

גבולות

מושג הגבול הוא אבן יסוד של האנליזה. כל המושגים המרכזיים שלה, כמו רציפות, נגזרת, אינטגרל, מתבססים על מושג הגבול. הצורך במושג הגבול קיים לא רק באנליזה אלא בתחומים שונים במתמטיקה, כפי שמראות הדוגמאות הבאות.

חומר למחשבה

דוגמה 1: אכילס והצב

אכילס, הרץ המהיר ביותר ביוון, מתחרה בריצה עם צב. אכילס, באצילותו, נותן לצב יתרון - הצב יתחיל את המירוץ 100 מטרים לפני אכילס. נניח כי מהירותו של אכילס גדולה פי 10 ממהירות הצב. בשעה שאכילס יעבור את 100 המטרים הראשונים ויגיע אל נקודת ההתחלה של הצב, הצב כבר יתקדם 10 מטרים, ולכן ימצא עדיין לפני אכילס.

כאשר אכילס ימשיך ויעבור את 10 המטרים הבאים, הצב כבר יעבור עוד מטר, ושוב יקדים אותו. וכך גם בהמשך המירוץ: כשאכילס מגיע לנקודה בה היה הצב קודם, הצב כבר נמצא בנקודה רחוקה יותר. לכן, אכילס ילך ויתקרב אל הצב, אך לעולם לא יוכל להשיג אותו - כך טען הפילוסוף היווני זנון (Zeno) שחי במאה החמישית לפני הספירה. טענה זו ידועה היטב בהיסטוריה של המתמטיקה בשם "פרדוקס זנון על אכילס והצב". כפי שידעו בני דורו של זנון, גם אנחנו יודעים שאכילס ישיג את הצב, ואף יכולים לחשב היכן זה יקרה. זאת בעיית תנועה פשוטה באלגברה. לכן לטענת זנון קוראים "פרדוקס", כלומר, טענה מוזרה שסותרת את המציאות. איך נוכל לסתור את טיעונו של זנון? נחזור לשאלה זו בעמוד 86.

דוגמה 2: המספר 1 והשבר 0.9

נחשוב על השבר האינסופי המחזורי $0.9 = 0.999999.....$. ברור כי:

$$0.9 < 1$$

$$0.99 < 1$$

$$0.999 < 1$$

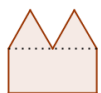
$$0.9999 < 1$$

ובאופן כללי, כל מספר מהצורה $0.999999.....9$ קטן מהמספר 1 אם כי קרוב אליו.

נשאלת השאלה:

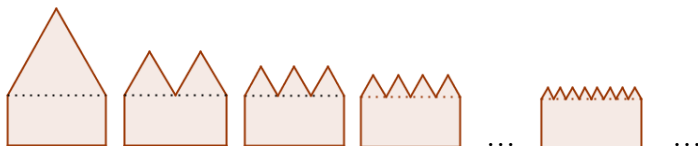
ומה בדבר השבר העשרוני האינסופי 0.9 ? האם $0.9 < 1$? גם לשאלה זו נחזור בעמוד 86.

דוגמה 3: מלבן מעוטר



איור 1

אם נחלק את הצלע העליונה של מלבן למספר קטעים שווים, ועל כל קטע חלקי נבנה משולש שווה-צלעות, נקבל קו שבור, המורכב משוקיהם של כל המשולשים. נתבונן בצורה המתקבלת מהמלבן הנתון כשמחליפים את צלעו העליונה בקו השבור (איור 1).



איור 2

נקרא לצורה זו "מלבן מעוטר".

באיור 2 מוצגת סדרה של מלבנים מעוטרים.

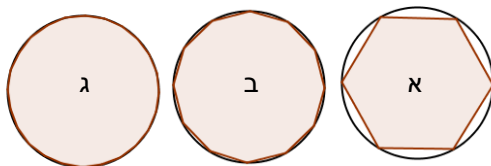
באיבר הראשון של הסדרה הקו השבור מתקבל ממשולש אחד.
באיבר ה- n בסדרה הקו השבור מתקבל מצלעות של n משולשים שווים צלעות.

כאשר n שואף לאינסוף המרחק המקסימלי בין קדקודי הקו השבור לבין הצלע העליונה של המלבן שואף לאפס, כך שקו זה שואף לצלע העליונה של המלבן, והמלבן המעוטר שואף להתלכד עם המלבן הנתון. במונחי גבולות, המלבן הנתון הוא הגבול של המלבנים המעוטרים כאשר מספר הקדקודים שואף לאינסוף.

נשאלת השאלה:

האם, כאשר n שואף לאינסוף היקף המלבן המעוטר שואף להיקף המלבן המקורי?
האם, כאשר n שואף לאינסוף, שטח המלבן המעוטר שואף לשטח המלבן המקורי? נחזור לשאלה זו בעמוד 87.

דוגמה 4: מעגל ומצולע משוכלל רב-צלעות החסום בו



איור 3: מצולעים משוכללים חסומים במעגל
א. 6 צלעות ב. 12 צלעות ג. 24 צלעות

קל לחסום במעגל משושה משוכלל שאורך צלעו שווה לרדיוס המעגל, בעזרת מחוגה וסרגל או בתוכנה גרפית (איור 3).

אם נחלק כל קשת של המעגל הנ"ל לשני חלקים שווים, נוכל בעזרת אותם הכלים לבנות מצולע משוכלל בן 12 צלעות החסום באותו מעגל.

נוכל להמשיך ולבנות מצולע משוכלל בן 24 צלעות, מצולע משוכלל בן 48 צלעות, וכך הלאה.

בשלב מסוים של תהליך זה לא נוכל להבחין בין המצולע לבין המעגל. יחד עם זאת, אנו יודעים היטב, שמצולע משוכלל אינו מתלכד עם מעגל גם כשמספר צלעותיו גדול.

מה קורה להיקף ולשטח של המצולע המשוכלל החסום במעגל כאשר מספר צלעותיו הולך וגדל?

האם היקף המצולע שואף להיקף המעגל? האם שטח המצולע שואף לשטח המעגל? נחזור לשאלה זו בעמוד 88.

הצגנו דוגמאות מתחומים שונים: הראשונה – מתחום בעיות התנועה, השנייה – מתחום המספרים הממשיים, השלישית והרביעית מתחום הגאומטריה. בכל דוגמה העלינו שאלות שהתשובות להן קשורות במושג הגבול. נחזור לדון בשאלות אלה ונשיב עליהן בסוף הפרק.

גבול של סדרה

סדרה אינסופית והצגתה

סדרה היא פונקציה של משתנה טבעי n המעתיקה את קבוצת המספרים הטבעיים N לקבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$: $f: N \rightarrow \mathbb{R}$

נוהגים לסמן סדרה כ- $\{a_n\}$ או בצורה מפורטת, $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$.

כל מספר a_n נקרא איבר בסדרה, והאינדקס התחתון n מסמן את מקומו הסידורי של האיבר בסדרה.

בסעיף זה נתמקד בהתנהגות של איברי הסדרה כאשר n הולך וגדל.

היות וכל איבר בסדרה ניתן להצגה על-ידי נקודה בציר ה- x , כל סדרה אינסופית מוצגת על-ידי סדרת נקודות על ציר ה- x . כאשר רוצים להדגיש את הייצוג של איברי הסדרה כנקודות על ציר ה- x , מסמנים את הסדרה $\{x_n\}$.

גבול סופי של סדרה

לפני הצגת ההגדרה לגבול סופי של סדרה נתבונן בדוגמה אחת אופיינית.

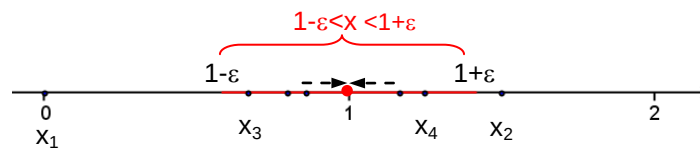
דוגמה

נתבונן בסדרה $x_n = \frac{n+(-1)^n}{n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, שאיבריה:

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = \frac{5}{4}, \dots$$

איברי הסדרה במקומות הזוגיים גדולים מ-1, ואיברי הסדרה במקומות האי-זוגיים קטנים מ-1. איברי הסדרה הולכים ומתקרבים ל-1, במובן כי ההפרש בין 1 לבין x_n הולך וקטן בערכו המוחלט, כאשר n הולך וגדל. אין בסדרה איבר שערכו 1, אבל בכל קטע $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ עם $\varepsilon > 0$ נמצאים כל האיברים של הסדרה החל ממספר מסוים $n = N$ אשר תלוי, כמובן, בגודל של ε . במילים אחרות, עבור כל קטע $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, יש רק מספר סופי של איברי הסדרה מחוץ לקטע (איור 4).

מצב זה מאפשר להסיק כי המספר 1 הוא הגבול של הסדרה $\left\{ \frac{n+(-1)^n}{n} \right\}$.



איור 4

להלן ההגדרה הכללית של מושג זה.

הגדרות

מספר ממשי A נקרא **גבול של סדרה** $\{a_n\}$ אם הערך של a_n נעשה קרוב ל- A כרצוננו לכל n מספיק גדול, כלומר: לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר k (התלוי ב- ε) כך שמתקיים: $|a_n - A| < \varepsilon$ לכל $n > k$.

מסמנים: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ או $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$.

אם יש לסדרה גבול היא נקראת סדרה **מתכנסת**.

על סדרה בעלת גבול A אומרים שהיא מתכנסת או שואפת ל- A . ומסמנים זאת כך: $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$.

אם לסדרה אין גבול היא נקראת סדרה **מתבדרת**.

ניתן להראות כי אם יש לסדרה גבול אז הגבול הוא יחיד.

להלן מספר הערות חשובות להגדרת גבול של סדרה.

הערה 1

ההגדרה של מושג הגבול לעיל מתחילה מתיאור מילולי של המצב בו לסדרה יש גבול, וממשיכה בפירוש הביטויים "קרוב כרצוננו", "מספיק גדול" באמצעות האי-שוויונות.

הערה 2

בהגדרת הגבול במקום שפת האי-שוויונות, ניתן להשתמש במונח סביבה: המספר A נקרא גבול של סדרה $\{a_n\}$ אם בכל סביבה $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ של A על ציר המספרים, כל איברי הסדרה, למעט אולי מספר סופי שלהם, נמצאים בתוך קטע זה.

(סביבה של A היא קטע פתוח המכיל את A .)

הערה 3

הסדרה $\left\{ \frac{n + (-1)^n}{n} \right\}$ שהובאה בדוגמה לפני ההגדרה של מושג הגבול, מתכנסת ל-1 ואף איבר בה אינו מקבל את ערך הגבול.

הסדרה $\left\{ \frac{n + (-1)^n}{n + 1} \right\}$ מתכנסת גם היא ל-1, אבל בה כל איבר במקום זוגי שווה לערך 1 של הגבול.

כל איברי הסדרה $\{\cos 2\pi n\}$ שווים 1. הגבול של הסדרה $\{\cos 2\pi n\}$ הוא 1 על-פי ההגדרה.

מהדוגמאות האלה נובע כי עבור סדרות מתכנסות ייתכנו המקרים הבאים:

א. אף איבר בסדרה אינו שווה לגבול,

ב. הערך של חלק מהאיברים או של כל האיברים בסדרה שווה לערך של הגבול.

הערה 4

ההתקרבות של איברי הסדרה לגבול לא חייבת להיות מונוטונית, כלומר, ייתכן ש- $|a_{n+1} - A| > |a_n - A|$

לערכי n אחדים או אף לאינסוף ערכים כאלה (לא לכולם!).

למשל, הסדרה $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$ כאשר $n \in \mathbb{N}$ מתכנסת ל-0.

בסדרה זו כל האיברים במקומות האי-זוגיים שווים ל-0, כלומר, הם מתלכדים עם הגבול, כך שמרחקם ממנו הוא 0. לעומת זאת כל האיברים במקומות הזוגיים שונים מ-0, ולכן הם מרוחקים מהגבול מרחק מסוים.

מכאן: האיבר a_2 יותר רחוק מהגבול מאשר האיבר a_1 , והאיבר a_4 - יותר מאשר a_3 , a_6 - יותר מאשר a_5 , וכך הלאה. לכן הביטוי "איברי הסדרה הולכים ומתקרבים לגבול", אשר לפעמים משתמשים בו לתיאור מילולי של התכנסות הסדרה לגבול, עלול להטעות, היות ויש בו קונוטציה של מונוטוניות ההתקרבות של האיברים לגבול. עדיף להימנע מביטוי זה במקרה ואין ידיעה ברורה שאיברי הסדרה אכן מתקרבים לגבול באופן מונוטוני.

בדרך כלל, ביטויי שפת אנוש אינם חד-משמעיים ומרשים פירושים שונים. לכן בהגדרות מושגים מתמטיים דרוש פירושם של ביטויים מילוליים תיאוריים בשפת המתמטיקה המדויקת. יחד עם זאת, הביטוי " n הולך וגדל" בהגדרת הגבול של סדרה, משקף היטב את העובדה כי הערך של n גדל בהתמדה כאשר עוברים בסדרה מאיבר לאיבר הבא.

הערה 5

סדרה יכולה להתכנס לגבול באופנים שונים: בירידה/ בעלייה אל הגבול ובנדידה סביבו.

למשל הסדרה $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ מתכנסת לגבול 1 תוך עליית איבריה לגבול מצד שמאל, כאשר הסדרה $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ מתכנסת לאותו גבול תוך ירידת איבריה אליו מצד ימין.

איברי הסדרה $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ קופצים משמאל לימין ולהפך סביב הגבול 1.

שתי הסדרות הראשונות הן סדרות מונוטוניות, ואילו השלישית היא סדרה מתנדנדת. יחד עם זאת לכל הסדרות בעלות גבול סופי יש תכונה אחת משותפת: הן כולן סדרות חסומות. ההפך אינו נכון: לא כל סדרה חסומה היא סדרה מתכנסת. את הדוגמה הפשוטה ביותר לכך מהווה הסדרה $\{(-1)^n\}$.

בדקו שסדרה זו חסומה ולא מתכנסת (נטולת גבול).

מציאת גבול של סדרה בעזרת הגדרת הגבול

במקרים שבהם ברור מהו אופן ההשתנות של איברי הסדרה, ניתן לשער האם הגבול קיים ומהו ערכו, ולבדוק את ההשערה על-פי הגדרת הגבול, ובאמצעות הכלים האלגבריים המדויקים שההגדרה מציגה. אם משערים שערך הגבול הוא A מתירים את האי-שוויון $|a_n - A| < \varepsilon$, שהוא האי-שוויון הרצוי. עלינו לצאת מאי-שוויון זה ולנסות להגיע לאי-שוויון מהצורה $n > K$, כאשר K תלוי רק ב- ε , אשר קיומו מבטיח את התקיימות "האי-שוויון הרצוי".

דוגמה

מצאו את הגבול של הסדרות הנתונות:

א. $\{\sqrt[n]{2}\}$; ב. $\left\{\frac{\sqrt{n}}{\pi - \sqrt{n}}\right\}$.

פתרון

א. נעריך את ההתנהגות של $\sqrt[n]{2}$ כאשר n הולך וגדל בדרך נומרית:

$$\sqrt{2} = 1.4142...$$

$$\sqrt[3]{2} = 1.2599...$$

$$\sqrt[4]{2} = 1.1892...$$

$$\sqrt[5]{2} = 1.1486...$$

$$\sqrt[6]{2} = 1.1224...$$

$$.....$$

$$\sqrt[10]{2} = 1.0717...$$

בשלב זה ניתן לשער כי הערך של $\sqrt[n]{2}$ שואף ל-1 כאשר n הולך וגדל, כלומר:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$$

נבדוק את ההשערה לפי הגדרת הגבול באמצעות אי-שוויונות. נבחר $\varepsilon > 0$ כלשהו ונרצה שיתקיים:

$$|\sqrt[n]{2} - 1| < \varepsilon$$

האם נוכל להבטיח קיום אי-שוויון זה החל מ- n מסוים?

כדי לענות על שאלה זו עלינו לחלץ את n מהאי-שוויון הרצוי, כלומר, לפתור אי-שוויון זה ביחס ל- n .

לשם כך, היות ו- $\sqrt[n]{2} > 1$, שני אגפי האי-שוויון חיוביים.

נוריד את סימן הערך המוחלט באי-שוויון לעיל ונעבור ממנו לאי-שוויונות שקולים, יותר פשוטים:

$$\sqrt[n]{2} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[n]{2} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$2 < (1 + \varepsilon)^n \Leftrightarrow$$

$$1 < n \cdot \log_2(1 + \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\log_2(1 + \varepsilon)} < n$$

אם נסמן $\log_2(1 + \varepsilon) = K$, נגיע למסקנה שאי-שוויון המוצא $|\sqrt[n]{2} - 1| < \varepsilon$ מתקיים לכל n המקיים את התנאי:

$$n > \frac{1}{K}, \text{ כאשר } K \text{ תלוי רק ב-} \varepsilon. \text{ לפי ההגדרה } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1, \text{ בכך הוכחנו את השערתנו.}$$

ב. נתבונן בסדרה $\left\{ \frac{\sqrt{n}}{\pi - \sqrt{n}} \right\}$. כאשר הערך של n הולך וגדל ללא מגבלה, אז גם הערך של $\sqrt{n}$ הולך וגדל ללא

מגבלה, וכאשר הוא נעשה גדול מאוד, המספר π במכנה השבר $\frac{\sqrt{n}}{\pi - \sqrt{n}}$ זניח בהשוואה למכנה כולו,

כך ש- $\frac{\sqrt{n}}{\pi - \sqrt{n}} \approx \frac{\sqrt{n}}{-\sqrt{n}} = -1$ עבור n גדול.

למשל: $\frac{\sqrt{10^8}}{\pi - \sqrt{10^8}} = \frac{10000}{\pi - 10000} = -1.00031\dots$

לכן השערתנו היא ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\pi - \sqrt{n}} = -1$.

כדי להוכיח אותה, נבחר ב- $\varepsilon > 0$ כלשהו ונרצה בקיום האי-שוויון:

$$\left| \frac{\sqrt{n}}{\pi - \sqrt{n}} - (-1) \right| < \varepsilon$$

או

$$\left| \frac{\sqrt{n}}{\pi - \sqrt{n}} + 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{\pi}{\sqrt{n} - \pi} \right| < \varepsilon$$

נניח מלכתחילה ש- $n \geq 10$. אזי $\sqrt{n} > \pi$, ואת האי-שוויון האחרון ניתן לרשום בצורה:

$$0 < \frac{\pi}{\sqrt{n} - \pi} < \varepsilon \quad \text{ולפתור באופן הבא:}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{n} - \pi} < \varepsilon \Leftrightarrow_{n \geq 10} \pi + \pi \cdot \varepsilon < \varepsilon \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{\pi + \pi \cdot \varepsilon}{\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi + \pi \cdot \varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 < n$$

$$\text{אם נסמן: } K = \max \left\{ 10, \left(\frac{\pi + \pi \cdot \varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \right\},$$

נגיע למסקנה שהאי-שוויון $\left| \frac{\sqrt{n}}{\pi - \sqrt{n}} - (-1) \right| < \varepsilon$ מתקיים עבור כל n המקיים את האי-שוויון: $n > K$.

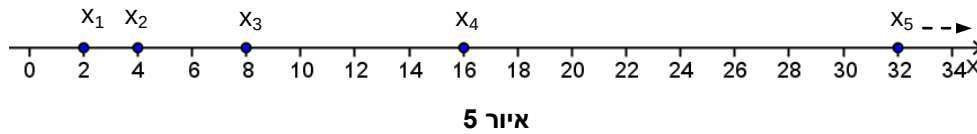
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\pi - \sqrt{n}} = -1 \quad \text{לפי ההגדרה,}$$

השערתנו הוכחה.

גבול אינסופי של סדרה

נתבונן בסדרה: $x_n = 2^n, n \in \mathbb{N}$. כאשר n הולך וגדל, הערך של x_n גם הוא הולך וגדל ללא מגבלה. באופן ויזואלי, הסדרה מוצגת על-ידי סדרת נקודות על ציר המספרים מימין לנקודה $x = 0$, המתרחקות מנקודה זו בכיוון חיובי (איור 5).

במצב זה ניתן לומר כי הסדרה שואפת (לא מתכנסת!) ל- ∞ , או שגבול הסדרה הוא ∞ ולכתוב: $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$.



הגדרת הגבול האינסופי של סדרה

אומרים שהגבול של סדרה $\{x_n\}$ הוא ∞ אם כאשר n הולך וגדל הערך של x_n נעשה גדול כרצוננו לכל n מספיק גדול, כלומר: לכל מספר חיובי $P > 0$ קיים מספר K כך שמתקיים: $x_n > P$ לכל n המקיים: $n > K$.

מסמנים: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ או $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

נבחר את ההגדרה באמצעות הסדרה $\{2^n\}$.

אם נרצה להבטיח שאיבר של הסדרה יהיה גדול מ-1000, כל שעלינו לעשות הוא לבחור n גדול מ-10, היות ו- $2^{10} = 1024$ ומכאן $2^n > 1000$, כאשר $n > 10$.

אם נרצה להבטיח שאיבר של הסדרה יהיה גדול מ- P כלשהו, כלומר $2^n > P$, כל שעלינו לעשות הוא לבחור n גדול מאשר $\log_2 P$ (מדוע?).

אישרנו, אם כך, על-פי ההגדרה, ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$.

הערה

אם לסדרה $\{x_n\}$ יש גבול ∞ , אומרים שהיא שואפת ל- ∞ ומסמנים: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

אבל לא ניתן לומר במקרה זה שהסדרה מתכנסת ל- ∞ . סדרה בעלת גבול ∞ היא סדרה **לא מתכנסת אלא מתבדרת**.

דוגמאות למציאת גבול אינסופי של סדרות

אם בהינתן סדרה, לאחר הערכת התנהגות איבריה עבור n הולך וגדל, בדרך נומרית ו/או איכותנית, מגיעים להשערה שהסדרה שואפת ל- ∞ , עלינו לבדוק השערה זו באמצעות אי-שוויונות המפרשים את ביטוי ההגדרה המילולית.

דוגמה 1

מצאו את גבול הסדרה $\{n^3\}$.

פתרון

כאשר n הולך וגדל, הערך של n^3 הולך וגדל גם הוא, ללא מגבלה. לכן השערנו היא שסדרה זו שואפת ל- ∞ . נבדוק אותה כפי שנדרש בהגדרה. נבחר $P > 0$ כלשהו ונרצה למצוא n שמקיים את אי השוויון:

$$n^3 > P$$

אי-שוויון זה מתקיים כאשר $n > \sqrt[3]{P}$

אכן, אם $n > \sqrt[3]{P}$ אז $n^3 > (\sqrt[3]{P})^3 = P$

ובמילים של ההגדרה: לכל מספר חיובי $P > 0$ קיים מספר $K = \sqrt[3]{P}$ כך שמתקיים: $x_n > P$ לכל $n > K$. לכן, לפי ההגדרה, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \infty$.

דוגמה 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n-1} = \infty \text{ הוכיחו כי}$$

פתרון

בהתאם להגדרה נבחר $P > 0$ כלשהו ונרצה שיהיה $\frac{n^2}{2n-1} > P$. אי-שוויון זה שקול לאי-שוויון:

$$n^2 > (2n-1)P$$

או

$$n^2 > 2nP - P$$

היות ו- $P > 0$, לקיום אי-שוויון זה מספיק להבטיח כי $n^2 > 2nP$ או $n > 2P$. אם נסמן $K = 2P$, נסיק כי מתקיים:

$$\frac{n^2}{2n-1} > P \text{ לכל } n \text{ המקיים: } n > K$$

לפי ההגדרה, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n-1} = \infty$, ובכך הושלמה ההוכחה.

באופן דומה ניתן להגדיר גם שאיפה של סדרה ל- $-\infty$:

אומרים שהגבול של סדרה $\{x_n\}$ הוא $(-\infty)$, או שסדרה שואפת ל- $(-\infty)$, אם כאשר n הולך וגדל הערך של x_n נעשה קטן כרצוננו לכל n מספיק גדול, כלומר: לכל מספר שלילי $M < 0$ קיים מספר K כך שמתקיים: $x_n < M$ לכל n המקיים: $n > K$.

הסימון: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ או $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (-\infty)$.

מהגדרה זו וההגדרה קודמת נובע כי אם $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \infty$ ולהיפך.

למשל, כפי שהוכח לעיל, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n-1} = \infty$. מכאן, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1-2n} = -\infty$.

הערה: לגבולות ∞ ו- $(-\infty)$ קוראים גבולות אינסופיים.

קריטריון לקיום גבול של סדרה

כל סדרה אינסופית אשר איבריה שייכים לסדרה $\{a_n\}$ נקראת תת-סדרה של $\{a_n\}$. נציין כי בהתאם להגדרה זו הסדרה $\{a_n\}$ היא תת-סדרה של עצמה.

משפט

לסדרה $\{a_n\}$ יש גבול, אם ורק אם לכל תת-סדרה אינסופית שלה יש אותו גבול.

נציין כי המשפט נותן קריטריון, כלומר תנאי מספיק והכרחי, לקיום גבול של סדרה מסוג כלשהו, סופי או אינסופי. על-פי המשפט, אם לשתי תת-סדרות אינסופיות שונות של הסדרה $\{a_n\}$ יש גבולות שונים, אזי לסדרה זו אין גבול.¹

דוגמה 1

האם הסדרה $\{(-1)^n\}$ היא סדרה מתכנסת או מתבדרת?

פתרון

הסדרה הנתונה בהצגה המפורשת היא: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

סדרה זו מכילה שתי תת-סדרות קבועות: תת-סדרה שכל איבריה הם 1 ותת-סדרה שכל איבריה הם (-1) .

הגבול של התת-סדרה הראשונה הוא (-1) והגבול של השנייה הוא 1. לפי המשפט לסדרה $\{(-1)^n\}$ אין גבול. סדרה זו היא סדרה מתבדרת.

דוגמה 2

האם לסדרה $\{2^n \cos n\pi\}$ יש גבול, סופי או אינסופי?

¹ את הוכחת המשפט ניתן למצוא בספרו של מייזלר, (מייזלר, 1968) עמוד 59.

פתרון

הסדרה הנתונה בהצגתה המפורשת היא:

$$-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, \dots$$

קל לראות שהתת-סדרה של איברים העומדים במקומות זוגיים שואפת ל- $(-\infty)$, והתת-סדרה של שאר האיברים שואפת ל- ∞ . מכאן לסדרה אין גבול מסוג כלשהו.

נסיים סעיף זה במספר משימות. לנוחיות נזכיר הגדרות של תכונות של סדרות:

(1) הסדרה $\{x_n\}$ נקראת סדרה חסומה אם $|x_n| < C$ לכל $n \in \mathbb{N}$ (C מספר קבוע).

(2) הסדרה $\{x_n\}$ נקראת סדרה עולה אם $x_{n+1} > x_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

(3) הסדרה $\{x_n\}$ נקראת סדרה יורדת אם $x_{n+1} < x_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

(4) הסדרה $\{x_n\}$ נקראת סדרה מונוטונית אם היא סדרה עולה או סדרה יורדת.

משימות

1. הביאו, אם אפשר, דוגמאות לסדרות שמקיימות את הדרישות הרשומות מטה. אם לא ניתן להביא דוגמה – הסבירו מדוע.

א. סדרה חסומה שאיננה מתכנסת.

ב. סדרה מתכנסת שאיננה חסומה.

ג. סדרה מתבדרת שאינה שואפת ל- ∞ או ל- $(-\infty)$.

ד. סדרה יורדת מתבדרת.

ה. סדרה מתכנסת לא מונוטונית.

2. עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

א. לכל סדרה מונוטונית יש גבול.

ב. כל סדרה מונוטונית היא סדרה מתכנסת.

ג. כל סדרה בעלת גבול היא סדרה חסומה.

ד. כל סדרה מונוטונית חסומה היא סדרה מתכנסת.

ה. אם הסדרה מתבדרת אז גם כל תת-סדרה שלה מתבדרת.

גבול של פונקציה

בשונה מסדרה שבה המשתנה n הוא מספר טבעי אשר יכול לשאוף רק לאינסוף, המשתנה x בפונקציה הוא מספר ממשי שיכול לשאוף למספר או ל- ∞ או ל- $-\infty$. בהתאם, נבחין בין גבול של פונקציה בנקודה, לבין גבול של פונקציה כאשר המשתנה החופשי שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$. כיוון שבכל אחד מן המקרים הגבול יכול להיות סופי או אינסופי, ההגדרה של המושג "גבול של פונקציה", מורכבת ממקרים פרטיים רבים. לפני ההגדרות נציג שתי דוגמאות.

דוגמה 1

נתבונן בפונקציה $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. הפונקציה אינה מוגדרת כאשר $x = 2$. במקרה זה מתבקשת השאלה מה נוכל לומר על ערכי הפונקציה כאשר ערכי x הולכים ומתקרבים ל-2.

נשים לב כי ניתן לפשט את תבנית הפונקציה ולקבל, לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה ($x \neq 2$);

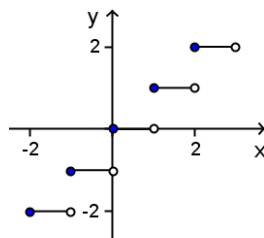
$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$$

עכשיו התשובה נראית ברורה. כאשר ערכי x מתקרבים ל-2 באיזשהו אופן (באופן מונוטוני מצד אחד או בקפיצות משני הצדדים) ערכי הפונקציה מתקרבים באותו אופן ל- $2+2=4$. במקרה זה אומרים שלפונקציה הנתונה יש גבול בנקודה $x = 2$.

דוגמה 2

נתבונן בפונקציית הערך השלם $y = [x]$. פונקציה זו מוגדרת לכל x ממשי.

מה אפשר לומר על ערכי הפונקציה כאשר המשתנה הבלתי תלוי x הולך ומתקרב ל-2?



איור 6

הפעם אין בידינו תשובה חד-משמעית. כאשר מתקרבים ל-2 בעזרת סדרה של ערכי x קטנים מ-2, כל ערכי הפונקציה שווים 1. לעומת זאת כאשר מתקרבים ל-2 בעזרת סדרה של ערכי x גדולים מ-2, כל ערכי הפונקציה שווים 2.

במקרה זה ניתן לומר שבנקודה $x = 2$ קיימים שני גבולות חד-צדדיים: הגבול משמאל השווה ל-1 והגבול מימין השווה ל-2.

השוני בגבולות החד-צדדיים מעיד כי הגבול של הפונקציה $y = [x]$ בנקודה $x = 2$ אינו קיים.

גבול סופי ואינסופי של פונקציה בנקודה

הגדרה של גבול סופי של פונקציה בנקודה

תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בסביבת הנקודה $x = x_0$, למעט, אולי, נקודה זו. מספר ממשי A נקרא גבול של $f(x)$ בנקודה x_0 , אם הערך של $f(x)$ קרוב למספר A כרצוננו לכל $x \neq x_0$ אשר מספיק קרוב ל- x_0 , כלומר: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ (התלוי ב- ε) כך, שמתקיים: $|f(x) - A| < \varepsilon$ לכל x המקיים: $0 < |x - x_0| < \delta$.

סימון: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ או $f(x) \rightarrow A$ כ- $x \rightarrow x_0$.

הגדרה של גבול אינסופי של פונקציה בנקודה

תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בסביבת הנקודה $x = x_0$, למעט, אולי, נקודה זו. אומרים שגבול הפונקציה בנקודה x_0 הוא ∞ , אם הערך של $f(x)$ גדול כרצוננו לכל $x \neq x_0$ אשר מספיק קרוב ל- x_0 , כלומר: לכל $P > 0$ קיים $\delta > 0$ (התלוי ב- P) כך שמתקיים: $f(x) > P$ לכל x המקיים: $0 < |x - x_0| < \delta$.

סימון: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ או $f(x) \rightarrow \infty$ כ- $x \rightarrow x_0$.

הגדרה דומה ניתן להציג לגבול $(-\infty)$ של פונקציה בנקודה. ניתן גם לתת הגדרה נוספת: הגבול של $f(x)$ בנקודה x_0 הוא $(-\infty)$ אם ורק אם הגבול של $g(x) = -f(x)$ באותה נקודה הוא ∞ .

סימון: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ או $f(x) \rightarrow -\infty$ כ- $x \rightarrow x_0$.

גבולות חד-צדדיים של פונקציה בנקודה

הגבול מימין

יהי $r > 0$ מספר חיובי כלשהו. תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בקטע $(x_0, x_0 + r)$. אם בהגדרות הגבולות לעיל נוסיף את התנאי $x > x_0$ נקבל הגדרות של גבול של $f(x)$ בנקודה x_0 מצד ימין המסומן:

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

המקרים האפשריים:

או $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$

, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$

בנקודה $x = x_0$ לא קיים גבול מימין לפונקציה $f(x)$.

הגבול משמאל

יהי $r > 0$ מספר חיובי כלשהו. תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בקטע $(x_0 - r, x_0)$, אם בהגדרות של גבולות הפונקציה בנקודה נוסיף את התנאי $x < x_0$, נקבל הגדרות של גבול של $f(x)$ בנקודה x_0 מצד שמאל המסומן: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ המקרים האפשריים עבור גבול זה דומים לאלה שצוינו לעיל עבור גבול מימין.

גבול מימין וגבול משמאל של $f(x)$ בנקודה $x = x_0$ נקראים **גבולות חד-צדדיים** של $f(x)$ בנקודה $x = x_0$.

סימון	פירוש	דוגמה גרפית
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$	לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = x_0$ יש גבול סופי משמאל A .	
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$	לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = x_0$ יש גבול משמאל ∞ .	
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$	לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = x_0$ יש גבול משמאל $-\infty$.	
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$	לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = x_0$ יש גבול סופי מימין A .	
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$	לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = x_0$ יש גבול מימין ∞ .	
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$	לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = x_0$ יש גבול מימין $-\infty$.	

טבלה 1: גבולות חד-צדדיים של פונקציה $f(x)$ בנקודה $x = x_0$

קריטריון לקיום הגבול של פונקציה בנקודה במונחי גבולות חד-צדדיים

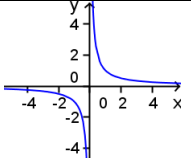
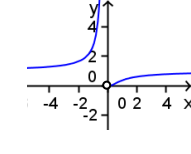
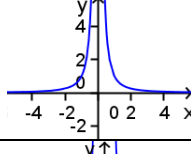
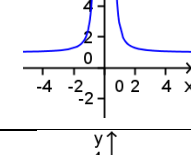
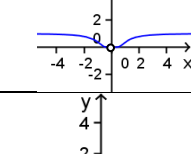
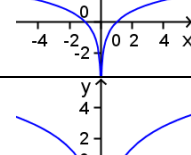
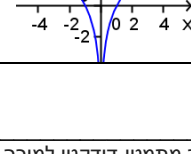
לפונקציה המוגדרת בסביבה דו-צדדית $(x_0 - r, x_0 + r)$, למעט, אולי, הנקודה $x = x_0$, יש גבול בנקודה $x = x_0$, אם ורק אם בנקודה זו קיימים שני גבולות חד-צדדיים (סופיים או אינסופיים) השווים זה לזה, כלומר:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

הטענה נובעת מהגדרות גבולות וגבולות חד-צדדיים של פונקציה בנקודה.

הערה: במקרה ו- $f(x)$ מוגדרת רק מצד אחד של הנקודה $x = a$, ניתן להגדיר בה גבול חד-צדדי אחד בלבד של $f(x)$, וגבול זה מתקבל בתור גבול של פונקציה בנקודה: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

הטבלה הבאה מציגה רשימה של פונקציות עם גבולותיהן החד-צדדים בנקודה $x = 0$, ומציינת את קיומו או אי-קיומו של הגבול על סמך הקריטריון שהוצג. בעמודה האחרונה סורטטו הגרפים של פונקציות בסביבת $x = 0$.

תיאור גרפי	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$	$f(x)$
	אינו קיים	$-\infty$	∞	$\frac{1}{x}$
	אינו קיים	∞	0	$e^{\frac{1}{x}}$
	∞	∞	∞	$\frac{1}{x^2}$
	∞	∞	∞	$e^{\frac{1}{x^2}}$
	0	0	0	$e^{-\frac{1}{x^2}}$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\ln x $
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\ln(x^2)$

טבלה 2: גבולות חד-צדדיים

גבול של פונקציה ב- ∞

תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בתחום $x > C$. בטבלה להלן מוצגות הגדרות של גבול של $f(x)$

ב- ∞ , המסומן $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, בשלושה מקרים: גבול סופי, גבול ∞ וגבול $(-\infty)$.

כל הגדרה ניתנת בצורה מילולית המלווה בפירוש באמצעות אי-שוויונות.

מושג וסימונו	הגדרה	פירוש ההגדרה
גבול סופי A של פונקציה ב- ∞ : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$	המספר A נקרא גבול של $f(x)$ ב- ∞ אם הערך של $f(x)$ קרוב ל- A כרצוננו לכל ערך מספיק גדול של x .	לכל מספר $\varepsilon > 0$ קיים מספר S (התלוי ב- ε), כך שמתקיים: $ f(x) - A < \varepsilon$ לכל x המקיים: $x > S$.
גבול ∞ של פונקציה ב- ∞ : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	הגבול של $f(x)$ ב- ∞ הוא ∞ אם הערך של $f(x)$ גדול כרצוננו לכל ערך מספיק גדול של x .	לכל מספר $P > 0$ קיים מספר S (התלוי ב- P), כך שמתקיים: $f(x) > P$ לכל x המקיים: $x > S$.
גבול $-\infty$ של פונקציה ב- ∞ : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$	הגבול של $f(x)$ ב- ∞ הוא $(-\infty)$ אם הערך של $f(x)$ קטן כרצוננו לכל ערך מספיק גדול של x .	לכל מספר $M < 0$ קיים מספר S (התלוי ב- M), כך שמתקיים: $f(x) < M$ לכל x המקיים: $x > S$.

טבלה 3: הגדרות גבולות של פונקציה ב- ∞

גבול של פונקציה ב- $(-\infty)$

תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בתחום $x < C$. בטבלה להלן מוצגות הגדרות של גבול של $f(x)$

ב- $(-\infty)$, המסומן $\lim_{x \rightarrow (-\infty)} f(x)$, בשלושה מקרים: גבול סופי, גבול ∞ וגבול $(-\infty)$.

כל הגדרה ניתנת בצורה מילולית המלווה בפירוש באמצעות אי-שוויונות.

פירוש ההגדרה	הגדרה	מושג וסימונו
לכל מספר $\varepsilon > 0$ קיים מספר T (התלוי ב- ε), כך שמתקיים: $ f(x) - A < \varepsilon$ לכל x המקיים: $x < T$.	המספר A נקרא גבול של $f(x)$ ב-$(-\infty)$, אם הערך של $f(x)$ יהיה קרוב ל-A כרצוננו, לכל ערך מספיק קטן של x.	גבול סופי של פונקציה ב-$(-\infty)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$
לכל מספר $P > 0$ קיים מספר T (התלוי ב- P), כך שמתקיים: $f(x) > P$ לכל x המקיים: $x < T$.	הגבול של $f(x)$ ב-$(-\infty)$ הוא ∞, אם הערך של $f(x)$ יהיה גדול כרצוננו, לכל ערך מספיק קטן של x.	גבול ∞ של פונקציה ב-$(-\infty)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
לכל מספר $M < 0$ קיים מספר T (התלוי ב- M), כך שמתקיים: $f(x) < M$ לכל x המקיים: $x < T$.	הגבול של $f(x)$ ב-$(-\infty)$ הוא $(-\infty)$, אם הערך של $f(x)$ יהיה קטן כרצוננו, לכל ערך מספיק קטן של x.	גבול $(-\infty)$ של פונקציה ב-$(-\infty)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

טבלה 4: הגדרות גבולות של פונקציה ב- $(-\infty)$

דוגמה: מצאו את גבולות הפונקציה $f(x) = e^x$ ב- ∞ וב- $-\infty$.

פתרון

הפונקציה $f(x) = e^x$ מוגדרת בכל ציר ה- x . כאשר x חיובי וגדול, הערך של e^x גם הוא גדול.

לכן ההשערה היא כי $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$.

נבדוק את ההשערה על-פי ההגדרה באמצעות האי-שוויונות.

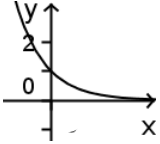
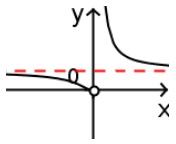
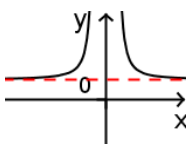
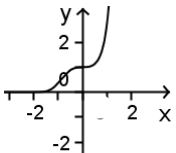
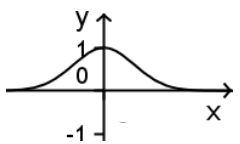
יהי $P > 0$ מספר חיובי כלשהו. האי-שוויון $e^x > P$ מתקיים לכל $x > \ln P$. אם נסמן $T = \ln P$, נקבל, על-פי ההגדרה, כי $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, ובכך מאשרים את ההשערה.

כאשר x שלילי וקטן (רחוק מ-0), הערך של e^x חיובי וקרוב ל-0, למשל, $e^{-1000} = \frac{1}{e^{1000}} \approx 0$.

לכן משערים כי $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. נבדוק את ההשערה על-פי ההגדרה באמצעות האי-שוויונות.

יהי $\varepsilon > 0$ מספר חיובי כלשהו. האי-שוויון $|e^x - 0| < \varepsilon$ או $e^x < \varepsilon$ מתקיים לכל $x < \ln \varepsilon$. אם נסמן $T = \ln \varepsilon$, נקבל, על-פי ההגדרה, כי $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, ובכך נאשר את ההשערה.

בטבלה הבאה מוצגות תוצאות חקירה של גבולות של e^x שהתקבלו לעיל ומובאות דוגמאות נוספות של גבולות פונקציות מעריכיות ב- ∞ וב- $-\infty$, עם סרטוט הגרפים שלהן.

גרף	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$f(x)$
	0	∞	e^{-x}
	1	1	$e^{\frac{1}{x}}$
	1	1	$e^{\frac{1}{x^2}}$
	∞	0	$e^{(x^3)}$
	0	0	$e^{(-x^2)}$

טבלה 5: גבולות של פונקציות ב- ∞ וב- $-\infty$

הקשר בין גבול של סדרה לגבול של פונקציה

הגדרת מושג הגבול של פונקציה על בסיס מושג הגבול של סדרה (הגדרה לפי היינה)

הגדרת הגבול שהוצגה לעיל נקראת הגדרת גבול לפי קושי, על שם המתמטיקאי הצרפתי A.L.Cauchy (1789 - 1857)

נציג כעת את הגדרת הגבול לפי היינה, על שם המתמטיקאי הגרמני H.E.Heine (1821-1881), ובהמשך נדון בשקילות שתי ההגדרות.

הגדרת גבולות פונקציה באמצעות גבולות של סדרות

1. תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת הנקודה $x = x_0$, למעט, אולי, נקודה זו עצמה. אומרים כי הגבול של $f(x)$ בנקודה זו הוא $-\infty/\infty/A$ אם לכל סדרה $\{x_n\}$ של ערכי משתנה $x \neq x_0$ המתכנסת ל- x_0 , סדרת ערכי הפונקציה $\{f(x_n)\}$ שואפת ל- $-\infty/\infty/A$.
2. תהי $f(x)$ מוגדרת בתחום $x > C$. אומרים כי הגבול של $f(x)$ ב- ∞ הוא $-\infty/\infty/A$ אם לכל סדרה $\{x_n\}$ של ערכי משתנה x השואפת ל- ∞ , סדרת ערכי הפונקציה $\{f(x_n)\}$ שואפת ל- $-\infty/\infty/A$.
3. תהי $f(x)$ מוגדרת בתחום $x < C$. אומרים כי הגבול של $f(x)$ ב- $(-\infty)$ הוא $-\infty/\infty/A$ אם לכל סדרה $\{x_n\}$ של ערכי משתנה x השואפת ל- $(-\infty)$, סדרת ערכי הפונקציה $\{f(x_n)\}$ שואפת ל- $-\infty/\infty/A$.

הערה

להגדרת גבולות בדרך שלעיל קוראים "ההגדרה לפי היינה". גבולות חד-צדדיים של $f(x)$ בנקודה $x = a$ ניתן להגדיר לפי היינה. לשם כך, יש לדרוש בהגדרה הראשונה לעיל, שכל סדרה $\{x_n\}$ תשאף לנקודה $x = a$ מצד אחד מתאים.

השוואת הגדרות הגבול לפי היינה ולפי קושי

קל לראות מההגדרות כי גבול בהגדרת קושי הוא גם גבול בהגדרת היינה. גם הטענה ההפוכה נכונה: גבול בהגדרת היינה הוא גם גבול בהגדרת קושי², כלומר, הגדרות גבול לפי קושי ולפי היינה הן הגדרות שקולות.

מתי כדאי להשתמש בכל אחת מההגדרות?

הגדרת קושי, בדרך כלל, יותר נוחה מהגדרת היינה לבדיקה אלגברית (באמצעות אי-שוויונות) אם הערך המשוער הוא אכן גבול של פונקציה, כי היא מונעת צורך להתייחס בבדיקה לאינסוף סדרות שונות. מאותה סיבה, הגדרת קושי יותר נוחה להוכחת משפטים על תכונות של גבולות.

הגדרת היינה מאוד נוחה להוכחת אי-קיום של גבול של פונקציה. אם מתברר שיש סדרת ערכים של פונקציה, שבתהליך מסוים אין לה גבול, או שיש שתי סדרות עם גבולות שונים, אזי המסקנה המידית, על-פי הגדרת גבול של פונקציה לפי היינה, שלפונקציה זו בתהליך זה הגבול אינו קיים.

² את ההוכחה ניתן למצוא בספרו של מייזלר (1968) בעמוד 138.

דוגמה

האם לפונקציה $f(x) = x \sin x$ קיים גבול באינסוף?

פתרון

נתבונן בשתי סדרות של ערכי x : $x'_n = \pi n$ ו- $x''_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ כאשר $n \in \mathbb{N}$. כל אחת מהסדרות שואפת ל- ∞ .

הסדרות המתאימות של ערכי הפונקציה הן $y'_n = 0$ ו- $y''_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ כאשר $n \in \mathbb{N}$.

הגבול של הסדרה הראשונה הוא 0 והגבול של הסדרה השנייה הוא ∞ .

מעובדה זו והגדרת הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ לפי היינה, מסיקים כי הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$ סופי או אינסופי, אינו קיים.

גבולות של פונקציות אלמנטריות

בעמוד 25 הוצגה רשימה של פונקציות אלמנטריות בסיסיות.

כל פונקציה המתקבלת ממספר סופי של פונקציות אלמנטריות בסיסיות, באמצעות מספר סופי של פעולות חשבון ופעולות הרכבה, נקראת **פונקציה אלמנטרית**. האנליזה מתמקדת בפעילויות בפונקציות אלמנטריות ובחקירתן.

את הפונקציות האלמנטריות מאפיינת תכונה המוצגת במשפט הבא, המובא כאן ללא הוכחה.

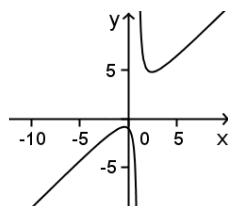
משפט

אם $f(x)$ היא פונקציה אלמנטרית, אזי בכל נקודת x_0 בה הפונקציה מוגדרת, קיים גבול סופי של $f(x)$ ומתקיים: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

השלכתו החשובה ביותר של המשפט: גבולות של כל פונקציה אלמנטרית, בנקודות בהן הפונקציה מוגדרת, ניתן למצוא באופן מידי על-ידי חישוב של ערך הפונקציה בנקודה זו. האתגר הוא חישוב גבולות באותן הנקודות אשר אינן שייכות לתחום הפונקציה אבל גבולות לתחום זה, כלומר, נמצאות בשפתו.

דוגמה

הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ (איור 7)



איור 7

פונקציה זו היא פונקציה אלמנטרית כי היא מתקבלת משלוש פונקציות אלמנטריות בסיסיות $1, x^2, x$ על-ידי שלוש פעולות חשבון: חיבור, חיסור וחילוק. היא מוגדרת בכל נקודה, למעט $x = 1$. לכן לכל $x_0 \neq 1$ מחשבים את הגבול על-ידי הצבת ערך ה- x בתבנית הפונקציה.

למשל:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{(-2)^2 + 1}{-2 - 1} = -\frac{5}{3}$$

בנקודת האי-הגדרה $x = 1$ מתקיים:

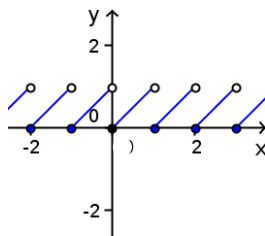
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty$$

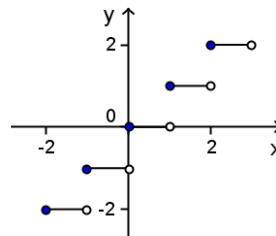
לכן הגבול $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \infty$ אינו קיים.

לפונקציות שאינן אלמנטריות, הגבול בנקודת הגדרה לא חייב להיות שווה לערך של הפונקציה בנקודה זו. נתבונן בפונקציות הבאות: פונקציית הסימן $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (איור 8), פונקציית החלק השלם $g(x) = [x]$ (איור 9) ופונקציית החלק השברי $h(x) = x - [x]$ (איור 10).

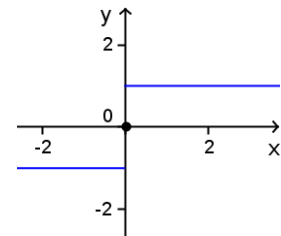
באיורים 8-10 מוצגים הגרפים של שלוש הפונקציות.



איור 10



איור 9

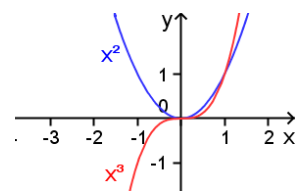
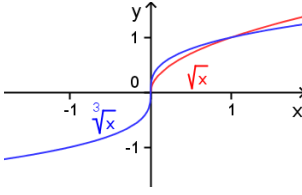
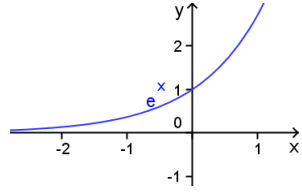
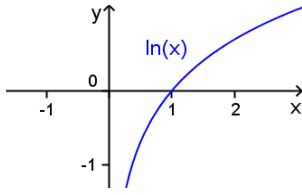
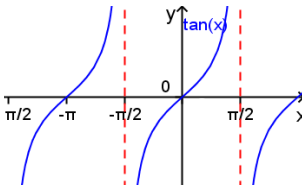
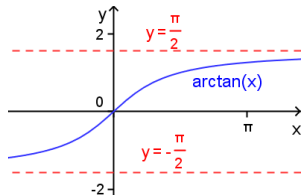


איור 8

כל אחת מהפונקציות האלה מוגדרת לכל x ממשי, ולכל אחת יש נקודות בהן לפונקציה אין גבול, סופי או אינסופי. לפונקציה $f(x) = \operatorname{sgn} x$ נקודה כזאת היא $x = 0$, ולפונקציות $g(x) = [x]$ ו- $h(x) = x - [x]$ כל נקודה שבה $x = m \in \mathbb{Z}$.

דוגמאות אלה מראות כי קיום גבול של פונקציה בכל נקודת הגדרתה, ושוויון הגבול לערך הפונקציה בנקודה, מובטחים רק עבור פונקציות אלמנטריות. נושא זה מטופל ביתר פירוט בפרק "רציפות של פונקציות".

בטבלה 6 מוצגים גבולות של פונקציות אלמנטריות בסיסיות בשפת תחום ההגדרה

גרף הפונקציה	גבולות בשפת תחום ההגדרה	תחום הגדרה	$f(x)$
	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & n = 2, 4, 6, \dots \\ -\infty, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$	$(-\infty, \infty)$	x^n ($n \in \mathbb{N}$)
	$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{0} = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty, \quad n = 1, 3, 5, \dots$	$(-\infty, \infty), \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$ $[0, \infty), \quad n = 2, 4, 6, 8, \dots$	$\sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}$)
	$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	$(-\infty, \infty)$	e^x
	$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$	$(0, \infty)$	$\ln x$
	בכל נקודות האי-הגדרה הגבול משמאל הוא ∞, והגבול מימין הוא $(-\infty)$. הגבול ב-∞ וגם ב-$(-\infty)$ אינו קיים.	$(-\infty, \infty) \setminus \left\{ (2n-1)\frac{\pi}{2} \right\}$	$\tan x$
	$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$	$(-\infty, \infty)$	$\arctan x$

טבלה 6: גבולות של פונקציות אלמנטריות בסיסיות בשפת תחום ההגדרה

חישוב גבולות

תהליך מציאת גבולות ישירות על-פי הגדרתם, כרוך בהשערתם המקדימה ובהתרת אי-שוויונות לא תמיד פשוטים. לכן זה יכול להיות לעתים תהליך מייגע. דרך נוחה יותר היא להסיק מהגדרות הגבולות משפטים כלליים, אשר במקרים רבים מקלים מאוד על חישובי הגבולות.

משפט על גבולות של פונקציות המתקבלות בפעולות חשבון

יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה $x = x_0$, למעט, אולי, הנקודה עצמה. אם קיימים גבולות סופיים:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$$

אזי קיימים גם גבולות של סכום, הפרש ומכפלת פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודה $x = x_0$, ומתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = A - B,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

$$\text{אם בנוסף } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq 0, \text{ אזי קיים גם הגבול: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

נדגים הוכחת טענות המשפט על בסיס ההגדרה של גבול פונקציה בנקודה. בהינתן $\varepsilon > 0$, מקיום הגבולות (1), ו- (2), על-פי הגדרת גבול פונקציה בנקודה, נובע כי קיים $\delta > 0$ כך שמתקיים:

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right. \text{ כאשר } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

מכאן נובע כי:

$$\left| (f(x) + g(x)) - (A + B) \right| = \left| (f(x) - A) + (g(x) - B) \right|$$

$$\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\text{ומכאן נובע כי: } \left| (f(x) + g(x)) - (A + B) \right| < \varepsilon \text{ כאשר } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

$$\text{לכן, על-פי הגדרת גבול פונקציה בנקודה, קיים: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B.$$

בדרך דומה מוכיחים את שאר הטענות של המשפט.

משפט הסנדוויץ'

יהיו $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ שלוש פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה $x = x_0$, למעט, אולי, הנקודה עצמה, המקיימות בסביבה זו את התנאי:

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{כאשר } 0 < |x - x_0| < r. \quad (*)$$

אזי אם קיימים שני גבולות סופיים שווים:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \quad (**)$$

קיים גם גבול:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$$

הוכחה

יהי נתון $\varepsilon > 0$. אזי מהתנאים $(**)$ ו- $(*)$ נובע כי קיים $\delta > 0$ כך שמתקיים:

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(x) - A| < \varepsilon \\ |g(x) - A| < \varepsilon \end{array} \right. \quad \text{כאשר } 0 < |x - x_0| < \delta. \quad (1)$$

וגם:

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{כאשר } 0 < |x - x_0| < \delta. \quad (2)$$

מ-(2) ו-(1) נובע כי:

$$-\varepsilon < f(x) - A \leq h(x) - A \leq g(x) - A < \varepsilon \quad \text{כאשר } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

לכן:

$$-\varepsilon < h(x) - A < \varepsilon \quad \text{כאשר } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

או:

$$|h(x) - A| < \varepsilon \quad \text{כאשר } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

מכאן, על-פי הגדרת גבול של פונקציה בנקודה, מסיקים כי קיים $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$. בכך הוכח משפט הסנדוויץ'.
הקוראים מוזמנים להשתמש במשפט הסנדוויץ' כדי להוכיח את המסקנה הבאה:

משפט על מכפלת פונקציה חסומה ופונקציה השואפת לאפס

אם הפונקציה $f(x)$ חסומה בסביבה מסוימת של הנקודה $x = x_0$, והפונקציה $g(x)$ שואפת ל-0 כאשר $x \rightarrow x_0$, אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$.

את הוכחת משפט זה על סמך משפט הסנדוויץ' אנו משאירים לקוראים.

דוגמה: הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ חסומה בסביבה כלשהי של $x = 0$ שאינה כוללת את $x = 0$ ו- $x^2 \rightarrow 0$ כאשר $x \rightarrow 0$.
 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ לכן $x \rightarrow 0$.

בחישוב גבולות משתמשים גם במשפט הבא.

משפט על הגבול של פונקציה מורכבת³

תהי נתונה פונקציה מורכבת $f(x) = v\left(u(x)\right)$, ומתקיימים התנאים הבאים:

א. הפונקציה $u(x)$ מוגדרת בסביבה נתונה של הנקודה $x = x_0$, וקיים גבול $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$.

ב. הפונקציה $v(y)$ מוגדרת בסביבה נתונה של הנקודה $y = y_0$, וקיים גבול $L = \lim_{y \rightarrow y_0} v(y)$.

אזי לפונקציה המורכבת $f(x)$ קיים בנקודה $x = x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

הערה: המשפט נשאר תקף גם כאשר במקום נקודה x_0 או y_0 מופיע ∞ או $(-\infty)$.

חישוב גבולות של פונקציות מתבצע למעשה, בדרך כלל, על סמך הידע שיש לנו על גבולות של פונקציות אלמנטריות והמשפטים על גבולות שהובאו לעיל. ידע זה מאפשר לחשב גבולות מבלי להשתמש בהגדרותיהם.

לנוחות הקורא נסכם את הידע הנדרש לחישוב גבולות.

אבני יסוד לחישוב גבולות של פונקציות בנקודה - סיכום

גבולות של פונקציות אלמנטריות

אם $f(x)$ פונקציה אלמנטרית והנקודה $x = x_0$ שייכת לתחום הגדרתה, אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, כלומר: הגבול

של פונקציה בנקודה מחושב ישירות כערך שלה בנקודה זו.

אם $f(x)$ פונקציה אלמנטרית והנקודה $x = x_0$ לא שייכת לתחום הגדרתה, אבל גובלת לו, אזי הגבול $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

מחושב על-פי הגבולות הידועים של פונקציות אלמנטריות בסיסיות בשפת תחום ההגדרה. (ר' טבלה בעמוד 80)

³ את הוכחת המשפט ניתן לראות בספרו של מייזלר (1968) בעמוד 221.

משפטים על חוקי גבולות בפעולות חשבון בפונקציות

גבול של סכום / הפרש/מכפלה/מנה של שתי פונקציות מחושב, כסכום/הפרש/מכפלה/מנה של גבולות פונקציות אלה, למעט המקרים הבאים:

- i. בחישוב הגבול של מנה גבול המכנה הוא 0,
- ii. בחישוב הגבול מתקבלים מצבים שדורשים טיפול מיוחד, שנקרא להם מצבי אי-וודאות, מסוג " $\infty - \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $0 \cdot \infty$ ".

כלים להתמודדות במצבי אי-וודאות

במקרה ובחישוב גבול של ביטוי כלשהו מתקבל אחד ממצבי האי-וודאות הנ"ל, יש להתמודד אתו על-ידי פישוט מתאים של הביטוי או/ו שימוש נאות בכלל לופיטל.

משפט הסנדוויץ' והשלכותיו

אם שתי פונקציות בתהליך מסוים שואפות לאותו גבול, אז כל פונקציה הכלואה ביניהן שואפת גם היא לאותו גבול. המכפלה של פונקציה אשר שואפת ל-0 ופונקציה חסומה היא פונקציה השואפת לאפס.

$$\text{אם } |g(x)| \leq |f(x)| \text{ ו- } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ אז גם } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

משפט על הגבול של פונקציה מורכבת

תהי λ נקודה סופית על ציר המספרים, או ∞ או $(-\infty)$, ויהי $\Lambda = \lim_{x \rightarrow \lambda} g(x)$. אזי: $\lim_{x \rightarrow \lambda} f(g(x)) = \lim_{X \rightarrow \Lambda} f(X)$.

דוגמה לחישוב גבול

$$\text{מהו הערך של הגבול: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 1}{x - 1} + 2^{-\frac{1}{x^2}} \right) ?$$

פתרון

על סמך החוק לגבול של סכום:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 1}{x - 1} + 2^{-\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 1}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 0} 2^{-\frac{1}{x^2}}$$

היות והפונקציה $\frac{2^x + 1}{x - 1}$ היא פונקציה אלמנטרית, והנקודה $x = 0$ שייכת לתחום ההגדרה של פונקציה זו, את

הגבול הראשון ניתן למצוא מיידית על-ידי ההצבה של $x = 0$ בתבנית הפונקציה וחישוב הערך המתקבל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 1}{x - 1} = \frac{2^0 + 1}{0 - 1} = -2$$

הפונקציה $2^{-\frac{1}{x^2}}$ גם היא פונקציה אלמנטרית, אבל הנקודה $x = 0$ אינה שייכת לתחום הגדרתה אלא גובלת לו. מהתכונות של פונקציות אלמנטריות בסיסיות אנחנו יודעים כי:

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} 2^u = 0 \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty \quad (1)$$

על-פי המשפט על הגבול של פונקציה מורכבת, מ- (1) ו- (2) נוכל להסיק כי $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

לכן, הערך של הגבול הנתון הוא $-2 + 0 = -2$.

חומר למחשבה - תשובות

לסיום הפרק נחזור אל השאלות שפתחו אותו (עמודים 59 - 60) ונשיב עליהן תוך חישוב גבולות.

האם אכילס ישיג את הצב?

פתרון

נציג תחילה פתרון חישובי לשאלה.

נסמן ב- t את הזמן בשניות הדרוש לאכילס כדי לעבור 100 מטרים ראשונים. אכילס יהיה אחרי הצב במשך הזמן

$$T = t + \frac{t}{10} + \frac{t}{100} + \frac{t}{1000} + \dots + \frac{t}{10^n} + \dots$$

בסכום זה יש אינסוף מחוברים הולכים וקטנים - שואפים לאפס.

נחשב את משך הזמן T תוך שימוש בנוסחה של סכום סדרה הנדסית אינסופית:

$$T = \frac{a_1}{1-q} = \frac{t}{1-0.1} = \frac{t}{0.9} = \frac{10}{9}t$$

מכאן, אכילס ישיג את הצב T שניות לאחר תחילת הריצה. למשל, אם הוא עובר 100 מטרים ב-9 שניות, אז הוא ישיג את הצב 10 שניות לאחר תחילת הריצה, $111.\bar{1}$ מטרים מנקודת המוצא שלו.

השאלה האמיתית איננה, כמובן, אם אכילס ישיג את הצב.

השאלה היא מה יש בטיעונו של זנון שגורם לו להישמע כנכון, ואשר העסיק מתמטיקאים ופילוסופים במשך שנים רבות.

הצלחתו של זנון לערער, ולו במקצת, את הידיעה הברורה שאכילס ישיג את הצב, נעוצה בקושי שלנו לתפוס שתהליך בן אינסוף שלבים מתרחש בזמן סופי, ואפילו קצר מאוד, שגודל סופי ניתן לחלק לאינסוף חלקים, ומאינסוף חלקים ניתן לחבר גודל סופי. במתמטיקה החיבור הזה מתבצע באמצעות גבולות.

השבר $0.\dot{9}$ קטן מ-1 או שווה ל-1?

פתרון

השבר האינסופי $0.\dot{9}$ הוא גבול הסדרה האינסופית $0.9, 0.99, 0.9999\dots$ שכל איבריה קטנים מ-1.

האם גם $0.\dot{9} < 1$?

התשובה שלילית. למרות שכל איברי הסדרה קטנים מ-1, גבול הסדרה, $0.\dot{9}$, שווה ל-1.

גם הפעם נציג תחילה חישובים אלגבריים

דרך א: בדומה למקרה הקודם, נוכל לחשב את ערכו של השבר כסכום של סדרה הנדסית מתכנסת.

$$0.\dot{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \dots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0.9}{1-0.1} = 1$$

דרך ב: נבצע תהליך שבאמצעותו מציגים שברים עשרוניים אינסופיים מחזוריים כמנה של מספרים שלמים.

כשכופלים $0.\dot{9}$ ב-10 מקבלים מספר בעל אותו חלק שברי: $10 \cdot 0.\dot{9} = 9.\dot{9}$

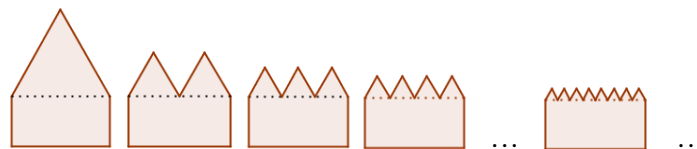
מכאן: $9 \cdot 0.\dot{9} = 10 \cdot 0.\dot{9} - 0.\dot{9} = 9.\dot{9} - 0.\dot{9} = 9$

קיבלנו: $9 \cdot 0.\dot{9} = 9$ ולכן $0.\dot{9} = 1$.

רבים מתקשים לקבל את העובדה ש- $0.\dot{9} = 1$ למרות החישובים האלגבריים המוצגים להם, ולכן הם זקוקים להסברים מגוונים.

לעתים מסייע הסבר בדרך השלילה: לו היה מתקיים $0.\dot{9} < 1$ היה צריך להימצא מספר בין $0.\dot{9}$ לבין 1. כיוון שלא קיים מספר כזה, לא ייתכן ש- $0.\dot{9}$ ו-1 הם מספרים שונים.

מלבן מעוטר



איור 11

מפליא, אולם הגבול של סדרת היקפי המלבנים המעוטרים אינו ההיקף של המלבן המקורי. יתרה מזו: סדרת ההיקפים של המלבנים המעוטרים היא סדרה קבועה.

אם אורך הצלע המעוטרת הוא a ואורך הצלע הסמוכה לה הוא b , אז ההיקף של כל המלבנים המעוטרים בסדרה הוא $3a + 2b$ (הוכיחו!).

הגבול של סדרת שטחי המלבנים המעוטרים הוא כן השטח של המלבן המקורי.

הוכחה

שטח משולש שווה-צלעות שצלעו x הוא $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

במלבן המעוטר ה- n בסדרה, אורך הצלע של כל משולש שווה-צלעות הוא $\frac{a}{n}$,

שטחו $\frac{a^2\sqrt{3}}{4n^2}$, ושטח כל n המשולשים $\frac{a^2\sqrt{3}}{4n}$.

לכן שטח המלבן המעוטר ה- n בסדרה הוא $ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{4n}$.

כאשר $n \rightarrow \infty$ שטח המלבן המעוטר שואף לשטח המלבן המקורי ab .

למה שואפים היקף ושטח מצולע משוכלל החסום במעגל כאשר מספר צלעותיו הולך וגדל?

ניתן להראות, על-ידי חלוקת המצולע ל- n משולשים שווים-שוקיים עם קדקוד משותף במרכז המעגל,

כי ההיקף של מצולע משוכלל בן n צלעות החסום במעגל בעל רדיוס r הוא $L_n = 2r \cdot n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

ושטחו $S_n = \frac{1}{2}r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

נחשב את ההיקף והשטח:

ידוע כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (ר' עמוד 618). על סמך עובדה זו מחשבים:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} L_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2r \cdot n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2r\pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\ &= 2r\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 2r\pi \cdot 1 = 2r\pi \end{aligned}$$

-I

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}r^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= \pi r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = \pi r^2 \cdot 1 = \pi r^2 \end{aligned}$$

הוכחנו כי ההיקף והשטח של מצולע משוכלל החסום במעגל שואפים להיקף ולשטח של המעגל, כאשר מספר הצלעות במצולע הולך וגדל ללא מגבלה.

גבולות מהווים כלי חשוב לחקירת פונקציות ולבניית גרפים. שלושה מרכיבים המפתחים אצל התלמיד הבנה בתהליך חקירת הפונקציה הם: קריאת גבול הפונקציה מתוך סקיצה של הגרף, סרטוט גרף אפשרי לפונקציה מתוך הצגת גבולות הפונקציה בנקודות אי-ההגדרה, והצגת תבנית אפשרית של פונקציה מתוך הצגת גבולות הפונקציה בנקודות האי-הגדרה. רבות מן המשימות מסוג זה דורשות היכרות עם מושג האסימפטוטה שיוצג בפרק הבא.

תרגילים

1. מצאו גבולות של הסדרות הבאות או הוכיחו שהגבול אינו קיים:

$$\text{א. } \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\} \quad \text{ב. } \{(-1)^n n\} \quad \text{ג. } \{n\} \quad \text{ד. } \{2^n\} \quad \text{ה. } \{(-1)^n 2^n\} \quad \text{ו. } \{-n^2\}$$

2. הביאו דוגמה של סדרה $\{f(n)\}$, כאשר $f(x)$ היא פונקציה אלמנטרית, שיש בה תת-סדרה המתכנסת ל-0, ותת-סדרה השואפת ל- $(-\infty)$. מה ניתן לומר לגבי גבול הסדרה?

3. הביאו דוגמה של סדרה $\{f(n)\}$, כאשר $f(x)$ היא פונקציה אלמנטרית, שיש בה תת-סדרה המתכנסת ל-0, תת-סדרה המתכנסת ל-1, ותת-סדרה המתכנסת ל-(-1). מה ניתן לומר לגבי גבול הסדרה?

4. חשבו גבולות של כל אחת מהפונקציות האלמנטריות הבאות, בנקודות השייכות לשפה של תחום הפונקציה. השוו את התוצאות עם תוצאות קריאת הגבולות מהגרף הממוחשב.

$$\text{א. } f(x) = \ln^2 x \quad \text{ב. } f(x) = |\ln x| \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{1}{x^4} \quad \text{ה. } f(x) = e^{\sqrt{x}} \quad \text{ו. } f(x) = e^{-\frac{1}{x^3}}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{ח. } f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{ט. } f(x) = \frac{1}{\ln x}$$