונליות, וציר ה- x המנוקב בנקודות רציונליות, למעט $x=0$.

סיווג נקודות אי-רציפות

נהוג להבחין בין סוגים שונים של נקודות אי-רציפות. סיווג נקודות האי-רציפות מתבסס על בדיקת הגבולות החד- צדדיים של הפונקציה בנקודות אלו. אם $x=x_0$ היא נקודת אי-רציפות של פונקציה $f(x)$, נגיד כי בנקודה זו לפונקציה יש תכונת אי-רציפות.

אי-רציפות מסוג ראשון

הגדרה: תהי $x=x_0$ נקודת אי-רציפות של פונקציה $f(x)$. האי-רציפות של $f(x)$ בנקודה $x=x_0$ נקראת אי-רציפות מסוג ראשון, אם ורק אם קיימים בנקודה זו גבולות חד-צדדיים סופיים, כלומר:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A\neq\pm\infty,\ \ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=B\neq\pm\infty\ .$$

נהוג לסווג אי-רציפות מסוג ראשון סיווג משני המבחין בין אי-רציפות סליקה ואי-רציפות קפיצה.

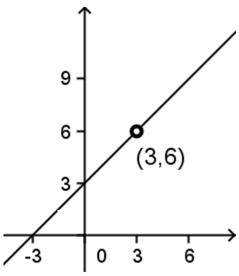
הגדרה: תהי $x=x_0$ נקודת אי-רציפות מסוג ראשון של פונקציה $f(x)$. האי-רציפות של פונקציה $f(x)$ בנקודה $x=x_0$ נקראת אי-רציפות סליקה, אם ורק אם הגבולות החד-צדדיים של $f(x)$ בנקודה זו שווים זה לזה, כלומר,

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq\pm\infty\ .$$

נציין כי, לפי ההגדרה לעיל, בנקודה $x=x_0$ של אי-רציפות סליקה של $f\left(x\right)$ קיים גבול $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\neq\pm\infty$. מקור השם אי-רציפות "סליקה" הוא באפשרות "לסלק" את האי-רציפות מסוג זה בנקודה $x=x_0$ על-ידי הגדרה מתאימה של ערך הפונקציה בנקודה זו. ההגדרה $f\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ הופכת את $f\left(x\right)$ לפונקציה רציפה בנקודה $x=x_0$.

דוגמאות

1. נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, $x\neq 3$ (איור 19).



איור 19

הנקודה $x=3$ היא נקודת אי-רציפות סליקה בנקודת אי-הגדרה של הפונקציה.

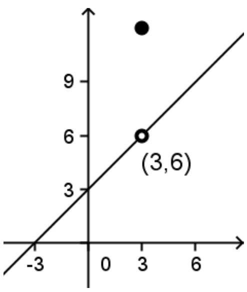
כל עוד $x\neq 3$ ניתן לפשט את הביטוי ולקבל $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x-3)}=x+3$.

מכאן שבכל נקודה מלבד הנקודה $x=3$ הפונקציה f מתלכדת עם הפונקציה $y=x+3$.

לכן קיים הגבול $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$. הנקודה $x=3$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של $f\left(x\right)$, שבה הפונקציה אינה מוגדרת.

2. נגדיר פונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ 12 & x=3\end{cases}$$



איור 20

פונקציה זו זהה לקודמת בכל נקודה מלבד הנקודה $x=3$. הפעם, הנקודה $x=3$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של $f\left(x\right)$ שבה הפונקציה כן מוגדרת (איור 20).

הגדרה: תהי $x=x_0$ נקודת אי-רציפות מסוג ראשון של פונקציה $f\left(x\right)$. האי-רציפות של פונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה $x=x_0$ נקראת אי-רציפות קפיצה, אם ורק אם הגבולות החד-צדדיים של $f\left(x\right)$ בנקודה זו שונים זה מזה, כלומר, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)$.

כיוון שבנקודת אי-רציפות קפיצה הגבולות החד-צדדיים של הפונקציה מימין ומשמאל שונים זה מזה, לא ניתן לתקן אי-רציפות קפיצה על-ידי הגדרה כלשהי של הפונקציה בנקודת אי-רציפות מסוג זה.

דוגמאות

1. בפונקציה $f\left(x\right)=\left[x\right]$ (פונקציית הערך השלם) כל נקודה $x=n$, n מספר שלם, היא נקודת אי-רציפות קפיצה ששייכת לתחום ההגדרה של הפונקציה (איור 12).

2. תהי $g\left(x\right)$ פונקציה שתחום ההגדרה שלה הוא המספרים הלא שלמים, והיא מתלכדת עם פונקציית הערך השלם בכל נקודה בתחום זה. כל נקודה $x=n$, n מספר שלם, היא נקודת אי-רציפות קפיצה של הפונקציה $g\left(x\right)$ הגובלת בתחום הגדרתה משני הצדדים.

אי-רציפות מסוג שני

אי-רציפות שאינה מסוג ראשון, נקראת אי-רציפות מסוג שני.

הגדרה: האי-רציפות של $f\left(x\right)$ בנקודה $x=x_0$ נקראת אי-רציפות מסוג שני, אם ורק אם בין הגבולות החד-צדדיים $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right), \lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)$ לפחות גבול אחד אינו קיים או שווה ל- $\left(\pm\right)\infty$.

גם לאי-רציפות מסוג שני יש סיווג משני: (1) אי-רציפות עם אסימפטוטה, ו- (2) אי-רציפות בלי אסימפטוטה.

הגדרה: האי-רציפות של פונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה $x=x_0$ נקראת אי-רציפות מסוג שני עם אסימפטוטה, אם ורק אם לפחות אחד מהגבולות החד-צדדיים $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right), \lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)$ הוא ∞ או $-\infty$.

הגדרה: האי-רציפות של פונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה $x=x_0$ נקראת אי-רציפות מסוג שני בלי אסימפטוטה, אם ורק אם אף אחד מהגבולות החד-צדדיים $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right), \lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)$ אינו קיים, לא סופי ולא אינסופי.

דוגמאות

1. בפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ הנקודה $x=1$ היא נקודת אי-רציפות מסוג שני עם אסימפטוטה דו-צדדית.

   הנקודה גובלת בתחום ההגדרה משני הצדדים. (ר' איור 17).

2. בפונקציה $f\left(x\right)=\ln(x)$ הנקודה $x=0$ היא נקודת אי-רציפות מסוג שני עם אסימפטוטה חד-צדדית. הנקודה גובלת בתחום הפונקציה מצד אחד (משמאל). (ר' איור 15).

3. בפונקציה $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ הנקודה $x=0$ היא נקודת אי-רציפות ללא אסימפטוטה. הנקודה גובלת

   בתחום הפונקציה משני צדדים. (ר' איור 29).

איור 21 מציג סיכום ויזואלי של סוגי האי-רציפות.

נקודת אי-רציפות של פונקציה

נקודה בתחום הפונקציה, שבה הפונקציה איננה רציפה, או נקודת אי-הגדרה שגובלת בתחום הפונקציה.

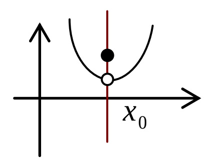
אי-רציפות מסוג ראשון

הגבולות החד-צדדיים של הפונקציה קיימים וסופיים.

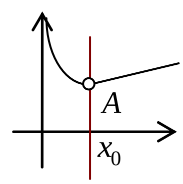
אי-רציפות סליקה

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

דוגמאות



א. אי-רציפות סליקה בנקודה שבה הפונקציה מוגדרת

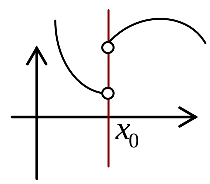


ב. אי-רציפות סליקה בנקודת אי-הגדרה של הפונקציה

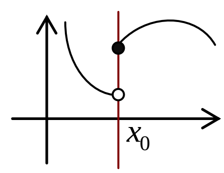
אי-רציפות קפיצה

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

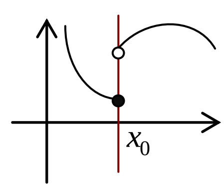
דוגמאות



ג. אי-רציפות קפיצה בנקודת אי-הגדרה של הפונקציה



ד. אי-רציפות קפיצה עם רציפות מימין



ה. אי-רציפות קפיצה עם רציפות משמאל

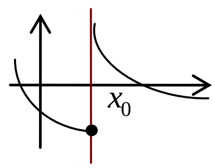
אי-רציפות מסוג שני

בין הגבולות החד-צדדיים, לפחות אחד אינו קיים או אינו סופי.

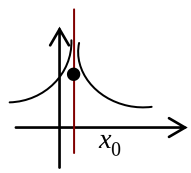
אי-רציפות עם אסימפטוטה

לפחות אחד מהגבולות החד- צדדיים שווה ל-∞ או ל- $-\infty$.

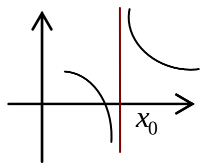
דוגמאות



ו. אי-רציפות עם אסימפטוטה חד-צדדית מימין



ז. אי-רציפות עם אסימפטוטה דו-צדדית בנקודה בתחום ההגדרה

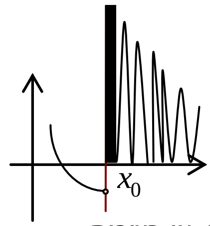


ח. אי-רציפות עם אסימפטוטה דו- צדדית בנקודה הגובלת בתחום ההגדרה

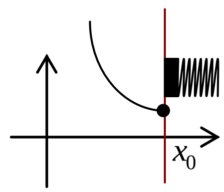
אי-רציפות ללא אסימפטוטה

אף אחד מהגבולות החד-צדדיים אינו שווה ל-∞ או ל- $-\infty$, ולפחות אחד מהגבולות החד-צדדיים אינו קיים כלל.

דוגמאות



ט. אי-רציפות בפונקציה לא חסומה בסביבת x_0, ללא אסימפטוטה



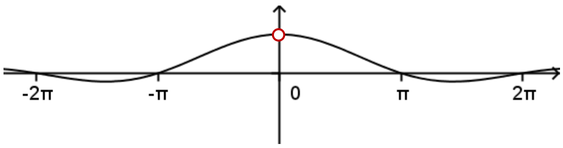
י. אי-רציפות בפונקציה חסומה בסביבת x_0, ללא אסימפטוטה

איור 21: אי-רציפות – סיכום ויזואלי

דוגמאות לחקירת תכונות רציפות ואי-רציפות של פונקציות אלמנטאריות

בסעיף זה נעסוק בתכונות רציפות ואי-רציפות של פונקציות אשר חקירתן מהווה נושא מרכזי של אנליזה - פונקציות אלמנטאריות. ניזכר כי פונקציה $f(x)$ נקראת אלמנטארית אם היא מתקבלת מפונקציות אלמנטאריות בסיסיות על-ידי מספר סופי של פעולות חשבון והרכבה. בכל הדוגמאות נשתמש בתכונת הרציפות של פונקציה אלמנטארית, בכל נקודה בתחום הגדרתה.

דוגמה 1: הפונקציה $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ מוגדרת לכל x, למעט $x=0$. פונקציה זו היא פונקציה אלמנטארית, כי היא מתקבלת משתי פונקציות אלמנטאריות בסיסיות $\sin x$ ו- x על-ידי פעולת חילוק. לכן $f(x)$ רציפה בכל נקודה x, למעט $x=0$. נקודת האי-הגדרה, $x=0$, גובלת בתחומה של $f(x)$ משני צדדים. לכן, על-פי ההגדרה, היא נקודת האי-רציפות של $f(x)$.



איור 22

כדי לקבוע את אופי האי-רציפות של $f(x)$ בנקודה $x=0$, נבדוק גבולות חד-צדדיים של $f(x)$ בנקודה זו. הגבול של הפונקציה כאשר x שואף לאפס הוא $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (ר' עמוד 617), כלומר, הגבולות החד-צדדיים בנקודה זו שווים שניהם ל- 1. לכן על-פי ההגדרה, הנקודה $x=0$ היא נקודת אי-רציפות מסוג ראשון, נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. הגרף באיור 22 תואם את המסקנות.

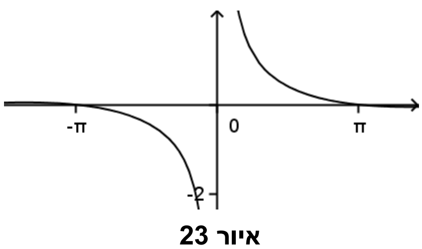
הדוגמה הבאה מדגימה אי-רציפות מסוג שני עם אסימפטוטה, בנקודה שבה מתאפסים המונה והמכנה של פונקציה רציונלית.

דוגמה 2: הפונקציה $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$ מוגדרת לכל x, למעט $x=0$. פונקציה זו היא פונקציה אלמנטארית, כי היא מתקבלת משתי פונקציות אלמנטאריות בסיסיות $\sin x$ ו- x^2 על-ידי פעולת חילוק. לכן $f(x)$ רציפה בכל נקודה x, למעט $x=0$. נקודת האי-הגדרה $x=0$ גובלת בתחומה של $f(x)$ משני צדדים. לכן היא נקודת האי-רציפות של $f(x)$. כדי לקבוע את אופי האי-רציפות של $f(x)$ בנקודה $x=0$, נבדוק גבולות חד-צדדיים של $f(x)$ בנקודה זו.

מתקיים:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=1\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=1\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$



איור 23

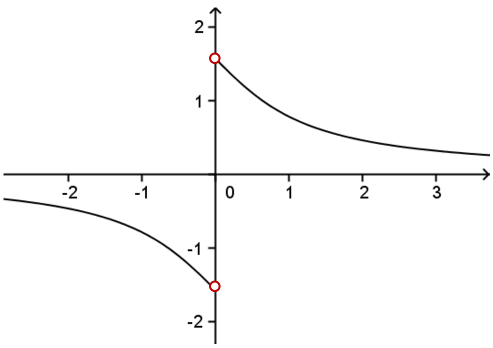
מכאן נובע כי $x=0$ היא נקודת אי-רציפות מסוג שני עם אסימפטוטה דו-צדדית, משמאל בכיוון מטה ומימין בכיוון מעלה. הגרף הממוחשב של הפונקציה $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$ בסביבת $x=0$ תואם את המסקנות (איור 23).

הערה על התנהגות המנה של שתי פונקציות המתאפסות באותה נקודה

בכל אחת משתי הדוגמאות לעיל, הפונקציה הנתונה היא מנת שתי פונקציות המתאפסות בנקודה $x=0$. נקודה זו היא נקודת אי-הגדרה ואי-רציפות של פונקציית המנה. אבל אופי האי-רציפות של הפונקציה בנקודה $x=0$ בשתי הדוגמאות שונה לחלוטין: בדוגמה 1 בנקודה $x=0$ יש לפונקציה אי-רציפות מסוג ראשון, אי-רציפות סליקה, בעוד שבדוגמה 2 בנקודה $x=0$ יש לפונקציה אי-רציפות מסוג שני עם אסימפטוטה. דוגמה זו חשובה כדי להראות שהתנאי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ לא תמיד מתבטא בחור בגרף הפונקציה, דעה מוטעית שעלולה להיווצר בגלל דוגמאות נפוצות של אי-רציפות סליקה.

הדוגמה הבאה מדגימה אי-רציפות קפיצה.

דוגמה 3: הפונקציה $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ מוגדרת לכל x למעט $x=0$. פונקציה זו היא פונקציה אלמנטארית כי היא מתקבלת מהרכבת שתי פונקציות אלמנטאריות בסיסיות $\frac{1}{x}$ ו- $\operatorname{arctg}x$. לכן היא רציפה בכל נקודה x למעט $x=0$. היות ונקודה זו גובלת בתחום ההגדרה של $f(x)$ (משני צדדים), היא נקודת אי-רציפות של $f(x)$. על-פי התכונות של $\operatorname{arctg} x$ מוצאים:



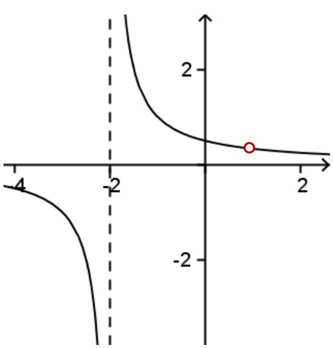
איור 24

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

לכן, על-פי ההגדרה, הנקודה $x=0$ היא נקודת אי-רציפות מסוג ראשון, דהיינו אי-רציפות קפיצה של הפונקציה הנתונה. הגרף הממוחשב באיור 24 תואם את המסקנה.

הדוגמה הבאה מדגימה שתי נקודות אי-רציפות, האחת סליקה והשניה אי-רציפות מסוג שני עם אסימפטוטה.

דוגמה 4: הפונקציה $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x-2}$ מוגדרת לכל x ממשי למעט $x=-2, x=1$ כאשר המכנה מתאפס (איור 25). פונקציה זו היא פונקציה אלמנטארית כי היא מתקבלת מפונקציות אלמנטאריות בסיסיות $x, x^2, 1, 2$ על-ידי פעולות חיבור, חיסור וחילוק. לכן $f(x)$ רציפה בכל נקודה x למעט $x=-2, x=1$. כל אחת מנקודות אלה גובלת בתחום הפונקציה משני צדדים. על-פי ההגדרה, הנקודות $x=-2, x=1$ הן נקודות אי-רציפות של $f(x)$. כדי לקבוע את אופי האי-רציפות של $f(x)$ בנקודות אלה, נחשב בהן גבולות חד-צדדיים:



איור 25

בנקודה $x=-2$:

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{1}{(x+2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{1}{(x+2)}=\infty$$

בנקודה $x=1$:

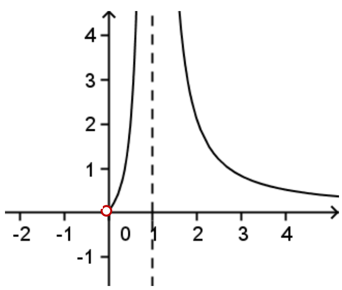
$$\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{3}$$

מהתוצאות לעיל נובע כי $x=1$ היא נקודת אי-רציפות מסוג ראשון של $f(x)$, דהיינו אי-רציפות סליקה, ו- $x=-2$ היא נקודת אי-רציפות מסוג שני של $f(x)$ עם אסימפטוטה דו- צדדית בכיוונים שונים.

הדוגמה הבאה מדגימה פונקציה עם נקודת אי-רציפות סליקה, ונקודת אי-רציפות מסוג שני עם אסימפטוטה.

דוגמה 5: הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{\ln^2 x}$ מוגדרת לכל $x>0$ למעט $x=1$. היא פונקציה אלמנטארית מכיוון שהיא מתקבלת מפונקציות אלמנטאריות בסיסיות $\ln x$ ו- 1 על-ידי פעולות כפל (העלאה בחזקה) וחילוק. לכן $f(x)$ רציפה בכל נקודה בתחום הגדרתה. הנקודה $x=1$ גובלת בתחום הפונקציה משני צדדים, והנקודה $x=0$ גובלת בתחום הפונקציה רק משמאל. על-פי ההגדרה, שתי נקודות אלה הן נקודות אי-רציפות של הפונקציה הנתונה.



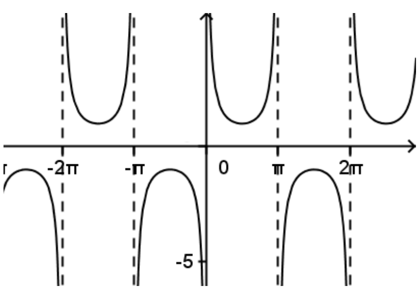
איור 26

בנקודה $x=0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\ln^2 x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln^2 x}=0$. לכן $x=0$ היא נקודת אי-רציפות מסוג ראשון, דהיינו אי-רציפות סליקה של $f(x)$. הייצוג הוויזואלי של אי-רציפות זאת הוא "חור" בגרף של הפונקציה בראשית הצירים.

בנקודה $x=1$:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\ln^2 x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\ln^2 x}=+\infty$$



איור 27

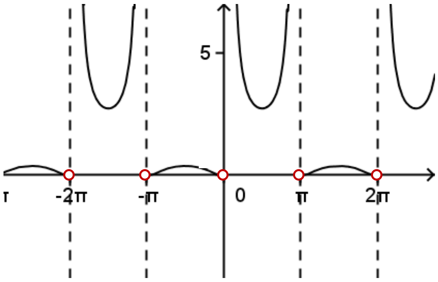
מכאן נובע כי $x=1$ היא נקודת אי-רציפות מסוג שני של $f(x)$, עם אסימפטוטה דו-צדדית בכיוון מעלה משני צדדים (איור 26).

בדוגמאות לעיל לפונקציה הייתה רק נקודת אי-רציפות אחת עם אסימפטוטה, אם בכלל. הדוגמה הבאה מדגימה פונקציה עם מספר אינסופי של נקודות אי-רציפות עם אסימפטוטה דו-צדדית.

דוגמה 6: לפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ דרך כל נקודה $x=n\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots)$ עוברת אסימפטוטה דו-צדדית (איור 27).

הדוגמה הבאה מדגימה פונקציה עם מספר אינסופי של נקודות אי-רציפות עם אסימפטוטות חד-צדדיות.

דוגמה 7: תהי $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{\sin x}}$. מהתכונות של הפונקציה $\frac{1}{\sin x}$ בסביבת הנקודות $x=n\pi$, $\left(n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...\right)$, נובע כי לפונקציה $f\left(x\right)$ יש אינסוף אסימפטוטות חד-צדדיות העוברות דרך הנקודות האלה (איור 28).



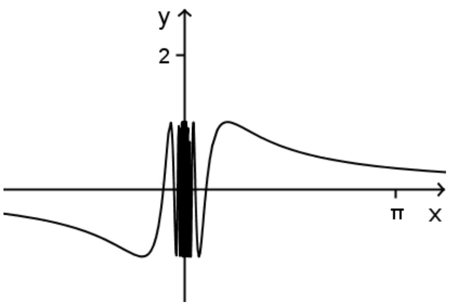
איור 28

דוגמאות של אי-רציפויות מסוג שני בלי אסימפטוטה

דוגמה 8: הפונקציה $f\left(x\right)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ מוגדרת לכל x למעט $x=0$. פונקציה זו היא פונקציה אלמנטארית בהיותה הרכבת פונקציות אלמנטאריות בסיסיות $\frac{1}{x}$ ו- $\sin x$. לכן היא רציפה בכל נקודה x למעט $x=0$. נקודה זו גובלת בתחום הפונקציה $f\left(x\right)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ משני הצדדים ולכן היא נקודת האי-רציפות של פונקציה זו. הפונקציה הנתונה חסומה בכל תחומה כי $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le1$ לכל $x\neq0$. לכן לגרף שלה לא תיתכנה אסימפטוטות. נתבונן בסדרת הנקודות $x_n=\frac{2}{n\pi}$ כאשר $n=1,2,3,...$. ברור כי סדרה זו מתכנסת (שואפת) לנקודה $x=0$ מימין. הסדרה המתאימה של ערכי הפונקציה היא $y_n=\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)=\sin\frac{n\pi}{2}$ כאשר $n=1,2,3,...$.

סדרה זו היא: $1,0,-1,0,1,0,-1,0,...$ ואין לה גבול.

מהנ"ל נובע כי לפונקציה $f\left(x\right)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ בנקודה $x=0$ לא קיים גבול מימין, לא סופי ולא אינסופי.



איור 29

היות ו- $f\left(x\right)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ היא פונקציה אי-זוגית, לא קיים גם גבול משמאל בנקודה $x=0$. לכן $x=0$ היא נקודת אי-רציפות מסוג שני של הפונקציה הנתונה, ללא אסימפטוטה מאף צד. כאשר x שואפת ל- 0 מימין או משמאל, גרף הפונקציה מתנדנד בין הישרים $y=1$ ו- $y=-1$ אינסוף פעמים. לכן ניתן לאפיין את הנקודה $x=0$ כנקודת אי-רציפות מסוג שני עם תנודה אינסופית. (איור 29).

נציין כי לא ניתן להציג את האי-רציפות עם תנודה אינסופית בדיוק, לא בגרף ידני ולא בגרף ממוחשב.

בסביבת $x=0$ הגרף לעיל נראה כמו גוש אחד המכיל קטע של ציר ה- y , כאשר למעשה הגרף הוא קו רציף עם תנודה אינסופית לקראת ציר ה- y , משני צדדיו, ואין לו נקודה משותפת עם ציר ה- y .

עיקרי הדברים

- פונקציה $f\left(x\right)$ נקראת רציפה בנקודה $x=x_0$ אם $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.
- פונקציה נקראת רציפה בתחום אם היא רציפה בכל נקודה השייכת לתחום זה.
- פונקציות אלמנטאריות רציפות בכל נקודה בתחום הגדרתן.
- הפונקציות בהן עוסקים בלימודי האנליזה בבית הספר הן פונקציות אלמנטאריות רציפות בתחום הגדרתן.
- ההצדקה של חוקי הנגזרת, הקיום של מקסימום מוחלט ומינימום מוחלט לפונקציה רציפה בקטע סגור, והעובדה שנקודת קיצון יחידה בתחום רציף היא נקודת קיצון מוחלט, הם מעט מן הדוגמאות לשימוש, לפעמים סמוי, בתכונות של פונקציות רציפות, בלימודי האנליזה בבית הספר.
- נקודות אי-רציפות של פונקציה הן לפעמים נקודות בהן הפונקציה אינה מוגדרת. לכן יכולה להיות פונקציה שהיא רציפה בכל תחומה ובכל זאת יש לה נקודות אי-רציפות. (למשל, הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{x}$ בנקודה $x_0=0$).
- מבחינים בין שני סוגים עיקריים של נקודות אי-רציפות: נקודות אי-רציפות מסוג ראשון בהן הגבולות החד- צדדיים של הפונקציה קיימים וסופיים, ונקודות אי-רציפות מסוג שני בהן לפחות אחד מהגבולות החד- צדדיים של הפונקציה אינו קיים או אינו סופי.