

פונקציות ממשיות

פונקציות והגדרתן - מבט היסטורי



הרעיונות העומדים בבסיס מושג הפונקציה התחילו לנבט כבר בזמן העתיק, ומצאו את ביטויים בעיסוק בקשרים מתמטיים בין גדלים שונים. כך, למשל, אלפי שנים לפני הספירה חישוב המצרים והבבלים את היקף המעגל ואת שטח העיגול בעזרת רדיוס המעגל.

דוגמה נוספת לתלות פונקציונלית ניתן למצוא בלוחות האסטרונומיים העתיקים של הבבלים, היוונים וההודים, ובלוחות הסינוס של המתמטיקאי האיסלמי אל-בירוני (המאה ה-10). אלה מהווים עדות לשימוש בטבלאות שהיום נתפשות כטבלאות המייצגות פונקציות. בזמן העתיק אלגברה לא הייתה קיימת, לכן, את הנוסחאות המתארות קשר פונקציונאלי הגדירו על-ידי טבלה (לוחות) ובצורה מילולית.

המאה ה-17 נחשבת לנקודת ההתחלה של שימוש מודע במושג הפונקציה ושל חקירתה השיטתית. נקודת המפנה קשורה לעבודותיהם של דקרט, פרמה, ניוטון ולייבניץ. למושג הפונקציה של המתמטיקאים של המאה ה-17 היה אופי אינטואיטיבי והוא היה קשור לתיאורים גאומטריים ומכניים, כמו: שיעור ה- y של נקודה על עקומה, כפונקציה של שיעור ה- x של אותה נקודה, או התייחסות לדרך ומהירות כפונקציה של הזמן. מושג הפונקציה הופיע במפורש אצל ברנולי בראשית המאה ה-18. אוילר, במחצית המאה ה-18 העניק למושג את חשיבותו כשהוא הציג את האנליזה המתמטית כמדע המשתנים והפונקציות שלהם.

התפתחות מושג הפונקציה ארכה מאות שנים נוספות, והגדרת הפונקציה עברה שינויים רבים. לפי ההגדרה המודרנית, פונקציה היא סוג מיוחד של התאמה בין שתי קבוצות לא ריקות A ו- B (לאו דווקא של מספרים), המשייכת לכל איבר של A (תחום ההגדרה) איבר אחד ויחיד של B (טווח). התאמה זו אינה חייבת להיות מנוסחת כביטוי אלגברי.

עד לעיצוב הגדרה זו במאה ה-19, התאמות שהובילו לפונקציות לא רציפות, פונקציות המוגדרות בתחום מפוצל, פונקציות בעלות מספר אינסופי של נקודות מיוחדות, או פונקציות המוגדרות באמצעות גרף לא נחשבו לפונקציות.

כיום, מושג הפונקציה הוא מושג מרכזי במתמטיקה ובתחומים נוספים המשתמשים בכלים מתמטיים. ניתן לומר שההתפתחות של מושג הפונקציה הביאה עמה התפתחות מואצת בתחומי דעת רבים נוספים, מעבר למתמטיקה.

מושג הפונקציה ומושגים קשורים

מושג הקבוצה

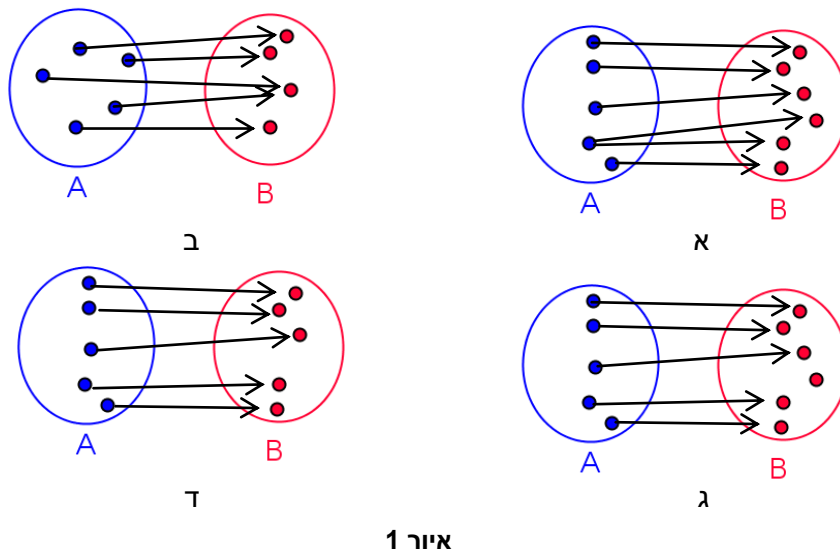
אוסף עצמים כלשהם נקרא **קבוצה**. העצמים המהווים את הקבוצה נקראים **איברים** של קבוצה זו. על עצם כלשהו אומרים כי הוא **שייך לקבוצה** מסוימת אם הוא נמנה בין איברי קבוצה זו. לקבוצה קוראים **קבוצה סופית** אם יש לה מספר סופי של איברים. אם לקבוצה יש אינסוף איברים היא נקראת **קבוצה אינסופית**.

נהוג לסמן קבוצות באותיות לטיניות גדולות כגון A, B, C וכדומה, ואת איבריהן באותיות קטנות a, b, c וכדומה. הסימן $a \in A$ פירושו: "האיבר a שייך לקבוצה A ", או במילים אחרות, a הוא איבר של A .

מושג ההתאמה

תהיינה A ו- B שתי קבוצות. כלל המתאים לכל איבר a בקבוצה A איבר אחד או מספר איברים בקבוצה B , נקרא **התאמה** מקבוצה A לקבוצה B . (יש הקוראים להתאמה גם **העתקה**). נהוג לסמן התאמות של קבוצה לקבוצה באותיות f, g, h וכדומה. הסימון $f: A \rightarrow B$ פירושו: " f היא התאמה של קבוצה A לקבוצה B ".

לכל איבר $a \in A$ קוראים **מקור**, ולאיבר $b \in B$ המותאם ל- a קוראים **תמונה** של a . להתאמה f קוראים **התאמה חד-ערכית** אם לכל מקור $a \in A$ מתאימה תמונה אחת בלבד $b \in B$ (איורים 1ב, 1ג ו-1ד). אם ב- A קיים מקור, אחד לפחות, שיש לו בקבוצה B יותר מתמונה אחת, להתאמה f קוראים **התאמה רב-ערכית** (איור 1א).



איור 1

התאמה חד-ערכית נקראת התאמה **חד-חד-ערכית** אם למקורות שונים מתאימות תמונות שונות (איורים 1ג ו-1ד). אם בהתאמה $f: A \rightarrow B$ כל איבר של קבוצה B הוא תמונה של איבר או איברים של A , אזי ההתאמה f נקראת התאמה של קבוצה A **על** קבוצה B (איורים 1א, 1ב ו-1ד).

מושג הפונקציה

ההגדרה הפורמלית של פונקציה מתייחסת לפונקציה כשלשה הבנויה משתי קבוצות וכלל.

הגדרה

פונקציה היא שלשה (f, A, B) כאשר A ו- B הן קבוצות ו- f היא התאמה חד-ערכית מ- A ל- B .

בבית הספר לא נהוג להשתמש בהגדרה הפורמלית, אלא משתמשים במילה פונקציה במשמעות של התאמה חד-ערכית:

התאמה של קבוצה A לקבוצה B נקראת **פונקציה** מ- A ל- B , אם לכל איבר $a \in A$ מתאים איבר אחד ויחיד $b \in B$.

הקבוצה A נקראת **התחום** של f , והקבוצה B נקראת **הטווח** של f .

האיבר $b \in B$ המתאים ל- a נקרא **תמונה של a** (ולפעמים, **הערך של הפונקציה ב- a**), ומסומן $b = f(a)$.

a נקרא המקור של b .

קבוצת כל הערכים של פונקציה היא תת-קבוצה של הטווח B של f , והיא נקראת גם קבוצת התמונות.

כאשר קבוצת התמונות שווה לטווח, הפונקציה נקראת פונקציה מהתחום **על** הטווח, או בקיצור, פונקציית-על.

שוויון פונקציות

שתי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ שוות זו לזו אם: (א) התחומים שלהם שווים. (ב) לכל x בתחום מתקיים: $f(x) = g(x)$.

דוגמה

הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2$ כאשר $\mathbb{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים, אינה פונקציית-על, ואילו הפונקציה $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+; g(x) = x^2$ כאשר $\mathbb{R}_+$ היא קבוצת המספרים האי-שליליים, היא כן פונקציית-על.

פונקציות ממשיות - הגדרה ומאפייני יסוד

פונקציה ממשית היא פונקציה שהתחום והטווח שלה הם קבוצות של מספרים ממשיים.

לפונקציה ממשית תקפים אותם המושגים אשר הוגדרו בסעיף הקודם לפונקציה כללית.

נחدد את הבנת ההגדרות באמצעות דוגמה.

נתונה הפונקציה $f: [-10, 10] \rightarrow [0, 200]; f(x) = x^2 + 1$.

פונקציה זו מתאימה לכל x בתחום D את המספר: $x^2 + 1$, בתחום E . נציין כי כלל ההתאמה מתואר על-ידי הנוסחה של $f(x)$. ניתן להגדיר פונקציה בכל ישר המספרים $\mathbb{R}$ עם כלל התאמה זה. בדוגמה נבחר תחום מצומצם יותר כדי לחדד מושגים.

- בהגדרה של מושג הפונקציה אין דרישה לכך שלכל איבר בטווח יהיה מקור. למשל, המספר $y=150$ שייך בטווח של הפונקציה: $150 \in E$, למרות שלא קיים לו מקור. כלומר, לא קיים $x \in D$ כך ש- $f(x)=150$. במילים אחרות, הפונקציה f איננה על.
- הגדרת מושג הפונקציה מאפשרת שלתמונה אחת יהיו מספר מקורות שונים. למשל: $f(10)=101$ ו- $f(-10)=101$. במילים אחרות, הפונקציה f איננה חד-חד ערכית.
- היבט קריטי בהגדרה של פונקציה הוא שלכל איבר בתחום יהיה איבר מתאים בטווח. אם נשנה בדוגמה רק את התחום E ל- $E=[0,100]$, נקבל התאמה: $f:[-10,10] \rightarrow [0,100]$, $f(x)=x^2+1$, שאינה מייצגת פונקציה. מכיוון שקיים לפחות איבר אחד בתחום, למשל $x=10$, שאין לו איבר מתאים בטווח. אכן, $f(10)=101$ אולם $101 \notin [0,100]$.

ייצוגים של פונקציה

- להציג פונקציה ממשית פירושו לתת כלי המאפשר להתאים לכל ערך של משתנה בלתי תלוי בתחום הפונקציה את הערך של משתנה תלוי בטווח. ניתן להציג פונקציה בדרכים שונות, כגון:
 - (1) ייצוג אלגברי (על-ידי נוסחה או תבנית) (2) טבלה (3) גרף (4) תיאור מילולי.
- אחת ממטרות ההוראה היא לפתח אצל תלמידים גמישות שתאפשר להם לזהות פונקציות בייצוגים שונים, לקשר בין הייצוגים, ולעבור ביניהם באופן גמיש לפי הצורך.
- להלן מובאות דוגמאות להצגות שונות של פונקציות ממשיות מסוגים שונים.

ייצוג אלגברי

- במקרים רבים נוהגים להגדיר פונקציה באמצעות נוסחה.

למשל: $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $g(x)=12$, $h(x)=\frac{1}{2}\sin(x)$, $k(x)=\sqrt{1-x^3}$.
- ניתן להגדיר פונקציה באמצעות מספר נוסחאות שונות, כאשר כל נוסחה מתייחסת לחלק אחר של התחום.

למשל: $f(x)=\begin{cases} x+1 & , x < -10 \\ 8 & , -10 \leq x \leq 3 \\ x^2 & , x > 3 \end{cases}$ ו- $g(x)=\begin{cases} 1 & , x \text{ רציונלי} \\ 0 & , x \text{ אי-רציונלי} \end{cases}$
- הפונקציה $g(x): \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ לעיל, נקראת פונקציית דיריכלה (*Dirichlet*). פונקציה זו מתאימה לכל מספר ממשי את אחד המספרים 0 או 1. קבוצת ערכי הפונקציה מכילה שני מספרים בלבד.
- הגדרת פונקציה כוללת תיאור של קבוצות התחום והטווח ביחד עם כלל ההתאמה. יחד עם זאת, כאשר הפונקציה $f(x)$ מוגדרת באמצעות ייצוג אלגברי (על-ידי נוסחה או מספר נוסחאות) ולא מצוין במפורש מהו

תחום ההגדרה שלה, נהוג להניח שתחום ההגדרה הוא התת-קבוצה הרחבה ביותר של המספרים הממשיים אשר בה הנוסחה היא בעלת משמעות. תחום זה נקרא גם **תחום ההגדרה הטבעי** של הפונקציה.

ייצוג גרפי של פונקציה

גרף של פונקציה $f(x)$ עם תחום הגדרה D , הוא אוסף של כל הנקודות $(x, f(x))$ כאשר $x \in D$. המשוואה $y = f(x)$ נקראת משוואת הגרף של פונקציה $f(x)$.

ברור כי הגרף, כפי שהוא מוגדר לעיל, קיים לכל פונקציה ממשית $f(x)$ אשר התחום שלה אינו קבוצה ריקה.

כמו כן, ברור, כי הגרף, לאחר בנייתו, מהווה כלי חזק לתפיסת פונקציה ותכונותיה באופן מוחשי ויזואלי. נשאלת השאלה אם כל גרף ניתן לבנייה מעשית בצורה הולמת ונתפשת בעין. לשאלה זו נתייחס בהמשך.

הערות

1. אחת ממטרות ההוראה היא להביא למודעות של התלמידים שגרף אינסופי קיים גם בנקודות שאינן נראות בסרטוט.
2. מטרה נוספת של ההוראה היא להסביר שההצגה הגרפית אינה נותנת מידע מלא על הפונקציה.
3. מקובל, כאשר זה ניתן, לסרטט גרף בתחום המשקף את התכונות העיקריות של הפונקציה כגון: עלייה, ירידה, חיוביות, שליליות, אסימפטוטות וכו' (ראו בפרקים הבאים).
4. לכל פונקציה ממשית שהתחום שלה אינו קבוצה ריקה יש גרף, אבל לא כל גרף ניתן לבנות בפועל. למשל, לא ניתן לסרטט גרף של פונקציית דיריכלה שהוזכרה בעמוד הקודם.
5. לעתים הפונקציה מוגדרת באמצעות הגרף שלה, מבלי שידועה משוואת הגרף של הפונקציה. למשל, גרף שמיצר מכשיר פוליוגרף או מכשיר למדידת קצב הלב.

ייצוג על-ידי טבלה

ניתן לתאר פונקציה באמצעות טבלת ערכים שבה לכל משתנה x מותאם ערך y של הפונקציה המתאים ל- x .

מובן מאליו שהצגה באמצעות טבלה אינה מגדירה פונקציה, למעט מקרים מיוחדים.

למשל,

- תחום ההגדרה סופי.
- נתון שהפונקציה היא ליניארית והטבלה מציגה את ערכי הפונקציה המתאימים לשתי נקודות שונות בתחום ההגדרה.
- נתון שהפונקציה היא ריבועית והטבלה מציגה את ערכי הפונקציה המתאימים לשלוש נקודות שונות בתחום ההגדרה. לדוגמה:

x	-1	1	2
y	0	2	9

טבלה 1

כדי למצוא את מקדמי הפונקציה הריבועית היחידה אותה מגדירה הטבלה נפתור את מערכת המשוואות המתקבלת כאשר מציבים את ערכי ה- x וה- y , הנתונים בטבלה, במשוואה $y = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases}$$

פתרון המערכת ($a = 2, b = 1, c = -1$) מביא לפונקציה הריבועית $y = 2x^2 + x - 1$ המיוצגת על-ידי הטבלה.

- באופן כללי: פונקציית פולינום ממעלה n מוגדרת על-ידי טבלה, המציגה את ערכיה המתאימים ל- $n+1$ נקודות שונות בתחום ההגדרה.

הפעילות הבאה מדגימה את מגבלות הייצוג באמצעות טבלה, מדגישה את קיומן של פונקציות רבות שהטבלה מתאימה להן, ומראה כיצד ניתן למצוא פונקציות רבות שהגרפים שלהן עוברים דרך הנקודות הנתונות בטבלה.

פעילות 1: מה ניתן ללמוד מטבלת ערכים של פונקציה?

1. נתונה טבלה ובה חמש נקודות על גרף הפונקציה: $f(x) = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

טבלה 2

א. סרטטו באותה במערכת צירים את גרף הפונקציה $f(x)$ ואת גרף הפונקציה 

$g(x) = f(x) + (x^2 - 4)x(x^2 - 1)$. מה הקשר בין הגרפים של $g(x)$ ושל $f(x)$?

ב. מצאו לפחות שתי פונקציות נוספות, אשר הגרפים שלהן מתלכדים עם הגרף של $f(x)$, בנקודות בהן $x = \pm 2, x = \pm 1, x = 0$.

ג. האם ניתן לומר, מבלי לדעת ש- $f(x)$ פונקציה ריבועית, כי טבלה 2 מייצגת את הפונקציה $y = x^2$? נמקו.

ד. נרחיב את טבלת הערכים של $f(x)$ על-ידי הוספת מספר סופי של נקודות הנמצאות על הגרף. האם נקבל ייצוג שלם (חד-ערכי) של הפונקציה בעזרת הטבלה? נמקו.

ה. בחרו בתור $f(x)$ פונקציית פולינום ממעלה שלישית, בנו עבורה טבלה עם אותם ערכי x וחזרו על סעיף ב עם הפונקציה החדשה. מה הקשר בין שני הגרפים שנבנו כעת?

ו. הראו כי בקבוצת כל הפונקציות מהצורה $f(x) = x^n$ (n הוא פרמטר המייצג מספר טבעי) יש פונקציה אחת בלבד לה מתאימה הטבלה:

x	4
y	16

טבלה 3

הערות דידקטיות

- סעיפים א-ה נועדו להראות כי בלי מידע נוסף על התבנית ו/או על התכונות של הפונקציה, אין אפשרות להציג אותה באופן חד-משמעי באמצעות טבלה.
- סעיף ו מראה, כי ייצוג הפונקציה באמצעות טבלה באופן חד-משמעי אפשרי לפעמים, כאשר ניתנת אינפורמציה לגבי סוג הפונקציה או תכונותיה.

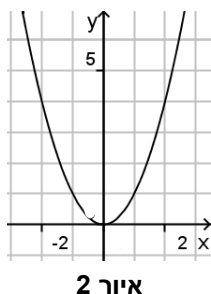
פתרונות לפעילות

- א. הגרפים של $f(x)$ ושל $y = g(x) = f(x) + (x^2 - 4) \cdot x \cdot (x^2 - 1)$ נחתכים בנקודות בהן: $x = \pm 2, \pm 1, 0$.
- ב. תשובות אפשריות: $h(x) = f(x) - (x^2 - 4) \cdot x \cdot (x^2 - 1)$, $q(x) = f(x) + 2(x^2 - 4) \cdot x \cdot (x^2 - 1)$. הפונקציות $h(x)$ ו- $g(x)$ מתקבלות על-ידי הוספה ל- $f(x)$ את הביטוי $(x^2 - 4) \cdot x \cdot (x^2 - 1)$ (או כפולותיו). היות ותוספת זו מתאפסת בנקודות $x = \pm 2, \pm 1, 0$, לפונקציות $f(x)$, $h(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות אלו יש ערכים שווים. הגרפים של הפונקציות האלה נחתכים בכל הנקודות הנתונות בטבלה.
- ג. לא ניתן לומר שהטבלה לעיל מייצגת את הפונקציה $f(x) = x^2$ כי היא מתאימה גם לאינסוף פונקציות אחרות.
- ד. גם אם נרחיב את טבלת הערכים של $f(x)$ על-ידי הוספת מספר סופי של נקודות הנמצאות על הגרף, לא נקבל ייצוג לפונקציה $f(x) = x^2$ על-ידי טבלה. כל טבלת ערכים בעלת מספר סופי של ערכים מתאימה גם לאינסוף פונקציות אחרות.
- ה. אם נבחר למשל: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, ונסרטט את הגרף של פונקציה זו באותה מערכת צירים עם גרף הפונקציה $g(x) = f(x) + (x^2 - 4) \cdot x \cdot (x^2 - 1)$, שוב נקבל שהגרפים של $f(x)$ ושל $y = g(x) = f(x) + (x^2 - 4) \cdot x \cdot (x^2 - 1)$ נחתכים בנקודות בהן: $x = \pm 2, \pm 1, 0$.
- ו. אם ידוע כי פונקציה $f(x)$ היא בעלת תבנית מהצורה: $f(x) = x^n$ כאשר n פרמטר טבעי, אז מהטבלה נובע באופן חד-משמעי כי $n = 2$, כלומר, $f(x) = x^2$. מכאן ניתן להסיק כי במשפחת פונקציות החזקה הטבלה הנתונה מייצגת את הפונקציה $f(x) = x^2$.

מיון פונקציות ממשיות לפי סוג המשתנה

- היות ותחום ההגדרה D של פונקציה ממשית $f(x)$ הוא קבוצת מספרים ממשיים, במקרים רבים ניתן להציג אותו באופן ויזואלי על ציר ה- x . אם D הוא קטע או קרן או איחוד קטעים ו/או קרניים בציר ה- x , ל- $f(x)$ קוראים פונקציה ממשית של **משתנה רציף**. אם D מורכב ממספר סופי או אינסופי של נקודות מבודדות, כלומר לכל נקודה ב- D יש סביבה נטולת נקודות נוספות מ- D , אזי ל- $f(x)$ קוראים פונקציה ממשית של **משתנה בדיד**.
- פונקציה ממשית $f(x)$ שתחום הגדרתה הוא קבוצת כל המספרים הטבעיים נקראת **סדרה אינסופית**. במקרה זה נהוג לסמן את המשתנה הבלתי תלוי באות n ואת ערכי הפונקציה בהתאם a_n או y_n וכדומה, כאשר $n \in \mathbb{N}$.
- השם "סדרה" לפונקציה זו מוצדק, כיוון שניתן להציג אותה כשורה אינסופית מסודרת $a_1, a_2, a_3, \dots$, כאשר $a_n = f(n)$.

המספרים $a_1, a_2, a_3, \dots$ נקראים איברי הסדרה, והמספרים $1, 2, 3, \dots$ - **המספרים הסידוריים (או האינדקסים)** של איברי הסדרה.

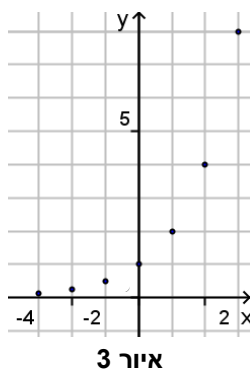


דוגמה 1: פונקציה ממשית של תחום הגדרה רציף

את הפונקציה $f(x) = x^2$ (איור 2) ניתן לתאר כהעתקה על: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ כאשר $\mathbb{R}^+$ היא קבוצת כל המספרים האי-שליליים.

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $D = \mathbb{R}$, קבוצת הערכים של הפונקציה היא $E = \mathbb{R}^+$. הפונקציה היא של משתנה רציף והיא אינה חד-חד-ערכית, כי, למשל, $f(2) = f(-2) = 4$.

דוגמה 2: פונקציה ממשית של תחום הגדרה שלם



פונקציה f (איור 3) מתאימה לכל מספר שלם $x = m$, $m \in \mathbb{Z}$, את המספר $y = 2^m$.

תחום ההגדרה של פונקציה זו הוא $D = \mathbb{Z}$ וקבוצת הערכים

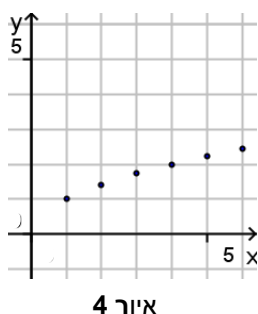
$$E = \left\{ \dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots \right\}$$

הפונקציה הנתונה מתאימה את $\mathbb{Z}$ על E .

ההתאמה היא חד-חד-ערכית, כי $m_1 \neq m_2 \Rightarrow 2^{m_1} \neq 2^{m_2}$.

גרף הפונקציה הוא אוסף נקודות מבודדות $(m, 2^m)$ כאשר $m \in \mathbb{Z}$.

דוגמה 3: פונקציה של משתנה טבעי - סדרה אינסופית



הפונקציה f (איור 4) מתאימה לכל מספר טבעי $x = n$, $n \in \mathbb{N}$, את המספר $y = \sqrt{n}$. פונקציה זו היא סדרה ולכן היא פונקציה של משתנה בדיד.

פונקציה זו ניתן לתאר כהתאמה על: $f: \mathbb{N} \rightarrow E$ כאשר $E = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots\}$

הפונקציה היא חד-חד-ערכית, כי $n_1 \neq n_2 \Rightarrow \sqrt{n_1} \neq \sqrt{n_2}$.

גרף הפונקציה הוא אוסף הנקודות המבודדות $(n, \sqrt{n})$, $n \in \mathbb{N}$.

הערה

פונקציה שהתחום שלה הוא קבוצת המספרים הרציונליים אינה פונקציה של משתנה בדיד ואינה פונקציה של משתנה רציף, כיוון שהמספרים הרציונליים צפופים בכל קטע (בין כל שני מספרים רציונליים קיימים אינסוף מספרים רציונליים), אולם הם אינם ממלאים אף קטע (בין כל שני מספרים רציונליים קיים מספר שאינו רציונלי, ואף אינסוף מספרים אי-רציונליים). לכן לא ניתן לסרטט את הגרף שלה, לא ביד ולא במחשב.

תחומים וערכים מיוחדים של פונקציות ממשיות

תהי $f(x)$ פונקציה ממשית עם תחום הגדרה D שאינו קבוצה ריקה.

הטווח של פונקציה זו הוא קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים. ניתן לחלק אותה לשלוש תת-קבוצות:
א. תת-קבוצה של ערכים חיוביים, **ב.** תת-קבוצה של ערכים שליליים, **ג.** תת-קבוצה של אפסים. בהתאם, את

תחום ההגדרה D של $f(x)$ ניתן לחלק לשלוש תת-קבוצות:

תחום החיוביות של $f(x)$ הוא קבוצת כל המקורות שתמונתם חיובית.

תחום השליליות של $f(x)$ הוא קבוצת כל המקורות שתמונתם שלילית.

וקבוצת האיפוס של $f(x)$ הוא קבוצת כל המקורות שתמונתם אפס.

כמובן, אחת או שתיים מהקבוצות הנ"ל יכולות להיות ריקות.

להלן טבלת הסיכומים והסימונים להגדרות לעיל.

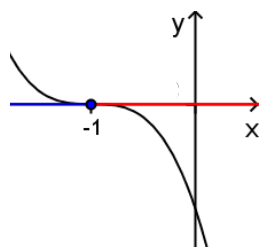
משמעות גרפית	כתיב פורמלי	תת-קבוצות בתחום של $f(x)$
הגרף נמצא מעל לציר ה- x .	$D^+ = \{x \in D \mid f(x) > 0\}$	תחום החיוביות של $f(x)$: קבוצת הערכים של המקור x שתמונתם $y = f(x)$ חיובית.
הגרף נמצא מתחת לציר ה- x .	$D^- = \{x \in D \mid f(x) < 0\}$	תחום השליליות של $f(x)$: קבוצת הערכים של המקור x שתמונתם $y = f(x)$ שלילית.
הגרף חותך את ציר ה- x . (גם נקודות השקה הן נקודות חיתוך עם ציר ה- x .)	$D^0 = \{x \in D \mid f(x) = 0\}$	קבוצת האיפוס של $f(x)$: קבוצת הערכים של המקור x שתמונתם $y = f(x)$ היא אפס.

טבלה 4

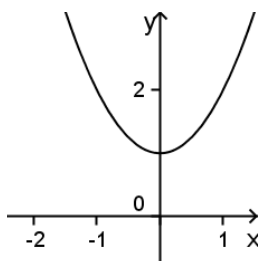
פונקציה נקראת **חיובית** בתחום חלקי כלשהו, אם כל ערכי הפונקציה חיוביים בתחום זה.

פונקציה נקראת **שלילית** בתחום חלקי כלשהו, אם כל ערכי הפונקציה שליליים בתחום זה.

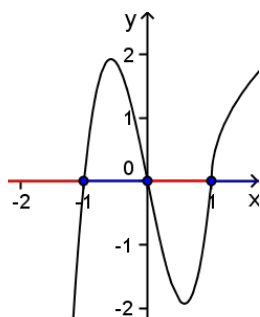
מקורות שתמונתם אפס נקראים **נקודות אפס** של הפונקציה (ולפעמים **נקודות איפוס** או **אפסים**).

דוגמאות**איור 5**

א. לפונקציה $f(x) = -(x+1)^3$ (איור 5), תחום החיוביות הוא $\{x | x < -1\}$, תחום השליליות הוא $\{x | x > -1\}$, ונקודת האפס היחידה היא $x = -1$.

**איור 6**

ב. הפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ (איור 6), חיובית בכל תחומה ואין לה נקודות אפס.

**איור 7**

ג. הפונקציה שהגרף שלה מוצג באיור 7, חיובית בשני תחומים חלקיים ושלילית בשני תחומים חלקיים, ויש לה שלוש נקודות אפס.

הערות

1. אחד הקשיים המרכזיים של תלמידים במציאת תחומי חיוביות ושליליות של פונקציה, כרוך בהתייחסות לטווח הפונקציה במקום לתחומה. למשל, במקום לציין שתחום החיוביות של הפונקציה המוצגת באיור 7 הוא $\{x | -1 < x < 0 \cup x > 1\}$, התלמידים לפעמים מציינים שתחום החיוביות של פונקציה זו הוא "בין אפס לשתיים".

2. קושי נוסף, הקשור לציון של תחומי חיוביות/שליליות של פונקציה, נעוץ בנטייה של חלק מהתלמידים לקשר בין הסימן של ערכי הפונקציה לבין הסימן של ערכי המשתנה הבלתי תלוי x . למשל, במקרה של הפונקציה שהגרף שלה מוצג באיור 7, חלק מהתלמידים מתקשה לראות בתחום $\{x | -1 < x < 0\}$ תחום חיוביות, כיוון שהוא נמצא בחלק השלילי של ציר ה- x . לכן חשוב לחשוף את התלמידים לדוגמאות בהן הפונקציה חיובית בתחום המספרים השליליים או / ו להיפך, שלילית בתחום המספרים החיוביים.

3. לעתים תלמידים יכולים להצביע על תחום חיוביות (או שליליות) של פונקציה, אולם הם מתקשים לרשום אותו באופן פורמלי.

4. צביעת התחומים החלקיים השונים של ציר ה- x יכולה לסייע לתלמידים (כפי שמודגם באיורים 5 - 7).

נקודות קיצון וערכים קיצוניים של פונקציה

נתונה פונקציה $y = f(x)$ המוגדרת בתחום D .

אם בקבוצת ערכי הפונקציה בתחום חלקי $S \subseteq D$ יש מספר גדול ביותר, הוא נקרא **הערך המקסימלי** או **המקסימום** של $f(x)$ בתחום S . בדומה, אם בקבוצת ערכי הפונקציה בתחום חלקי $S \subseteq D$ יש מספר קטן ביותר, הוא נקרא **הערך המינימלי** או **המינימום** של $f(x)$ בתחום S . נקודות מקסימום ומינימום של פונקציה בתחום מסוים נקראות **נקודות קיצון** שלה בתחום זה.

לפונקציה f יש **מקסימום מקומי** ב- $x_0 \in D$ אם קיימת סביבה S של x_0 (קטע פתוח המכיל את x_0) כך שהערך $f(x_0)$ הוא מקסימום של $f(x)$ ב- S , כלומר, לכל $x \in S$ מתקיים: $f(x) \leq f(x_0)$.

הערך $f(x_0)$ הוא **המקסימום המקומי** של f , והנקודה $(x_0, f(x_0))$ היא **נקודת מקסימום מקומי** של f .

באופן דומה, לפונקציה יש **מינימום מקומי** ב- $x_0 \in D$, אם קיימת סביבה של x_0 כך שלכל x מן הסביבה הזאת, מתקיים: $f(x) \geq f(x_0)$.

הערך $f(x_0)$ הוא **המינימום המקומי** של f , והנקודה $(x_0, f(x_0))$ היא **נקודת מינימום מקומי** של f .

נקודות מקסימום מקומי ומינימום מקומי של פונקציה נקראות **נקודות קיצון מקומי** של הפונקציה.

נציין כי במונחים אלה המילה "מקומי" משקפת את העובדה כי הערך של פונקציה אינו בהכרח מקסימלי/מינימלי בכל התחום שלה אלא רק בסביבה של נקודה מסוימת.

הגדרה

לפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום D יש **מקסימום מוחלט** ב- $x_0 \in D$ אם $f(x) \leq f(x_0)$ לכל $x \in D$.

במקרה זה, הערך $f(x_0)$ נקרא מקסימום מוחלט של $f(x)$ והנקודה $(x_0, f(x_0))$ היא **נקודת מקסימום מוחלט**.

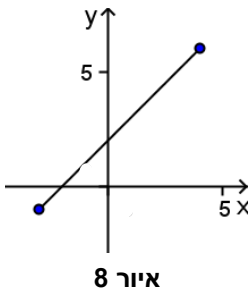
באופן דומה, לפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום D יש **מינימום מוחלט** ב- $x_0 \in D$ אם $f(x) \geq f(x_0)$ לכל $x \in D$.

במקרה זה הערך $f(x_0)$ נקרא **מינימום מוחלט** של $f(x)$ והנקודה $(x_0, f(x_0))$ היא **נקודת מינימום מוחלט**.

הערה

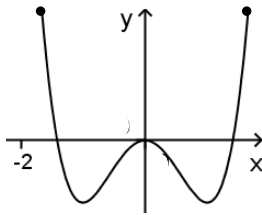
בספרי מתמטיקה מתקדמת רבים נוהגים לדבר על נקודות קיצון במשמעות של נקודה בתחום הפונקציה, ולכן מציינים רק את שיעור ה- x של הנקודה. בבית הספר נוהגים לתאר נקודות קיצון של פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום D **כנקודות על גרף הפונקציה**, כלומר נקודות במישור, ולכן הן נכתבות כזוג סדור $(x_0, f(x_0))$, כאשר $x_0 \in D$ היא נקודת הקיצון של $f(x)$ במובן הנהוג בספרי מתמטיקה מתקדמת, ו- $f(x_0)$ הוא ערך הפונקציה בנקודת הקיצון.

דוגמאות



איור 8

1. הפונקציה $y = x + 2$ (איור 8) מוגדרת בקטע סגור $[-3, 4]$. לפונקציה זו יש מינימום מוחלט $y = -1$ ב- $x = -3$, ומקסימום מוחלט $y = 6$ ב- $x = 4$, כלומר, נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה הן $(-3, -1)$ ו- $(4, 6)$.



איור 9

2. הפונקציה $y = x^4 - 2x^2$ מוגדרת בקטע סגור $[-2, 2]$ (איור 9). הפונקציה מקבלת מינימום מוחלט ב- $x = -1$ ו- $x = 1$. ערך המינימום הוא $y = -1$. הפונקציה מקבלת מקסימום מקומי ב- $x = 0$ ומקסימום מוחלט ב- $x = -2$ ו- $x = 2$. ערך המקסימום המקומי הוא $y = 0$ וערך המקסימום המוחלט הוא $y = 8$.

הערות

1. אם לפונקציה $y = f(x)$ יש ב- x_0 נקודת מקסימום/מינימום של $f(x)$ בתחום G , אזי הנקודה (x_0, y_0) היא נקודה על הגרף, שאין עליו בתחום G נקודה יותר גבוהה/נמוכה ממנה.

2. אם x_0 היא נקודת אפס של $f(x)$, אזי הנקודה $(x_0, 0)$ היא נקודה משותפת לגרף של $f(x)$ וציר ה- x , כלומר, נקודת חיתוך הגרף עם ציר ה- x .

3. ייתכן שלפונקציה אין נקודות קיצון מסוג מסוים או כלל אין נקודות קיצון מסוג כלשהו. למשל, לפונקציה $f(x) = x$ בתחום $-\infty < x < \infty$ אין אף נקודת קיצון מכל סוג. מאידך, יתכן שלפונקציה יש אינסוף של נקודות כאלה. למשל, לפונקציה $f(x) = \sin x$ בתחום $-\infty < x < \infty$ יש אינסוף נקודות קיצון מכל סוג.

4. אי-שוויון חזק ואי-שוויון חלש¹. בהגדרה של נקודת מקסימום (מינימום) מקומי לעיל מופיע אי-שוויון חלש. בחלק מספרי המתמטיקה משתמשים באי-שוויון חזק. הבדל זה משפיע על אופן ההתייחסות לפונקציה קבועה או לפונקציה אשר מקבלת אותו ערך באוסף של נקודות. למשל, לפי ההגדרות לעיל לפונקציה הקבועה $f(x) = 7$ בתחום $-\infty < x < \infty$ כל נקודה היא נקודת קיצון מכל סוג. אם נשתמש בהגדרה שבה מופיע אי-שוויון חזק נקבל שלפונקציה $f(x) = 7$ בתחום הנ"ל אין כלל נקודות קיצון.

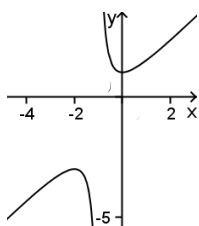
שאלות חידוד והעמקה

1. נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום מקומי ב- x_0 ונקודת מינימום מקומי ב- x_1 . האם ניתן להסיק מכך שבגרף הפונקציה $f(x)$ הנקודה $(x_0, f(x_0))$ תהיה גבוהה יותר מהנקודה $(x_1, f(x_1))$?

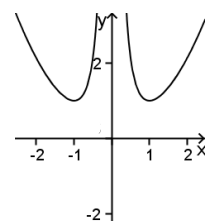
2. נתון שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות מינימום. האם ניתן להסיק מכך שיש לה גם נקודת מקסימום?

¹ אי-שוויון מהצורה $a > b$ נקרא אי-שוויון חזק. אי-שוויון מהצורה $a \geq b$ נקרא אי-שוויון חלש.

תשובות



איור 10



איור 11

1. לא ניתן להסיק בוודאות. למשל, לפונקציה $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$ (איור 10) יש נקודת

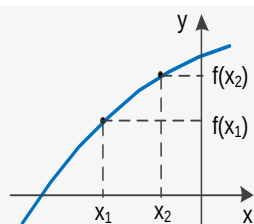
מקסימום מקומי $(-2, -3)$ ונקודת מינימום מקומי $(0, 1)$. נקודת המינימום המקומי גבוהה יותר מנקודת המקסימום המקומי.

2. לא ניתן להסיק בוודאות. למשל, לפונקציה $f(x) = 0.5x^2 + \frac{1}{2x^2}$ (איור 11)

יש שתי נקודות מינימום שהוא הן מקומי והן מוחלט. אבל אין לה אף נקודת מקסימום.

פונקציות ממשיות בעלות תכונות מיוחדות

פונקציות ממשיות עולות ויורדות



איור 12

נתונה פונקציה ממשית $f(x)$ המוגדרת בתחום D , ונתון כי G היא תת-קבוצה של D ($G \subseteq D$).

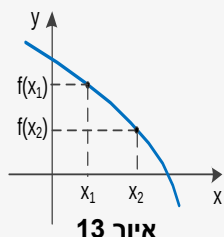
$f(x)$ **עולה בתחום** G אם לכל שני ערכים $x_1 < x_2$ ב- G מתקיים: $f(x_1) < f(x_2)$ (איור 12).

אם $f(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה D היא נקראת **פונקציה עולה**.

$f(x)$ **יורדת בתחום** G אם לכל שני ערכים $x_1 < x_2$ ב- G מתקיים: $f(x_1) > f(x_2)$ (איור 13).

אם $f(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה D היא נקראת **פונקציה יורדת**.

פונקציה עולה / יורדת (ב- G) נקראת **פונקציה מונוטונית** (ב- G).



איור 13

עלייה / ירידה של פונקציה במובן "חזק" או "חלש"

בהגדרות לעיל כל האי-שוויונות הם אי-שוויונות חזקים. לכן לעלייה / ירידה של פונקציה, כפי שהיא הוגדרה לעיל, קוראים "עלייה / ירידה במובן החזק". אם נחליף את האי-שוויונות הנ"ל באי-שוויונות חלשים, נגיע למושג עלייה/ירידה במובן החלש.

בפרק זה ההתייחסות למונחים "עלייה" ו"ירידה" היא במובן החזק.

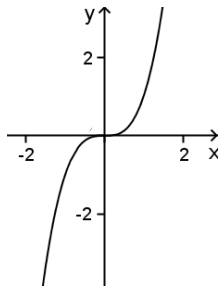
▪ $f(x)$ נקראת **לא עולה** בתחום G אם לכל שני ערכים $x_1 < x_2$ ב- G מתקיים: $f(x_1) \geq f(x_2)$.

▪ $f(x)$ נקראת **לא יורדת** בתחום G אם לכל שני ערכים $x_1 < x_2$ ב- G מתקיים: $f(x_1) \leq f(x_2)$.

▪ פונקציה קבועה אינה עולה ואינה יורדת.

▪ כיוון שהמספרים על ציר המספרים עולים משמאל לימין קל לקבוע את תחומי העלייה והירידה של פונקציה אם נעים על הגרף משמאל לימין.

דוגמה 1: פונקציה העולה בכל תחום הגדרתה



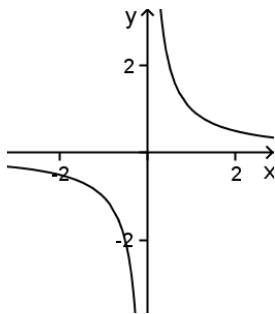
איור 14

הפונקציה $f(x) = x^3$ (איור 14) מוגדרת בכל התחום $\mathbb{R}$. לכל שני ערכי המשתנה $x_1 < x_2$ מתקיים: $x_1^3 < x_2^3$.

לכן הפונקציה $f(x) = x^3$ עולה בכל התחום שלה, כלומר, היא פונקציה מונוטונית.

בדוגמה זו נעסוק בהמשך, בעת הדיון בקשרים בין תכונות הפונקציה לתכונות הנגזרת. חשיבותה בכך שהיא מדגימה עלייה של הפונקציה בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת.

דוגמה 2: פונקציה שיוורדת בכל אחד משני חלקי התחום שלה ואינה יורדת בכל התחום



איור 15

הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ (איור 15) מוגדרת בתחום $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

בתחום $(0, \infty)$ הפונקציה יורדת, כי אם $0 < x_1 < x_2$ אז $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

בתחום $(-\infty, 0)$ הפונקציה יורדת, כי אם $x_1 < x_2 < 0$ אז $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

אבל בכל תחום הגדרתה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ אינה יורדת, כי אם

$x_1 < 0 < x_2$, אז $\frac{1}{x_1} < 0 < \frac{1}{x_2}$. למשל, $-2 < 2$ וגם: $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$.

גרף הפונקציה מורכב משני ענפים שכל אחד מהם יורד. אבל ניתן לראות כי הענף הימני נמצא מעל לענף השמאלי והפונקציה אינה יורדת בכל תחום הגדרתה.

מאחר והפונקציה אינה יורדת בכל תחום הגדרתה ואינה עולה בכל תחום הגדרתה, היא אינה פונקציה מונוטונית.

נסכום:

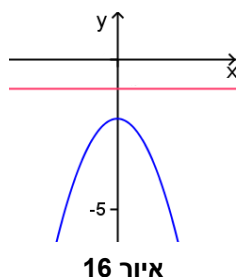
- באופן כללי, אם הפונקציה $y = f(x)$ עולה בכל תחום ההגדרה שלה, אז היא עולה בכל תחום חלקי שלו. לעומת זאת, ייתכן שתחום הגדרה של פונקציה מורכב מתחומים חלקיים שבכל אחד מהם הפונקציה עולה, ובכל זאת פונקציה זו אינה עולה בכל התחום שלה.
- בדומה, אם הפונקציה $y = f(x)$ יורדת בכל תחום ההגדרה שלה, אז היא יורדת בכל תחום חלקי שלו. לעומת זאת, ייתכן שתחום הגדרה של פונקציה מורכב מתחומים חלקיים שבכל אחד מהם הפונקציה יורדת, ובכל זאת פונקציה זו אינה יורדת בכל התחום שלה.

הערות דידקטיות

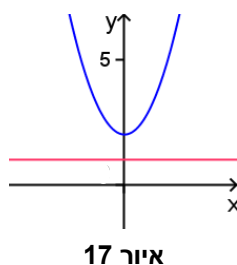
1. חלק מהתלמידים נוטים להתבלבל בין המושגים: עלייה, ירידה, חיוביות ושליליות. לכן יש חשיבות רבה למתן תרגילים העוסקים בשני המושגים הללו יחד.
2. חשיפה של התלמידים למגוון רחב של דוגמאות ואי-דוגמאות למושגים הקשורים בתכונות של פונקציות, ובחינת הדוגמאות לאור ההגדרות של מושגים אלה, תומכת גם בהבנת המושגים הנידונים, גם בהבנת מושג ההגדרה, ובשיפוט באמצעות הגדרות.

פונקציות ממשיות חסומות ולא חסומות

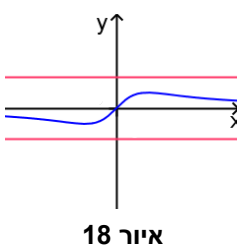
תהי $f(x)$ פונקציה ממשית עם תחום הגדרה D .



- פונקציה $f(x)$ נקראת **חסומה מלמעלה**, אם קיים מספר ממשי C , כך שמתקיים: $f(x) < C$ לכל $x \in D$. הגרף של פונקציה חסומה מלמעלה נמצא מתחת לישר מסוים $y = C$. למשל, הפונקציה $f(x) = -2 - x^2$ חסומה מלמעלה. הגרף שלה נמצא מתחת, למשל, לישר $y = -1$ (איור 16).



- פונקציה $f(x)$ נקראת **חסומה מלמטה**, אם קיים מספר ממשי C , כך שמתקיים: $f(x) > C$ לכל $x \in D$. הגרף של פונקציה חסומה מלמטה נמצא מעל לישר מסוים $y = C$. למשל, הפונקציה $f(x) = x^2 + 2$ חסומה מלמטה. הגרף שלה נמצא מעל, למשל, לישר $y = 1$ (איור 17).

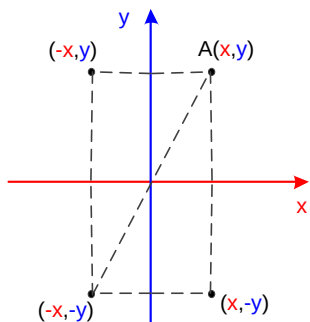


- פונקציה $f(x)$ נקראת **חסומה**, אם היא חסומה הן מלמעלה והן מלמטה, כלומר, קיימים מספרים ממשיים C_1, C_2 כך שמתקיים: $C_1 < f(x) < C_2$ לכל $x \in D$. הגרף שלה נמצא בין שני ישרים $y = C_1$ ו- $y = C_2$. למשל, הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ חסומה. הגרף שלה נמצא ברצועה שבין שני הישרים $y = 1$ ו- $y = -1$ (איור 18).
- אם פונקציה אינה חסומה מלמעלה או אינה חסומה מלמטה או אינה חסומה משני הכיוונים, היא נקראת **פונקציה לא חסומה**. בדוגמאות לעיל, הפונקציות $f_1 = x^2 + 2$ ו- $f_2 = -2 - x^2$ הן פונקציות לא חסומות.

הערות

- בכל ההגדרות של פונקציות חסומות, אשר הובאו בתחילת הסעיף, ניתן להחליף אי-שוויונות חזקים באי-שוויונות חלשים ולקבל הגדרות שקולות (מדוע?).
- ההגדרה של פונקציה חסומה שקולה להגדרה הבאה: פונקציה $f(x)$ חסומה אם קיים מספר $C > 0$ כך שלכל x בתחום של הפונקציה מתקיים: $-C \leq f(x) \leq C$ או $|f(x)| \leq C$.
- אם האי-שוויון $|f(x)| \leq C$ מתקיים לכל x בתחום חלקי $G \subseteq D$, אז הפונקציה $f(x)$ נקראת **חסומה בתחום** G .
- בהתאם להגדרה קודמת, פונקציה $f(x)$ עם תחום ההגדרה D נקראת **לא חסומה**, אם לכל מספר חיובי C קיים $x_0 \in D$ (התלוי ב- C) כך שמתקיים: $|f(x_0)| > C$. למשל, הפונקציה $f(x) = x^3$ היא פונקציה לא חסומה בכל התחום שלה $D = (-\infty, \infty)$, כי לכל $C > 0$ קיים $x_0 = \sqrt[3]{C}$, למשל $x_0 = \sqrt[3]{8C} > 0$, כך ש- $|f(x_0)| = |x_0|^3 = 8C > C$. פונקציה זו חסומה בכל תחום חלקי שהוא קטע סגור.

פונקציות ממשיות זוגיות ואי-זוגיות



איור 19

סימטריה ביחס לישר וביחס לנקודה

נתונה נקודה $A(x, y)$ (איור 19).

הנקודה $(-x, y)$ סימטרית לנקודה A ביחס לציר ה- y .

הנקודה $(x, -y)$ סימטרית לנקודה A ביחס לציר ה- x .

הנקודה $(-x, -y)$ סימטרית לנקודה A ביחס לראשית הצירים.

הגדרות

צורה מישורית נקראת **סימטרית ביחס לציר ה- y** , אם לכל נקודה (x, y) השייכת לצורה זו, גם הנקודה $(-x, y)$ שייכת לה.

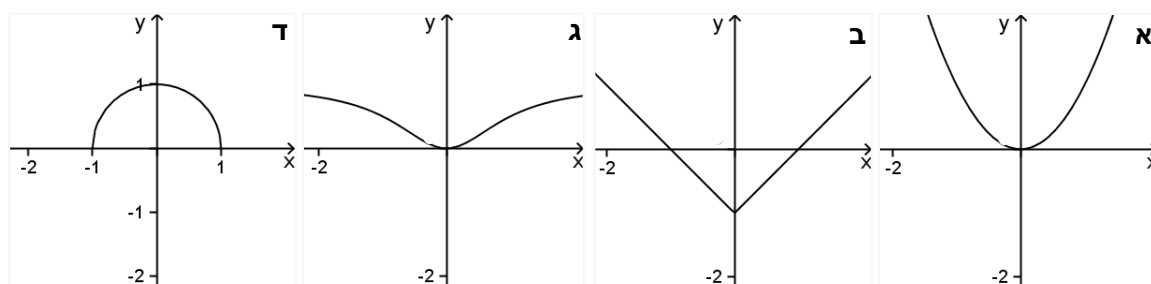
באותו אופן, צורה מישורית נקראת **סימטרית ביחס לציר ה- x** , אם לכל נקודה (x, y) השייכת לצורה זו, גם הנקודה $(x, -y)$ שייכת לה.

צורה מישורית נקראת **סימטרית ביחס לראשית הצירים**, אם לכל נקודה (x, y) השייכת לצורה זו, גם הנקודה $(-x, -y)$ שייכת לה.

פונקציה זוגית

נתבונן בגרפים של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } y = x^2 \quad \text{ב. } y = |x| - 1 \quad \text{ג. } y = \frac{x^2}{x^2 + 1} \quad \text{ד. } y = \sqrt{1 - x^2}$$



איור 20

לארבעת הגרפים תכונה משותפת - כולם סימטריים ביחס לציר ה- y . תכונה זו אינה מקרית.

אפשר ללמוד מהמשוואות של הפונקציות, שערכי הפונקציות המתקבלים על-ידי הצבת מספרים נגדיים שווים זה לזה. כלומר, ערך ה- y המתקבל על-ידי הצבת x שווה לערך ה- y המתקבל על-ידי הצבת $-x$.

הגדרה

פונקציה ממשיית $f: D \rightarrow F$ נקראת **פונקציה זוגית** אם:

א. תחום ההגדרה של $f(x)$ סימטרי ביחס ל- $x=0$, כלומר, אם $x \in D$ אז גם $-x \in D$.

ב. לכל $x \in D$ מתקיים: $f(-x) = f(x)$.

מתוך ההגדרה נובע שגרף של כל פונקציה **זוגית** הוא **סימטרי ביחס לציר ה- y** , כלומר, הנקודה (x, y) נמצאת על הגרף אם הנקודה $(-x, y)$ נמצאת עליו.

כדי להוכיח את קיום התנאי $f(-x) = f(x)$ מציבים בתבנית הפונקציה $-x$ במקום המשתנה x ומשווים את התוצאה המתקבלת עם $f(x)$.

למשל, כדי להראות שהפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ היא פונקציה זוגית, נראה כי לכל x ממשי מתקיים:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = f(x)$$

כדי להראות שפונקציה איננה זוגית, די למצוא זוג ערכי x נגדיים שמתאימים להם ערכי y שונים. למשל, כדי להראות שהפונקציה $f(x) = x^2 + x$ איננה זוגית, די להראות ש- $f(-2) = 2$ ואילו $f(2) = 6$.

דוגמאות לפונקציות זוגיות ולפונקציות שאינן זוגיות

1. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת על-ידי הטבלה:

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$	1	-2	2	-2	1

טבלה 5

פונקציה זו זוגית כי תחום ההגדרה שלה $D = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ סימטרי ביחס ל- $x=0$ ומתקיים:

$$f(-3) = f(3) = 1, \quad f(-1) = f(1) = -2$$

2. הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ מוגדרת בכל ציר המספרים. התחום $\mathbb{R}$ סימטרי ביחס ל- $x=0$, ולכל x בתחום מתקיים:

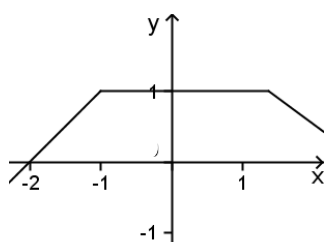
$$g(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = g(x)$$

3. הפונקציה: $k(x) = \frac{1}{x^2}$ מוגדרת בכל ציר המספרים פרט ל- $x=0$. מכאן שתחום ההגדרה של הפונקציה סימטרי ביחס ל- $x=0$. כמו כן מתקיים:

$$k(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = k(x)$$

4. הפונקציה $m(x) = \sqrt{x^2-1}$ מוגדרת בתחום סימטרי ביחס ל- $x=0$: $x \geq 1$ או $x \leq -1$. גם פונקציה זו זוגית על-פי ההגדרה.

5. הפונקציה $t(x) = x^3 - x$ אינה זוגית למרות שמתקיים $t(-1) = t(1) = 0$. כדי שפונקציה f תהיה זוגית צריך להתקיים $f(-x) = f(x)$ לכל x בתחום ההגדרה. תנאי זה אינו מתקיים, למשל: $t(-2) = -6$ ואילו $t(2) = 6$.



איור 21

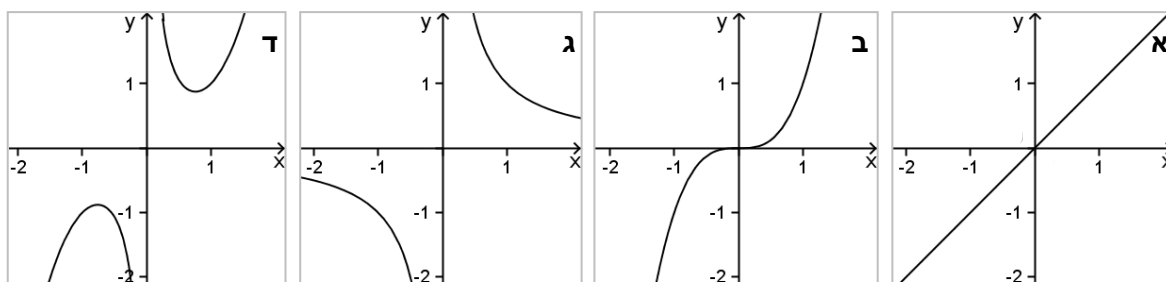
6. בדומה, הפונקציה $h(x)$, שהגרף שלה מוצג באיור 21, אינה זוגית למרות שהתחום שלה $[-2, 2]$ סימטרי ביחס ל- $x = 0$, ומתקיים $h(-0.5) = h(0.5) = 1$, וזאת מכיוון שהתכונה $h(-x) = h(x)$ אינה מתקיימת לכל x בתחום הפונקציה, למשל, היא אינה מתקיימת עבור $x = 2$.

פונקציה אי-זוגית

נתבונן בפונקציות הבאות:

א. $y = x$ ב. $y = x^3$ ג. $y = \frac{1}{x}$ ד. $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x}$.

לארבעת הגרפים תכונה משותפת - כולם סימטריים ביחס לראשית הצירים. תכונה זו אינה מקרית. אפשר ללמוד מהמשוואות של הפונקציות, שאם מציבים בתבנית הפונקציה ערכי x נגדיים מתקבלים גם ערכי y נגדיים.



איור 22

הגדרה

פונקציה ממשית $f: D \rightarrow F$ נקראת **פונקציה אי-זוגית** אם:

א. תחום ההגדרה של $f(x)$ סימטרי ביחס ל- $x = 0$, כלומר, אם $x \in D$ אז גם $-x \in D$.

ב. לכל $x \in D$ מתקיים: $f(-x) = -f(x)$.

מהגדרה זו נובע כי אם פונקציה אי-זוגית $f(x)$ מוגדרת ב- $x = 0$, אזי בהכרח $f(0) = 0$ שכן $f(-0) = -f(0)$, ומקבלים: $f(-0) + f(0) = 2f(0) = 0$.

נשים לב שמסקנה זו אינה נכונה עבור פונקציות זוגיות. פונקציות זוגיות יכולות לקבל כל ערך ב- $x = 0$.

הגרף של פונקציה אי-זוגית סימטרי ביחס לראשית הצירים $(0, 0)$, כלומר, הנקודה (x, y) נמצאת על הגרף אם ורק אם הנקודה $(-x, -y)$ נמצאת עליו.

במילים אחרות, אם נסובב את הגרף של פונקציה אי-זוגית ב- 180° סביב ראשית הצירים, נקבל גרף המתלכד עם הגרף המקורי.

כדי להוכיח את קיום התנאי $f(-x) = -f(x)$ מציבים בתבנית הפונקציה $-x$ במקום המשתנה x ומשווים את התוצאה המתקבלת עם $-f(x)$.

למשל, כדי להראות שהפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x}$ היא פונקציה אי-זוגית נראה כי לכל x ממשי השונה מ-0

מתקיים:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2} + \frac{1}{2(-x)} = \frac{-x^3}{2} + \frac{1}{-2x} = -\left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x}\right) = -f(x)$$

כדי להראות שפונקציה איננה זוגית, די למצוא זוג ערכי x נגדיים אשר ערכי ה- y המתאימים להם אינם מספרים נגדיים. למשל, כדי להראות שהפונקציה $f(x) = x^2 + x$ איננה אי-זוגית, די להראות ש-: $f(-2) = 2$ ואילו $f(2) = 6$.

דוגמאות לפונקציות אי-זוגיות ולפונקציות שאינן אי-זוגיות

1. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת על-ידי הטבלה:

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$	1	-2	0	2	-1

טבלה 6

פונקציה זו אי-זוגית כי תחום ההגדרה שלה $D = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ סימטרי ביחס ל- $x = 0$, ומתקיים:

$$f(-3) = -f(3), \quad f(-1) = -f(1), \quad f(0) = 0$$

2. הפונקציה $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ מוגדרת בכל התחום $\mathbb{R}$. התחום $\mathbb{R}$ סימטרי ביחס ל- $x = 0$, ולכל x בתחום

$$\text{מתקיים: } g(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -g(x) \text{ על-פי ההגדרה, פונקציה זו אי-זוגית.}$$

3. הפונקציה $h(x) = \frac{1}{x^3}$ מוגדרת לכל x ממשי פרט ל- $x = 0$. תחום זה הוא סימטרי ביחס ל- $x = 0$. לכל x

$$\text{בתחום מתקיים: } h(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3} = -h(x) \text{ הפונקציה אי-זוגית על-פי ההגדרה.}$$

4. הפונקציה $k(x) = x\sqrt{1-x^2}$ מוגדרת בתחום $-1 \leq x \leq 1$ שהוא סימטרי ביחס ל- $x = 0$. כמו כן מתקיים $k(-x) = -k(x)$, ומכאן שהפונקציה אי-זוגית.

5. הפונקציה $t(x) = x^2 + 6x - 4$ איננה אי-זוגית למרות שמתקיים $t(-2) = -12$ ו- $t(2) = 12$, מכיוון שהתנאי $t(-x) = -t(x)$ אינו מתקיים **לכל** x בתחום ההגדרה של הפונקציה. למשל, $t(-1) = -9$ ואילו $t(1) = 3$.

6. פונקציה קבועה $f(x) = c$ שהתחום שלה סימטרי ביחס ל- $x = 0$ היא פונקציה זוגית.

7. הפונקציה $f(x) = 0$ היא גם זוגית וגם אי-זוגית.

הערות

1. בהגדרות של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית לפעמים לא מביאים את דרישת הסימטריות של תחום הפונקציה ביחס ל- $x=0$, אלא מסתפקים בתנאי $f(-x)=f(x)$ או, בהתאם, $f(-x)=-f(x)$ לכל x בתחום של f . הסיבה לצמצום זה של ההגדרות היא בכך, שכל אחד מהתנאים הנ"ל כולל בתוכו הנחה סמויה שלכל x בתחום של f גם $-x$ שייך לתחום זה, כלומר, התחום סימטרי ביחס ל- $x=0$.
2. קיימות אינסוף פונקציות אשר אינן זוגיות ואינן אי-זוגיות. למשל, כל אחת מהפונקציות: $f(x)=x^2+x$, $f(x)=2^x$, $f(x)=\lfloor x \rfloor$ אינה פונקציה זוגית ואינה פונקציה אי-זוגית.

שאלות העמקה וחידוד

אם $f(x)$ פונקציה ממשית נתונה, אז אומרים כי פונקציה $f(-x)$ מתקבלת מ- $f(x)$ על-ידי שיקוף ביחס לציר ה- y , ופונקציה $(-f(x))$ מתקבלת מהפונקציה $f(x)$ על-ידי שיקוף ביחס לציר ה- x .

1. האם ייתכן כי פונקציה המתקבלת על-ידי שיקוף של $f(x)$ ביחס לציר ה- y זהה ל- $f(x)$? אם כן, באיזה תנאי זה קורה?
2. האם ייתכן כי פונקציה המתקבלת על-ידי שיקוף של $f(x)$ ביחס לציר ה- x זהה ל- $f(x)$? אם כן, באיזה תנאי זה קורה?
3. האם ייתכן כי בשיקופה של פונקציה $f(x)$ ביחס לציר ה- y ובשיקופה של $f(x)$ ביחס לציר ה- x מתקבלות פונקציות זהות זו לזו? אם כן, באיזה תנאי זה קורה?
4. הוכיחו שכל פונקציה שתחום ההגדרה שלה סימטרי ביחס ל- $x=0$ ניתנת לכתיבה כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

תשובות

1. השיקוף של $f(x)$ ביחס לציר ה- y מביא שוב ל- $f(x)$ אם ורק אם $f(-x)=f(x)$ לכל x בתחום של f , כלומר, אם ורק אם $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
2. השיקוף של $f(x)$ ביחס לציר ה- x מביא שוב לפונקציה $f(x)$ אם ורק אם $f(x)=-f(x)$ לכל x בתחום של f , כלומר, אם ורק אם $f(x)=0$ לכל x בתחומה.
3. השיקוף של $f(x)$ ביחס לציר ה- x וציר ה- y מביא לפונקציות זהות זו לזו אם ורק אם $f(-x)=-f(x)$ לכל x בתחום של f , כלומר, אם ורק אם $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.
4. כל פונקציה $f(x)$ ניתנת להצגה כ-
$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

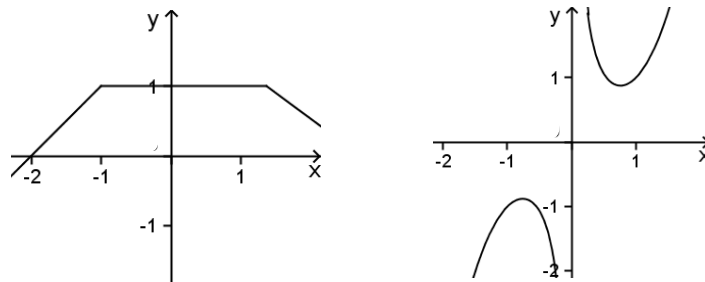
שלב ההיכרות הראשונה עם פונקציות זוגיות ואי-זוגיות יכול להיות קצר, אך רצוי כי התלמידים יתנסו במשימות מגוונות. להלן דוגמאות המציגות דרכים שונות שמזמנות לתלמידים זיהוי פונקציות זוגיות ואי-זוגיות, כשהפונקציות נתונות בייצוגים שונים: הוכחות שפונקציה היא זוגית (אי-זוגית) בדרך אלגברית באמצעות ההגדרה; זיהוי

שפונקציה איננה זוגית (או אי-זוגית) באמצעות דוגמה נגדית; השלמת טבלאות וגרפים של פונקציות, כשידועה הזוגיות או האי-זוגיות של פונקציה, ובניית דוגמאות שונות.

דוגמאות למשימות. רוב הדוגמאות מבוססות על פונקציות שהוצגו במהלך הפרק.

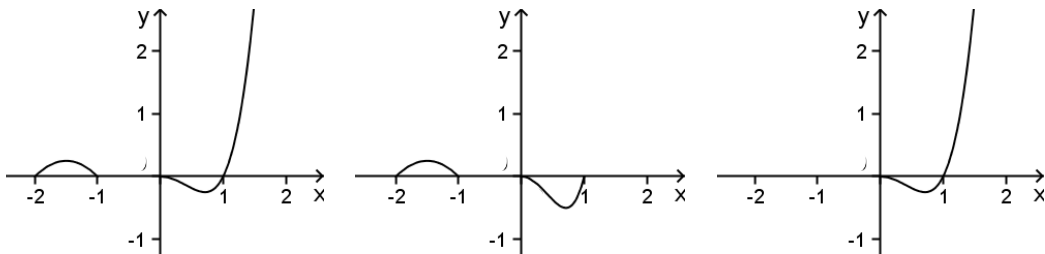
1. לכל אחת מהפונקציות שלפניכם זהו אם היא זוגית, אי-זוגית או שאינה זוגית ואינה אי-זוגית:
א. $f(x) = x^4 - x^2 - 17$ ב. $f(x) = 2^x$.

2. זהו אם הגרפים שלפניכם מתאימים לפונקציה זוגית, לפונקציה אי-זוגית, או לפונקציה שאינה זוגית ואינה אי-זוגית. (הניחו שהחלק הנראה של הגרף מייצג את התנהגות הפונקציה.)



איור 23

3. השלימו כל אחד מהגרפים שלפניכם כך שיתאים לפונקציה זוגית. אם המשימה אינה אפשרית הסבירו מדוע.



איור 24

4. השלימו את הטבלה שלפניכם אם ידוע שהיא מייצגת פונקציה אי-זוגית.

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$	1	-2			

טבלה 7

5. א. הביאו, אם אפשר, דוגמה לפונקציה זוגית בעלת שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

ב. הביאו, אם אפשר, דוגמה לפונקציה אי-זוגית בעלת שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

ג. הביאו, אם אפשר, דוגמה לפונקציה אי-זוגית שיש לה נקודת מינימום אחת ונקודת מקסימום אחת.

ד. הביאו, אם אפשר, דוגמה לפונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום אחת ונקודת מקסימום אחת.



6. דוגמה לפעילות משולבת מחשב בנושא פונקציות זוגיות ואי-זוגיות.²
 א. סרטטו על צג המחשב / המחשבון את הגרף של הפונקציה $y = \frac{1}{1+|x|}$. מהו תחום ההגדרה של פונקציה

זו? נמקו את תשובתכם.

ב. נועו על פני הגרף והתבוננו בצורתו. האם הגרף נראה סימטרי ביחס לציר ה- y ? ביחס לראשית הצירים? שערו האם הפונקציה זוגית? אי-זוגית? בדקו את השערותיכם בדרך אלגברית.

ג. החליפו את הגרף שסרטט בסעיף א בגרף של הפונקציה: $y = \frac{x}{1+|x|}$. מהו תחום ההגדרה שלה?

ד. נועו על פני הגרף והתבוננו בצורתו. האם הגרף נראה סימטרי ביחס לציר ה- y ? ביחס לראשית הצירים? שערו האם הפונקציה זוגית? אי-זוגית? בדקו את השערותיכם בדרך אלגברית.

ה. החליפו את הגרף שסרטט בסעיף ג בגרף של הפונקציה: $y = \frac{x+1}{1+|x|}$. מהו תחום ההגדרה שלה?

ו. נועו על פני הגרף והתבוננו בצורתו. האם הגרף נראה סימטרי ביחס לציר ה- y ? ביחס לראשית הצירים? שערו האם הפונקציה זוגית? אי-זוגית? הוכיחו בדרך אלגברית, כי הפונקציה הנתונה בסעיף ה אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

העיסוק בפונקציות זוגיות ואי-זוגיות נמשך לאורך כל לימודי האנליזה פעמים רבות הזיהוי של פונקציה זוגית מתוך תבניתה הוא פשוט. בפעמים אחרות החיצונית של פונקציה אינה רומזת לכך שהפונקציה זוגית, וכאשר מתגלה תכונה זו במהלך החקירה, היא יוצרת סקרנות ומעודדת להשתמש בקשרים מתמטיים שונים כדי להציג את הפונקציה באמצעות תבנית שונה, שמבליטה את הזוגיות או האי-זוגיות של הפונקציה.

פונקציה מחזורית

הגדרה³

נתונה $f(x)$ פונקציה ממשית עם תחום הגדרה D . פונקציה $f(x)$ נקראת **מחזורית** אם קיים מספר ממשי $T \neq 0$ כך שלכל $x \in D$ מתקיים:

$$(1) \quad x+T \in D \text{ וגם } x-T \in D$$

$$(2) \quad f(x+T) = f(x)$$

המספר T נקרא **מחזור** של $f(x)$.

ברור כי אם פונקציה $f(x)$ מחזורית ו- T הוא מחזור שלה, אז כל מספר $m \cdot T$ כאשר m שלם, גם הוא מחזור של $f(x)$. מכאן נובע כי לפונקציה מחזורית יש תמיד אינסוף מחזורים. לעתים אנחנו מעוניינים לדעת מהו המחזור החיובי הקטן ביותר של הפונקציה.

² מעובד לפי שמוקלר ודוד (2001),

³ עוד על הגדרה של פונקציה מחזורית ניתן למצוא אצל ואן דורמולן וזסלבסקי (1993) ואצל לטנר ורוזן (1997).

הגדרה

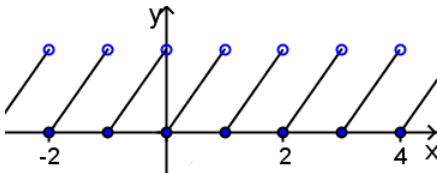
המספר T נקרא **המחזור היסודי** (או **המחזור**) של פונקציה מחזורית $f(x)$ אם T הוא המחזור החיובי הקטן ביותר מבין כל המחזורים החיוביים של $f(x)$.

דוגמה 1: פונקציה מחזורית לא טריגונומטרית המוגדרת ב- $\mathbb{R}$

פונקציה $f(x) = x - [x]$, כאשר $[x]$ מסמן את החלק השלם של x , מוגדרת בתחום $D = (-\infty, \infty)$.

כל מספר שלם m השונה מ-0 הוא מחזור של הפונקציה $f(x)$. כי אם נוסיף ל- x מספר שלם m , גם לחלק השלם של x יתווסף m , וההפרש $x - [x]$ לא ישתנה, כלומר: $f(x+m) = f(x)$ לכל $x \in D$.

קל לראות שהמספר שאינו שלם לא יכול להיות מחזור של $f(x) = x - [x]$. לכן קבוצת כל המחזורים של הפונקציה הנתונה זהה לקבוצה $\mathbb{Z} - \{0\}$, כאשר $\mathbb{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים. מעובדה זו וההגדרה של מחזור יסודי נובע כי $T=1$ הוא המחזור היסודי של $f(x) = x - [x]$.



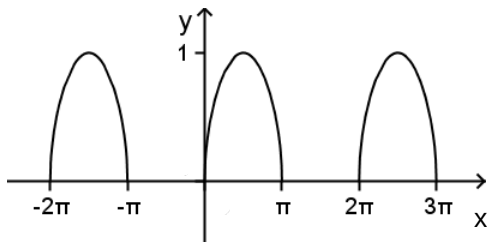
איור 25

באיור 25 מוצג הגרף של פונקציה זו. המחזוריות של הפונקציה מתבטאת בגרף בכך שניתן לקבל את כל הגרף על-ידי שכפול חלקו בקטע $[0,1]$. נציין כי בנקודות x שלמות רק נקודה על ציר ה- x שייכת לגרף כי $f(m) = m - [m] = m - m = 0$ לכל $m \in \mathbb{Z}$.

דוגמה 2: פונקציה מחזורית המוגדרת בחלק של $\mathbb{R}$

הפונקציה $f(x) = \sqrt{\sin x}$ מוגדרת בתחום

$$D = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [2\pi k, 2\pi k + \pi]$$



איור 26

כפי שרואים מהגרף באיור 26, הפונקציה מחזורית והמחזור היסודי שלה הוא $T = 2\pi$.

דוגמה 3: פונקציה מחזורית המוגדרת ב- $\mathbb{R}$ למעט אינסוף נקודות בודדות

הפונקציות $\tan(x)$ ו- $\cot(x)$ הן פונקציות מחזוריות שהמחזור שלהן הוא $T = \pi$. לכל אחת מן הפונקציות אינסוף נקודות אי-הגדרה.

הערות לגבי תחום ומחזור של פונקציה מחזורית

1. התחום של פונקציה מחזורית הנו תחום מחזורי, במובן שביחד עם כל x בתחום זה גם הערכים $x \pm T$ נמצאים בו, כאשר T הוא מחזור של הפונקציה. מכאן נובע בפרט כי התחום של פונקציה מחזורית אינו חסום בשני הכיוונים. יחד עם זאת, התחום אינו חייב להיות כל $\mathbb{R}$, כפי שרואים בדוגמאות 2, 3 לעיל.

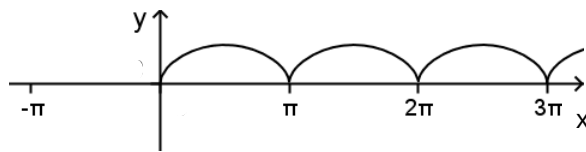
2. המחזור של פונקציה הוא מספר ולא קטע של ציר ה- x או חלק של הגרף!

3. אף פונקציה מחזורית אינה יכולה להיות פונקציה חד-חד-ערכית. בפרט, פונקציה מחזורית אינה יכולה להיות פונקציה מונוטונית.

4. קיימות פונקציות מחזוריות זוגיות (למשל פונקציית הקוסינוס) ופונקציות מחזוריות אי-זוגיות (למשל פונקציית הסינוס).

5. פונקציה קבועה $f(x) = c$ היא פונקציה מחזורית, כאשר כל מספר ממשי $T \neq 0$ הוא מחזור שלה. לפונקציה זו לא קיים מחזור יסודי.

המחזוריות החד-כיוונית של פונקציה



איור 27

אם בהגדרת פונקציה מחזורית נוותר על הדרישה $x - T \in D$, נגיע להגדרת מחזוריות בכיוון חיובי (ימינה).

מושג הגדרת המחזוריות החד-כיוונית מועיל כאשר עוסקים בפונקציות אשר תחום הגדרתן ממוקם בחלק החיובי של ציר ה- x . איור 27 מציג את הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{\frac{x|\sin x|}{|x|}}, \quad f(0) = 0, \quad \text{המוגדרת בתחום}$$

$D = [0, \infty)$. פונקציה זו מחזורית בכיוון החיובי, והמחזור היסודי שלה הוא $T = \pi$. באופן דומה ניתן להגדיר מחזוריות בכיוון שלילי של ציר ה- x .

שאלת חידוד והעמקה

האם קיימת פונקציה מחזורית שתחום הגדרתה $\mathbb{R}$, אשר אינה קבועה ואין לה מחזור יסודי?

תשובה

כן, פונקציה כזאת קיימת. למשל, אם $f(x)$ פונקציית דיריכלה, כלומר פונקציה שמקבלת שני ערכים שונים בלבד, ערך c_1 לכל x רציונלי וערך c_2 לכל x אי-רציונלי, אזי כל מספר רציונלי $T = \frac{n}{m}$ עם $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, הוא מחזור של $f(x)$.

נתבונן למשל בפונקציית דיריכלה:

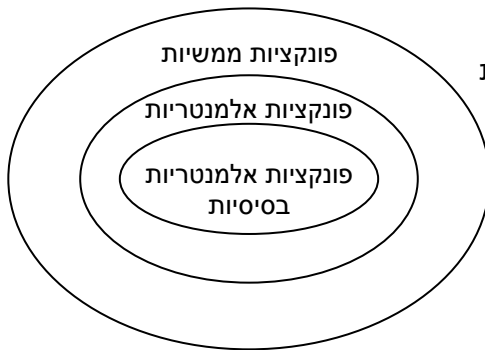
$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \text{ רציונלי} \\ 0 & , \quad x \text{ אי-רציונלי} \end{cases}$$

הוספת מספר רציונלי למספר ממשי x כלשהו, אינה פוגעת ברציונליות או באי-רציונליות שלו, ולכן אינה משנה את ערך $f(x)$ של פונקציית דיריכלה. לעומת זאת, הוספת מספר אי-רציונלי למספר רציונלי x הופכת את האחרון לאי-רציונלי ובכך משנה את ערך הפונקציה $f(x)$. לכן אף מספר אי-רציונלי אינו מחזור של פונקציית דיריכלה. בקבוצת המספרים הרציונליים החיוביים לא קיים מספר מינימלי, לכן ל- $f(x)$ לא קיים מחזור יסודי.

פונקציות אלמנטריות

אחד המאפיינים של עצמיתה של המתמטיקה הוא שהיא נותנת בידי המשתמש בה כלים להסקת מסקנות מתוך נתונים. בפרט, האנליזה נותנת בידי המשתמש בה כלים לחקור את תכונותיהן של פונקציות ממשיות, ודרכים להבחין באילו תנאים הכלים שבידיו תקפים. משפטים רבים באנליסה תקפים עבור פונקציות שהן רציפות בכל תחום הגדרתן. האפשרות לזהות בקלות שפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה היא אם כך חיונית במיוחד.

האנליזה מתמקדת בלימוד פונקציות ממשיות, פונקציות שבהן המשתנה וערכי הפונקציה הם מספרים ממשיים. בתוך הקבוצה האינסופית של פונקציות ממשיות יש תת-קבוצה (אף היא אינסופית) של פונקציות הנקראות פונקציות אלמנטריות. פונקציות אלה נוצרות על-ידי מספר סופי של פעולות חשבון והרכבה בפונקציות הנקראות פונקציות אלמנטריות בסיסיות. קבוצת הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות היא תת-קבוצה של קבוצת הפונקציות האלמנטריות.



באיור 28 מוצגים יחסי ההכלה בין פונקציות ממשיות, פונקציות אלמנטריות, ופונקציות אלמנטריות בסיסיות.

התכונה החשובה של הפונקציות האלמנטריות היא רציפותן בכל תחום הגדרתן.

איור 28

הגדרות

פונקציה $f(x)$ נקראת **פונקציה אלמנטרית בסיסית** אם היא כלולה ברשימת הפונקציות המוצגת במסגרת. פונקציה $f(x)$ נקראת **פונקציה אלמנטרית** אם היא אחת מהפונקציות האלמנטריות הבסיסיות או מתקבלת ממספר סופי של פונקציות אלמנטריות בסיסיות על ידי מספר סופי של פעולות חשבון ו/או פעולות הרכבה. הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות הן אבנים בעזרתן ניתן לבנות אינסוף **פונקציות אלמנטריות**.

פונקציות אלמנטריות בסיסיות

1. הפונקציה הקבועה: $f(x) = c$
2. פונקציית הערך המוחלט: $f(x) = |x|$
3. פונקציית החזקה עם מעריך טבעי: $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)
4. פונקציית השורש: $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)
5. הפונקציה המעריכית עם בסיס e : $f(x) = e^x$
6. פונקציית הלוגריתם הטבעי: $f(x) = \ln x$
7. פונקציית הסינוס: $f(x) = \sin x$
8. פונקציית הארקסינוס: $f(x) = \arcsin x$
9. פונקציית הטנגנס: $f(x) = \tan x$
10. פונקציית הארקטנגנס: $f(x) = \arctan x$

השם "פונקציות אלמנטריות בסיסיות" מקורו בעובדה שעל בסיס פונקציות אלו ניתן ליצור את כל קבוצת הפונקציות האלמנטריות, באמצעות מספר סופי של פעולות חשבון בפונקציות ופעולות הרכבת פונקציות. השם אינו רומז על פשטותן של הפונקציות (פונקציות רבות, פשוטות יותר, אינן כלולות בקבוצה זו), ואף אינו רומז על היכרות מוקדמת עמן בשלב מוקדם של תהליך הלמידה. הפונקציה $f(x) = 2^x$ מוכרת לתלמידים לפני הפונקציה $f(x) = e^x$, ובכל זאת הפונקציה e^x נחשבת פונקציה אלמנטרית בסיסית ואילו הפונקציה 2^x נחשבת פונקציה אלמנטרית (לא בסיסית) כי היא ניתנת להצגה כ- $2^x = e^{x \ln 2}$, כלומר, היא מתקבלת משלוש פונקציות אלמנטריות בסיסיות: x , $\ln 2$ (פונקציה קבועה) ו- e^x על-ידי פעולת כפל ופעולת הרכבה.

בדומה, השם פונקציה אלמנטרית אינו מעיד על פשטות הפונקציה.

להלן דוגמאות לפונקציות אלמנטריות שאינן פשוטות ופונקציות פשוטות שאינן אלמנטריות

דוגמה 1: פונקציה אלמנטרית, לא פשוטה

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{\sin x} - e^{x^2}}{x^3 \ln x + |x - 2|}$$

פונקציה זו מתקבלת מ-9 פונקציות אלמנטריות בסיסיות: $|x|$, 2 , x , $\ln x$, x^3 , $\sin x$, $\sqrt[3]{x}$, x^2 , e^x . על-ידי שתי פעולות חיסור, פעולת חיבור, פעולת כפל, פעולת חילוק, שלוש פעולות הרכבה. היות ומספר הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות המשתתפות ביצירת $f(x)$ הוא מספר סופי, ומספר כל הפעולות בהן גם הוא סופי, הפונקציה $f(x)$ הנתונה היא פונקציה אלמנטרית על-פי ההגדרה.

דוגמה 2: פונקציה פשוטה שאינה פונקציה אלמנטרית

הפונקציה $f(x) = [x]$ - פונקציית החלק השלם של x - אינה נמנית בין הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות, ולא ניתן לקבל אותה מפונקציות אלה באמצעות מספר סופי של פעולות חשבון ו/או פעולות הרכבה. לכן הפונקציה $f(x) = [x]$ אינה פונקציה אלמנטרית.

דוגמה 3: עוד פונקציה פשוטה שאינה פונקציה אלמנטרית

הפונקציה

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

מציינת סימן של מספר ממשי x . תחום הגדרתה הוא $\mathbb{R}$ והוא מפוצל לשלושה חלקים. פונקציה זו אינה נמנית בין הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות, ולא ניתן לקבל אותה מפונקציות אלה באמצעות מספר סופי של פעולות חשבון ו/או הרכבה. לכן הפונקציה $\operatorname{sgn} x$ אינה פונקציה אלמנטרית.

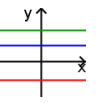
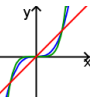
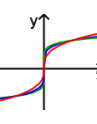
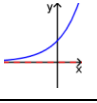
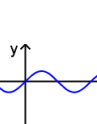
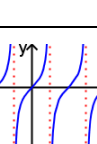
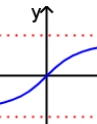
הערות לגבי פונקציות אלמנטריות בסיסיות ופונקציות אלמנטריות

- קבוצת הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות היא בעצמה קבוצה אינסופית, כיוון שהיא כוללת משפחות אינסופיות של פונקציות, למשל, משפחת פונקציות החזקה עם מעריך טבעי.
- יש ספרים בהם רשימת הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות שונה במקצת מהרשימה שהובאה בעמ' 25. ההבדלים בהגדרת הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות אינם משפיעים על מכלול הפונקציות האלמנטריות הנוצרות מהן, ולכן אינם עקרוניים.
- לא ניתן לצמצם את רשימת הפונקציות לכדי רשימה סופית של פונקציות אלמנטריות בסיסיות. קבוצת הפונקציות הקבועות לבדה היא קבוצה אינסופית.
- מהגדרת פונקציה אלמנטרית נובע כי אם פונקציה ממשית נוצרת באמצעות מספר סופי של פעולות חשבון ו/או הרכבה במספר סופי של פונקציות שהן פונקציות אלמנטריות (לאו דווקא בסיסיות), אז היא בהכרח פונקציה אלמנטרית.
- הפונקציה המעריכית a^x ($x > 0$) והפונקציה הלוגריתמית $\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$) אינן נמנות ברשימת הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות. אבל פונקציות אלה ניתנות להבעה באמצעות הפונקציות e^x ו- $\ln x$ בצורה $a^x = e^{x \ln a}$ ו- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, מכאן, על-פי ההגדרה, הפונקציות a^x ו- $\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) הן פונקציות אלמנטריות.
- לא במקרה מוצגות ברשימת הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות רק חלק מן הפונקציות הטריגונומטריות. הפונקציות $\cot x$ ו- $\cos x$ אינן נמנות בין הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות. אבל הן שייכות למכלול של הפונקציות האלמנטריות הודות לקשרים $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ו- $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
- כל פונקציה אלמנטרית רציפה בכל נקודה בה היא מוגדרת.** זאת תכונת הסגולה של פונקציות אלמנטריות. פונקציה שאינה אלמנטרית לא חייבת להיות רציפה בכל נקודת הגדרתה. למשל הפונקציה $f(x) = [x]$ (הערך השלם של x) אשר מוגדרת לכל x ממשי אינה רציפה באינסוף נקודות $x = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. יחד עם זאת, חשוב לשים לב שגם פונקציה שאינה אלמנטרית יכולה להיות רציפה בכל תחום הגדרתה. למשל, אם $S(x)$ היא פונקציית השטח המשתנה מתחת לגרף $y = e^{(x^2)}$ מעל לקטע $[0, x]$, אזי $S(x)$ היא פונקציה רציפה ואף גזירה אינסוף פעמים לכל x ממשי. אבל, באנליזה מתקדמת מוכיחים שלא ניתן להציגה באמצעות מספר סופי של פעולות חשבון ו/או הרכבה במספר סופי של פונקציות שהן פונקציות אלמנטריות בסיסיות, ומכאן שהיא איננה פונקציה אלמנטרית. הדוגמה יכולה לעורר את השאלה: מדוע ליצירת פונקציה רציפה שאינה אלמנטרית לא הסתפקנו בסרטוט גרף רציף אשר בנוי ביד חופשית ולא על-פי תבנית כלשהי? התשובה פשוטה: כיוון שיתכן שלגרף כזה יכולה להימצא תבנית אלמנטרית מתאימה ואין לנו דרך להבטיח שתבנית כזו אינה קיימת.
- הטבלה בשני העמודים הבאים מציגה את הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות ואת תכונותיהן העיקריות. דיון רחב יותר במרבית הפונקציות האלה ובמשפחות של פונקציות שנוצרות באמצעותן יוצג בהמשך, בפרקים שיוקדשו לחקירת משפחות של פונקציות.

פונקציות אלמנטאריות בסיסיות	תחום הגדרה	תחומי עליה	תחומי ירידה	תחומי חיוביות	תחומי שליליות
$f(x) = c$	$\mathbb{R}$	אין	אין	בהתאם לערך c	בהתאם לערך c
$f(x) = x $	$\mathbb{R}$	$x > 0$	$x < 0$	$x \neq 0$	אין
$f(x) = x^n$, זוגי n **	$\mathbb{R}$	$x > 0$	$x < 0$	$x \neq 0$	אין
$f(x) = x^n$, אי-זוגי n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	אין	$x > 0$	$x < 0$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$, זוגי n	$x \geq 0$	$x > 0$	אין	$x > 0$	אין
$f(x) = \sqrt[n]{x}$, אי זוגי n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	אין	$x > 0$	$x < 0$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	אין	$\mathbb{R}$	אין
$f(x) = \ln x$	$x > 0$	$x > 0$	אין	$x > 1$	$0 < x < 1$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ ***	$(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$	$(2\pi k, \pi + 2\pi k)$	$(-\pi + 2\pi k, 2\pi k)$
$f(x) = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-1 \leq x \leq 1$	אין	$0 < x \leq 1$	$-1 \leq x < 0$
$f(x) = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k)$	אין	$(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k)$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi k)$
$f(x) = \arctan x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	אין	$x > 0$	$x < 0$

טבלה 8: תכונות של פונקציות אלמנטאריות בסיסיות

*תכונה זו מתייחסת לשורות בהן מוצגת משפחה של פונקציות; ** בכל הטבלה ח מייצג מספר טבעי; *** בכל הטבלה k מייצג מספר שלם.

גרף	מחזור יסודי	נקודות משותפות לכל הגרפים*	אסימפטוטות	חסימות	זוגיות / אי זוגיות	נקודות קיצון	נקודות האפס
	אין	אין	$y = c$	חסומה	זוגית לכל c ; זוגית ואי זוגית אם $c = 0$	אין	בהתאם לערך c
	אין		$y = x$ $y = -x$	חסומה מלמטה בלבד	זוגית	מינימום $(0,0)$	$(0,0)$
	אין	$(1,1)$ $(-1,1)$	אין	חסומה מלמטה בלבד	זוגית	מינימום $(0,0)$	$(0,0)$
	אין	$(1,1)$ $(-1,-1)$	אין	לא חסומה משום צד	אי זוגית	אין	$(0,0)$
	אין	$(0,0)$ $(1,1)$	אין	חסומה מלמטה בלבד	לא זוגית ולא אי זוגית	מינימום $(0,0)$	$(0,0)$
	אין	$(0,0)$ $(1,1)$ $(-1,1)$	אין	לא חסומה משום צד	אי זוגית	אין	$(0,0)$
	אין		$y = 0$	חסומה מלמטה בלבד	לא זוגית ולא אי זוגית	אין	אין
	אין		$x = 0$	לא חסומה משום צד	לא זוגית ולא אי זוגית	אין	$(1,0)$
	2π		אין	חסומה: $-1 \leq y \leq 1$	אי-זוגית	מקסימום $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1)$ מינימום $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -1)$	$x = \pi k$
	אין		אין	חסומה: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	אי-זוגית	מקסימום $(1, \frac{\pi}{2})$ מינימום $(-1, -\frac{\pi}{2})$	$(0,0)$
	π		$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	לא חסומה משום צד	אי-זוגית	אין	$x = \pi k$
	אין		$y = \frac{\pi}{2}$ $y = -\frac{\pi}{2}$	חסומה: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	אי-זוגית	אין	$(0,0)$

פעולות בפונקציות

אחת המטרות של הוראת האנליזה היא לפתח אצל התלמידים תפיסה מבנית המאפשרת להם להתייחס אל פונקציה כאל ישות ממשית, אובייקט שאפשר לפעול עמו בפעולות מסוגים שונים, בכלל זה פעולות חשבון בפונקציות והרכבת פונקציות, להתייחס גם לתוצאות הפעולות כאל אובייקטים, ולחקור את תכונותיהן. רכישת התפיסה המבנית בהקשר של פונקציות גם מכינה את הקרקע להבנה שהפונקציה הנגזרת של פונקציה נתונה היא בעצמה פונקציה.

את הדיון בפעולת ההרכבה נידחה לפרק המוקדש לפונקציה המורכבת (עמוד 280), אשר יוצג בסמוך להצגת הנגזרת של פונקציה מורכבת. בפרק הנוכחי נדון בקצרה בפעולות חשבון בשתי פונקציות, ובדוק את השפעתן על תכונות שונות של הפונקציות. דיון רחב מוקדש לקבוצה מיוחדת של פעולות בפונקציות – פעולות לינאריות בפונקציות.

פעולות חשבון בשתי פונקציות

הגדרות

תהינה $f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות עם תחומי הגדרה D ו- G בהתאם. אם התחום המשותף שלהם $D \cap G$ אינו ריק, אז ניתן להגדיר פונקציות חדשות:

פונקציית הסכום $s(x) = f(x) + g(x)$ מתאימה לכל ערך של x את סכום הערכים שמתאימות לו הפונקציות f ו- g .

פונקציית הפרש $d(x) = f(x) - g(x)$ מתאימה לכל ערך של x את הפרש הערכים שמתאימות לו הפונקציות f ו- g .

פונקציית המכפלה $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ מתאימה לכל ערך של x את מכפלת הערכים שמתאימות לו הפונקציות f ו- g .

אם בנוסף, התחום המשותף לשתי הפונקציות מכיל ערכי x עבורם $g(x) \neq 0$, ניתן להגדיר גם **פונקציית מנה** $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ שמתאימה לכל ערך של x עם $g(x) \neq 0$ את מנת הערכים שמתאימות לו הפונקציות f ו- g .

תחום ההגדרה של שלוש הפונקציות הראשונות הוא $D \cap G$ ותחום ההגדרה של $q(x)$ הוא $D \cap G - \{x \in G \mid g(x) = 0\}$.

הערה

חשוב לשים לב שפישוט אלגברי של פונקציה המתקבלת מפעולה בפונקציות אחרות עלול לשנות את תחום ההגדרה של הפונקציה, וכך להוביל לפונקציה שהיא שונה מהפונקציה המקורית. למשל, הפונקציות $y = \sqrt{(x-2)(x+3)}$ ו- $y = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3}$ הן פונקציות שונות כיוון שתחומי ההגדרה שלהן שונים זה מזה.

פעילות 2: השפעת פעולות חשבון על תכונת זוגיות / אי-זוגיות של פונקציות

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- הסכום של כל שתי פונקציות זוגיות הוא פונקציה זוגית.
- המכפלה של כל שתי פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- קיימת פונקציה אי-זוגית שהיא מכפלה של שתי פונקציות אי-זוגיות.
- קיימת פונקציה זוגית שהיא סכום של שתי פונקציות שאינן זוגיות.
- המכפלה של כל שתי פונקציות שאחת מהן זוגית והשנייה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
- הסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית הוא תמיד פונקציה אי-זוגית.

מבחר פתרונות

- ב. נכון. הטענה נובעת מההגדרות של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית: אם f ו- g פונקציות אי-זוגיות, מתקיים:

$$s(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = s(x)$$

- ג. נכון. הפונקציה הקבועה $f(x) = 0$ היא פונקציה אי-זוגית שהיא מכפלה של הפונקציה $f(x) = 0$ בכל פונקציה אי-זוגית אחרת. חשוב לשים לב שתשובה זו אינה עומדת בסתירה לתשובה לסעיף ב. המכפלה של כל שתי פונקציות אי-זוגיות היא אכן פונקציה זוגית, אך הפונקציה $f(x) = 0$ היא בעת ובעונה אחת פונקציה זוגית ואי-זוגית. פונקציה אי-זוגית שאינה הפונקציה הקבועה $f(x) = 0$ אינה יכולה להיות מכפלה של שתי פונקציות אי-זוגיות.

כיוון שהוכחנו שהמכפלה של כל שתי פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית הרי לא קיימות שתי פונקציות אי-זוגיות שמכפלתן פונקציה אי-זוגית.

- ד. נכון. הפונקציות $f(x) = x^2 + x$ ו- $g(x) = -x$ אינן זוגיות אך סכומן הוא פונקציה זוגית.

- ו. לא נכון. למשל, הפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ היא פונקציה זוגית. הפונקציה $g(x) = x$ היא פונקציה אי-זוגית. פונקציית הסכום של שתי פונקציות אלה, $s(x) = x^2 + x + 1$ אינה פונקציה אי-זוגית (וגם אינה פונקציה זוגית).

הערה

סעיפי הפעילות נבחרו כיוון שהם מזמנים דיון בנימוקים השונים הדרושים להוכחה או הפרכה של הטענות המוצגות בהם. קיום דוגמה נגדית יחידה לטענה כללית מספיקה להפרכתה. להצדקת טענת קיום די להביא דוגמת קיום. להצדקת טענה כללית נכונה כמו בסעיף ב דרושה הוכחה כללית, שבמקרה זה מבוססת על ההגדרות של פונקציות זוגיות ואי-זוגיות ועל תכונות פעולות החשבון.

פעילות 3: שאלות על השפעת פעולות חשבון בפונקציות על עלייה וירידה של הפונקציות

- האם הסכום של כל שתי פונקציות עולות הוא בהכרח פונקציה עולה?
- הביאו, אם אפשר, דוגמה לשתי פונקציות עולות שמכפלתן היא פונקציה שאינה מונוטונית.
- הביאו, אם אפשר, דוגמה לשתי פונקציות יורדות שסכומן הוא פונקציה עולה.

פתרונות

א. נכון. ההוכחה מתבססת על הגדרת פונקציה עולה. יהיו f ו- g פונקציות עולות עבורן קיימת פונקציית סכום $s(x)$. לכל $x_1 < x_2$ בתחום ההגדרה של $s(x)$ מתקיים: $s(x_1) = f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2) = s(x_2)$

על סמך העלייה של f ושל g

ב. כל זוג פונקציות ליניאריות לא קבועות מהווה דוגמה מתאימה, שכן מכפלתן היא פונקציה ריבועית.

ג. לא קיימת דוגמה מתאימה. אפשר להוכיח, בדומה להוכחה בסעיף א, שהסכום של כל שתי פונקציות יורדות הוא פונקציה יורדת.

שאלת העמקה וחיידוד

אם $f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות עולות/יורדות בתחום אחד כלשהו ב- $\mathbb{R}$, איזה תנאי נוסף מבטיח כי המכפלה $f(x) \cdot g(x)$ תהיה פונקציה מונוטונית (עולה או יורדת) בתחום זה?

תשובה

התנאי המבוקש הוא שמירת אותו סימן קבוע על-ידי שתי הפונקציות, דהיינו:

- אם הפונקציות $f(x), g(x)$ שתיהן חיוביות בתחום אחד, וכל אחת מהן עולה/יורדת בתחום זה, אזי מכפלתן $f(x) \cdot g(x)$ גם היא עולה/יורדת בתחום זה.
- אם הפונקציות $f(x), g(x)$ שתיהן שליליות בתחום אחד, וכל אחת מהן עולה/יורדת בתחום זה, אזי מכפלתן $f(x), g(x)$ יורדת/עולה בתחום זה.

משפט על שמירת תכונת המחזוריות בפעולות חשבון

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות נתונות עבורן ניתן לבצע ארבע פעולות חשבון. אם כל אחת מהן מחזורית ויש להן מחזור משותף T , אז כל אחת מהפונקציות $s(x), d(x), p(x), q(x)$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור T .

הוכחה

יהי D תחום ההגדרה של f ו- G תחום ההגדרה של g . אז $D \cap G$ הוא תחום ההגדרה של $s(x), d(x), p(x)$. מהמחזוריות של f, g נובע כי אם $x \in D \cap G$ גם $x \pm T \in D \cap G$ ומתקיים:

$$\left\{ \begin{array}{l} s(x+T) = f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x) = s(x) \\ d(x+T) = f(x+T) - g(x+T) = f(x) - g(x) = d(x) \\ p(x+T) = f(x+T) \cdot g(x+T) = f(x) \cdot g(x) = p(x) \end{array} \right. \text{ לכל } x \in D \cap G$$

בכך הוכח כי כל אחת מהפונקציות $s(x), d(x), p(x)$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור T .

תחום ההגדרה של $q(x)$ הוא $Q = D \cap G - \{x \in G \mid g(x) = 0\}$. מהמחזוריות של f, g נובע כי אם $x \in Q$ גם $x \pm T \in Q$, ומתקיים:

$$q(x+T) = \frac{f(x+T)}{g(x+T)} = \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) \quad \text{לכל } x \in Q.$$

כלומר, הפונקציה $q(x)$ גם היא מחזורית בעלת מחזור T .

הערה על קיום והיעדר של מחזור משותף לשתי פונקציות מחזוריות

פעולת חשבון בשתי פונקציות מחזוריות יכולה להביא לפונקציה שאינה מחזורית. למשל, ידוע כי פונקציית הסכום $s(x) = \sin x + \sin \pi x$ אינה פונקציה מחזורית, כאשר כל אחת מהפונקציות המחוברות היא פונקציה מחזורית.

דוגמה זו אינה סותרת את המשפט דלעיל. לפי משפט זה פעולות חשבון בפונקציות מחזוריות מביאות לפונקציות מחזוריות אם לפונקציות המופעלות בפעולה יש מחזור משותף, אחד לפחות. כל המחזורים של $\sin x$ הם $2\pi k$ וכל המחזורים של $\sin \pi x$ הם $2k$, כאשר k הוא מספר שלם כלשהו השונה מ-0. בין המחזורים האלה אין אף מחזור משותף. לעומת זאת לפונקציות $\sin \frac{x}{2}$ ו- $\sin \frac{x}{3}$ יש מחזור משותף $T = 12\pi$. כללית אם היחס של שני

מחזורים T_1, T_2 של פונקציות $f_1(x), f_2(x)$ הוא מספר רציונאלי, כלומר $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$ כאשר $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. אזי לפונקציות אלה יש מחזור משותף $T = nT_1 = mT_2$.

שאלות העמקה וחיידוד

- האם פעולת חשבון בפונקציות שאינן מחזוריות יכולה להביא לפונקציה מחזורית?
- האם ייתכן כי בפעולת חשבון בשתי פונקציות מחזוריות, לתוצאת הפעולה יש מחזור שאין לאף פונקציה המשתתפת בפעולה?

תשובות

1. כן, הדבר אפשרי. למשל, כל אחת מהפונקציות $f(x) = x$, $g(x) = [x]$ כאשר $[x]$ מסמן את החלק השלם של x , אינה מחזורית, אבל הפרשן $f(x) - g(x) = x - [x]$ פונקציה מחזורית.

2. כן, גם זה אפשרי. למשל, תהי $f(x)$ פונקציה המקבלת ערך 1 לכל x רציונאלי וערך (-1) לכל x אי-רציונאלי. כל מספר רציונאלי השונה מ-0 הוא מחזור של $f(x)$, ואף מספר אי-רציונאלי אינו מחזור של פונקציה זו.

פעולת הכפל של פונקציה בעצמה, כלומר, העלאתה בריבוע, מביאה לפונקציה $f^2(x) = 1$ לכל x . פונקציה זו היא פונקציה קבועה וכל מספר ממשי, גם אי-רציונאלי, הוא מחזור שלה.

הטבלה הבאה מציגה סיכום של השפעת פעולות חשבון על התכונות הבסיסיות של פונקציות.

$q(x)$ $= f(x)/g(x)$	$p(x)$ $= f(x) \cdot g(x)$	$d(x)$ $= f(x) - g(x)$	$s(x)$ $= f(x) + g(x)$	$g(x)$	$f(x)$
זוגית.	זוגית	זוגית	זוגית	זוגית	זוגית
אי-זוגית	אי-זוגית			אי-זוגית	זוגית
זוגית	זוגית	אי-זוגית	אי-זוגית	אי-זוגית	אי-זוגית
	חסומה	חסומה	חסומה	חסומה	חסומה
			עולה	עולה	עולה
		עולה		יורדת	עולה
		יורדת		עולה	יורדת
			יורדת	יורדת	יורדת
מחזורית במחזור T	מחזורית במחזור T	מחזורית במחזור T	מחזורית במחזור T	מחזורית במחזור T	מחזורית במחזור T

טבלה 9

הערות לטבלה

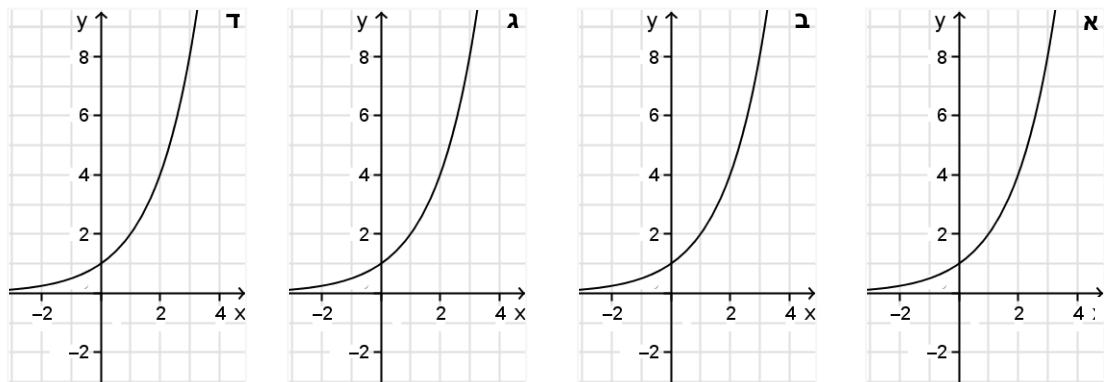
- תא ריק בטבלה פירושו שאין מסקנה אחידה לתוצאת הפעולה במקרה זה.
- פעולות חשבון בפונקציות מחזוריות בעלות מחזור משותף שומרות על מחזוריות עם אותו מחזור, אבל הן יכולות לשנות את המחזור היסודי. למשל המחזור היסודי של $f(x) = \sin x$ הוא 2π , והמחזור היסודי של $p(x) = f(x) \cdot f(x) = \sin^2 x$ הוא π .

פעילות 4: חקירת פעולות ליניאריות בפונקציות

לפניכם גרף הפונקציה $y = 2^x$ מסורטט בארבע מערכות צירים.

בפעילות זו נסרטט גרפים של פונקציות המתקבלות מהפונקציה $y = 2^x$ באמצעות פעולות שונות. נרחיב על פעולות אלה בהמשך.

א. הוסיפו לכל אחת ממערכות הצירים את הגרפים של 4 הפונקציות הרשומות בטבלה 11 בטור המתאים (תוכלו להיעזר בטבלת ערכים, תוכנת מחשב, שיקולים תיאורטיים או ניסיון אישי). הגרפים מסורטטים בעמוד הבא. אתם מוזמנים לסרטט אותם, בפועל או בדמיון, לפני שתעברו לעמוד הבא.



איור 30

ב. בכל עמודה בטבלה נסו לתאר את כל הפונקציות על-ידי תבנית אחת עם פרמטר c . במילים אחרות, תנו "שם משפחה" לפונקציות בכל עמודה.

א. שם משפחה:	ב. שם משפחה:	ג. שם משפחה:	ד. שם משפחה:
1. $y = 2^x + 1$	1. $y = 2^{x+1}$	1. $y = 2 \cdot 2^x$	1. $y = 2^{2x}$
2. $y = 2^x - 1$	2. $y = 2^{x-1}$	2. $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$	2. $y = 2^{3x}$
3. $y = 2^x + 3$	3. $y = 2^{x+3}$	3. $y = 3 \cdot 2^x$	3. $y = 2^{\frac{1}{2}x}$
4. $y = 2^x - 3$	4. $y = 2^{x-3}$	4. $y = \frac{1}{4} \cdot 2^x$	4. $y = 2^{\frac{1}{4}x}$

טבלה 11

ג. הוסיפו פונקציה אחת לכל משפחת פונקציות והוסיפו את הגרף שלה למערכת הצירים.

ד. רשמו תכונות משותפות לכל אחת מן המשפחות.

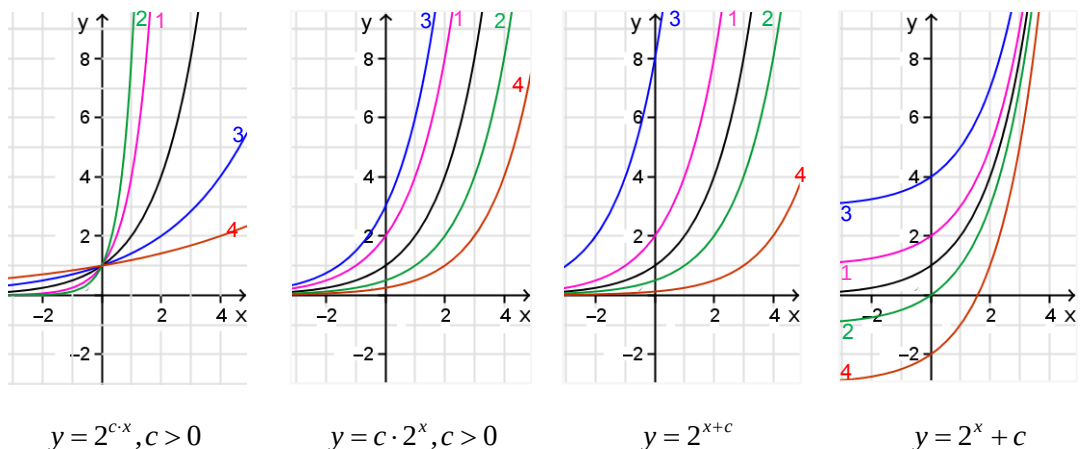
ה. ציינו באילו מן המשפחות סרטוט גרף הפונקציה היה לכם מובן מאליו, ובאילו הייתם צריכים להשקיע יותר מחשבה.

ו. ניתן כמובן לבחור פונקציה אחרת, למשל $y = |x|$ כנקודת מוצא לפעילות זו. ציינו יתרונות וחסרונות לבחירת כל אחת מן הפונקציות כנקודת מוצא.

בהמשך הפרק, לאחר שנדון בכל פעולה בנפרד, נציג את היתרונות והחסרונות של בחירת הפונקציה עליה מבצעים את הפעולות השונות.

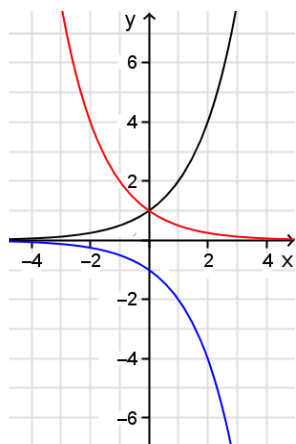
מבחר פתרונות והערות לפעילות

במערכות הצירים להלן מסורטטים הגרפים של משפחות הפונקציות מהפעילות בעמוד הקודם. "שם המשפחה" מופיע מתחת לכל מערכת צירים.



איור 31

■ במערכת הצירים המייצגת את המשפחה $y = 2^x + c$ ניתן לראות את ארבעת הגרפים החדשים כהזזה אנכית של גרף הפונקציה $y = 2^x$ כלפי מעלה או כלפי מטה.



$$y = 2^x, y = -2^x, y = 2^{-x}$$

איור 32

■ במערכת הצירים המייצגת את המשפחה $y = 2^{x+c}$ ניתן לראות את ארבעת הגרפים החדשים כהזזה אופקית של גרף הפונקציה $y = 2^x$ ימינה או שמאלה.

■ במערכת הצירים המייצגת את המשפחה $y = c \cdot 2^x$ ($c > 0$) ניתן לראות את ארבעת הגרפים החדשים כמתיחה אנכית או ככיווץ אנכי של גרף הפונקציה $y = 2^x$.

■ הדמיון בין הגרפים המייצגים את המשפחות $y = 2^{x+c}$ ו- $y = c \cdot 2^x$ ($c > 0$), אינו מקרי אלא נובע מחוקי החזקות. כיוון שעל-פי חוקי החזקות מתקיים $2^{x+c} = 2^x \cdot 2^c$, ניתן לראות כל פונקציה מהמשפחה $y = 2^{x+c}$ גם כמכפלה של הפונקציה $y = 2^x$ בקבוע 2^c .

■ במערכת הצירים המייצגת את המשפחה $y = 2^{-x}$ ($c > 0$) ניתן לראות את ארבעת הגרפים החדשים כמתיחה אופקית או ככיווץ אופקי של גרף הפונקציה $y = 2^x$.

- אם מוותרים, בהגדרות של שתי המשפחות האחרונות, על הדרישה $c > 0$, מקבלים משפחות רחבות יותר של פונקציות. גרף הפונקציה $y = -c \cdot 2^x$ מתקבל מגרף הפונקציה $y = c \cdot 2^x$ על-ידי שיקוף בציר ה- x . גרף הפונקציה $y = 2^{-c \cdot x}$ מתקבל מגרף הפונקציה $y = 2^{c \cdot x}$ על-ידי שיקוף בציר ה- y . (באיור 32 מופיעים הגרפים המתקבלים משיקוף של גרף הפונקציה $y = 2^x$ בשני הצירים).

פעולות ליניאריות בפונקציות

לעיתים ניתן לגלות תכונות רבות של פונקציה אם מתייחסים אליה כאל פונקציה שהתקבלה מפונקציה פשוטה יותר כתוצאה של הפעלת פעולות, כמו: הזזה, מתיחה וכיווץ על הפונקציה הפשוטה יותר. למשל, ניתן לגלות תכונות של הפונקציה $f(x) = 3x^2$ אם מתייחסים אליה כמתיחה פי 3 של הפונקציה $f(x) = x^2$.

בפרק זה נעסוק בקשר בין פונקציה ממשית $f(x)$ לבין הפונקציה המתקבלת ממנה בעקבות ארבע פעולות ליניאריות ושילוביהן: $f(x) + c$, $af(x)$, $f(x + c)$, $f(ax)$.

הכרת ההשפעה של פעולות ליניאריות על גרף של פונקציה, מאפשרת לזהות במבט גרפים של פונקציות רבות המתקבלות מפונקציות מוכרות על-ידי פעולות אלה, וגם לסרטט גרפים כאלה בקלות.

הבנה של השפעת הפעולות הליניאריות על גרף של פונקציה עשויה להקל בהמשך על ההבנה של כללי גזירה אחדים, כגון: $(f(x) + c)' = f'(x)$ או $(af(x))' = af'(x)$. במקרה הראשון, הזזה אנכית אינה משפיעה על שיפוע הפונקציה, ואילו במקרה השני מדובר במתיחה או כיווץ של גרף הפונקציה פי a , ולכן גם שיפועי המשיקים משתנים בהתאם.

הבנה של השפעת פעולות ליניאריות על גרף של פונקציה יכולה לשפוך אור נוסף על תכונות של פונקציות שונות. למשל, תפיסת הפונקציה $\sin(x + \pi)$ כפונקציה שהגרף שלה מתקבל מהזזה אופקית של גרף הפונקציה $\sin x$, יכולה לתמוך בהבנת קשרים כגון: $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

בפרק "הפונקציה המורכבת" נתייחס לפעולות ליניאריות גם כהרכבה של פונקציות (עמוד 293).

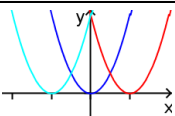
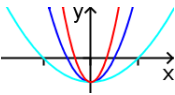
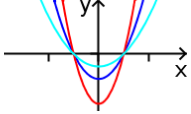
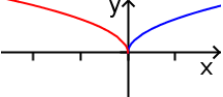
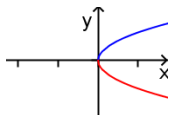
תהי נתונה פונקציה ממשית $f(x)$. נחליף את המשתנה החופשי x בפונקציה ליניארית $ax + b$ כאשר a, b מספרים קבועים ממשיים, ו- $a \neq 0$. נחליף את הפונקציה f בפונקציה $Af + B$, כאשר A, B מספרים ממשיים קבועים, $A \neq 0$. כתוצאה של הפעולות האלה נקבל את הפונקציה:

$$g(x) = Af(ax + b) + B \quad (*)$$

המעבר מ- $f(x)$ ל- $g(x)$ נקרא **פעולה ליניארית כללית** ב- f . המספרים a, b, A, B נקראים הפרמטרים של התבנית (*). השינוי אשר חל בגרף של f במעבר ל- g נקרא **הטרנספורמציה הליניארית** של הגרף של f . כאשר בתבנית (*) מעלימים את כל הפרמטרים, למעט אחד, מקבלים פעולות ליניאריות פשוטות ב- f . למשל, אם מניחים $B = 0$, $A = a = 1$, התבנית הופכת ל- $g(x) = f(x + b)$ ומתארת פעולה הנקראת הזזה אופקית. אם מניחים $A = 1$, $a > 0$, $b = B = 0$, התבנית (*) הופכת ל- $g(x) = f(ax)$ ומתארת פעולה הנקראת מתיחה/כיווץ אופקי.

בכל הפרק, כשנדון בפעולות על פונקציות, נתייחס אל הגרפים של הפונקציה המקורית ושל הפונקציה שמתקבלת כתוצאה מהפעולה כמוצגים במערכת צירים קרטזית אחת.

בטבלה להלן מוצגות כל הפעולות האלה. בהמשך נקרא להן פעולות **ליניאריות בסיסיות**, כי הפעולה הליניארית הכללית (*) יכולה להתפרש ולהתבצע כסדרת פעולות אלה.

שם הפעולה ב- $f(x)$	פרמטר	התבנית החדשה	שינוי בתבנית של $f(x)$	סרטוט
הזזה אופקית ב- c	$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$	$f(x+c)$	הוספת מספר קבוע c ל- x	
הזזה אנכית ב- c	$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$	$f(x)+c$	הוספת מספר קבוע c לפונקציה	
מתיחה / כיווץ אופקי	$a > 0$	$f(ax)$	הכפלת x במספר קבוע חיובי a	
מתיחה / כיווץ אנכי	$a > 0$	$af(x)$	הכפלת הפונקציה במספר קבוע חיובי a	
שיקוף ביחס לציר ה- y		$f(-x)$	הכפלת x ב- (-1)	
שיקוף ביחס לציר ה- x		$-f(x)$	הכפלת הפונקציה ב- (-1)	

טבלה 12

נשים לב:

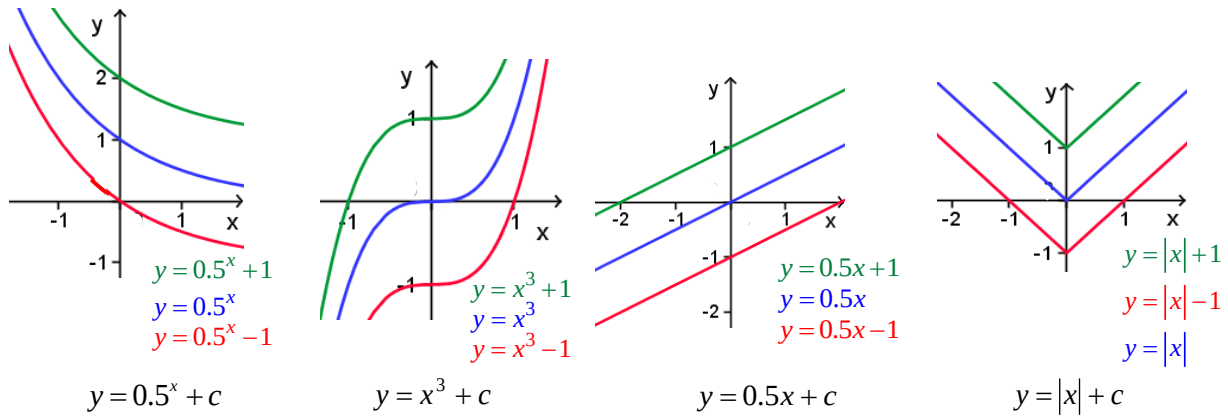
1. השמות לפעולות ליניאריות בסיסיות בפונקציות משקפים טרנספורמציות של הגרפים, המתרחשות בעקבות פעולות אלה.

2. לפעולות ליניאריות בסיסיות בפונקציות ולתוצאותיהן נהוג לקרוא באותם השמות. למשל, למעבר מ- $f(x)$ ל- $f(x+c)$ ולפונקציה $f(x+c)$ עצמה קוראים הזזה אופקית של $f(x)$ ב- c .

במהלך הפרק נתבונן בכל אחת מן הטרנספורמציות הללו ונסביר את הקשר בין השינוי בגרף הפונקציה לשינוי בתבניתה משתי נקודות מבט: (1) השפעת שינויים בתבנית הפונקציה על גרף הפונקציה; (2) השפעת שינויים בגרף הפונקציה על תבנית הפונקציה.

הזזה אנכית של גרף הפונקציה - הטרנספורמציה: $y = f(x) + c$

איור 33 מציג דוגמאות של הזזה אנכית של פונקציות שונות.



איור 33

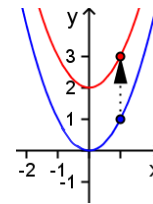
בכל אחת ממערכות הצירים הגרף המסורטט בצבע כחול מייצג את הפונקציה המקורית $f(x)$, ושני הגרפים האחרים הם טרנספורמציות מהצורה: $y = f(x) + c$.

בכל הדוגמאות הטרנספורמציה לא שינתה את צורת הגרף אלא רק את מיקומו במערכת הצירים, כך שהגרף כולו מוזז במקביל לציר ה- y .

נתבונן, לדוגמה, בגרפים של הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = x^2 + 2$ ובטבלת ערכים משותפת לשתי הפונקציות. (איור 34 טבלה 13).

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = x^2 + 2$	6	3	0	3	6

טבלה 13



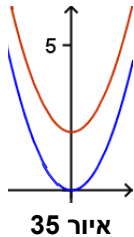
איור 34

הפונקציה $y = x^2 + 2$ מתאימה לכל ערך של המשתנה החופשי x , ערך הגדול ב-2 מהערך שמתאימה לו הפונקציה $y = x^2$. כיוון שלכל נקודה $A(x, x^2)$ על גרף הפונקציה $y = x^2$ מתאימה נקודה $B(x, x^2 + 2)$ על גרף הפונקציה $y = x^2 + 2$, גרף הפונקציה $y = x^2 + 2$ הוא הזזה אנכית של גרף הפונקציה $y = x^2$ בשתי יחידות בכיוון ציר ה- y .

ההסבר תקף, כמוכן, לכל פונקציה f ולכל מספר ממשי c , בהתאם לסימן של c .

הערות

- הזזות אנכיות מתוארות על-ידי התבנית $f(x) + c$, וכיוון ההזזה תואם את סימנו של c : ההזזה היא כלפי מעלה אם $c > 0$ וכלפי מטה אם $c < 0$.

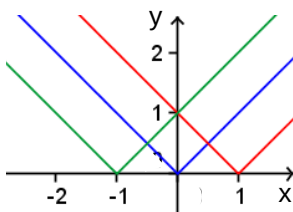


איור 35

- פעמים רבות כשמסרטטים במערכת צירים אחת גרף של פונקציה, וגרף שהתקבל ממנו על-ידי הזזה, הגרף של הפונקציה המתקבלת מההזזה אינו נראה בדיוק כמו הגרף המקורי. באיור 34 הוא נראה יותר קטן ופחות תלול. אפשר להדגיש את ההזזה האנכית של הגרף על-ידי בחירת חלון שבו שני הגרפים מתאימים לאותו קטע על ציר ה- x . יחד עם זאת, גם בחלון שבו החלק הנראה של גרף הפונקציה החדשה הוא העתק מדויק של החלק הנראה של גרף הפונקציה המקורית (איור 35), קשה מאוד לראות את המרחק האנכי הקבוע בין הגרפים. הסיבה לכך נעוצה בתעתוע ראייה, הקשור בעובדה שנקודות שבקצות הגרף החדש מרחקן (המרחק הקטן ביותר) מן הגרף המקורי קטן יותר מאשר גודל ההזזה.

נסכם במשפט:

משפט: במערכת צירים קרטזית אחת הגרף $y = f(x) + c$ מתקבל מהגרף $y = f(x)$ על-ידי הזזתו במקביל לציר ה- y , הזזה כלפי מעלה אם $c > 0$, וכלפי מטה אם $c < 0$. גודל ההזזה בשני המקרים הוא $|c|$.



איור 36

הזזה אופקית של גרף הפונקציה - הטרנספורמציה: $y = f(x + c)$.

שאלות מקדימות

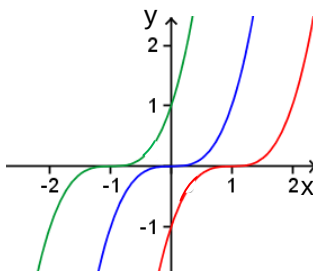
(התשובות לשאלות אלו מופיעות בעמוד 44.)

1. במערכת הצירים באיור 36 מופיעים הגרפים של הפונקציות

$$א. y = |x| \quad ב. y = |x - 1| \quad ג. y = |x + 1|$$

זהו מהו הגרף המתאים לכל פונקציה.

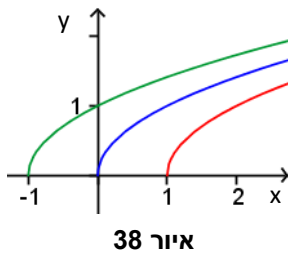
הוסיפו למערכת הצירים את גרף הפונקציה $y = |x + 2|$.



איור 37

2. במערכת הצירים באיור 37 מופיע גרף הפונקציה $y = x^3$ (בכחול). הגרף האדום התקבל ממנו על-ידי הזזה ביחידה אחת ימינה במקביל לציר ה- x , והגרף הירוק התקבל ממנו על-ידי הזזה ביחידה אחת שמאלה במקביל לציר ה- x .

מהי התבנית המתאימה לכל אחד מן הגרפים?



3. במערכת הצירים באיור 38 מופיעים הגרפים של הפונקציות:

א. $y = \sqrt{x}$ ב. $y = \sqrt{x+1}$ ג. $y = \sqrt{x-1}$

זהו מהו הגרף המתאים לכל אחת מן הפונקציות.

כיצד ניתן היה לבחור אחרת את "חלון הגרף", כדי להבליט טוב יותר את העובדה שהגרפים התקבלו זה מזה על-ידי הזזה אופקית.

בכל אחת ממערכות הצירים באיורים 36-38 הגרף המסורטט בצבע כחול מייצג את הפונקציה $f(x)$, ושני הגרפים האחרים הם טרנספורמציות מהצורה: $y = f(x+c)$.

כשמתבוננים בגרפים שהתקבלו בפעילות לעיל אפשר להבחין בתופעה: בכל המקרים שלפנינו הגרפים החדשים שהתקבלו באמצעות הטרנספורמציה $y = f(x+c)$ נראים כאילו הזיזו את גרף הפונקציה $f(x)$ ימינה או שמאלה במקביל לציר ה- x . הזזת גרף במקביל לציר ה- x נקראת הזזה אופקית והיא מתוארת על-ידי התבנית $y = f(x+c)$.

נסביר את הקשר בין השינוי בתבנית הפונקציה לבין השינוי בגרף שלה משתי נקודות מבט: השפעת השינוי בתבנית הפונקציה על השינוי בגרף הפונקציה, והשפעת ההזזה של גרף הפונקציה על תבנית הפונקציה.

השפעת השינוי בתבנית הפונקציה על גרף הפונקציה

להמחשת השפעת השינוי בתבנית הפונקציה על הגרף נתבונן בטבלת ערכים משותפת לפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = (x-2)^2$. הגרפים המתאימים מוצגים באיור 39.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$g(x) = (x-2)^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9

טבלה 14

בפונקציה המקורית, f , מעלים בריבוע את x עצמו. בפונקציה g , המתקבלת מהטרנספורמציה, מעלים בריבוע את $x-2$. כתוצאה מכך אנחנו מוצאים בטבלת הערכים המתאימה לפונקציה $g(x) = (x-2)^2$ את אותם ערכי y שמצאנו בטבלת הערכים של הפונקציה המקורית $f(x) = x^2$. נוח להמחיש את כיוון ההזזה על-ידי חיצים שמובילים מערך y בשורת הערכים של הפונקציה f , אל אותו ערך y בשורת הערכים של הפונקציה g . כל ערך y של הפונקציה $g(x) = (x-2)^2$ מתאים עכשיו למשתנה חופשי **הגדול ב-2** מהמשתנה החופשי, המתאים לו אותו ערך y בפונקציה המקורית $f(x) = x^2$. ולכן הגרף $g(x) = (x-2)^2$ כולו נראה כהזזה של גרף הפונקציה המקורית $f(x) = x^2$ בשתי יחידות ימינה.

את המסקנות שמצאנו במקרה הפרטי ניתן להכליל למשפט:

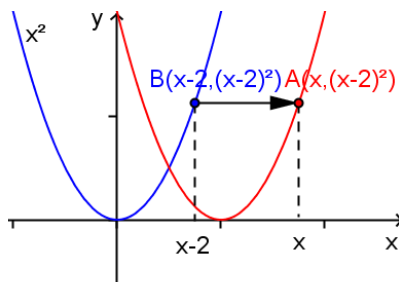
משפט: הגרף $y = f(x+c)$ מתקבל מהגרף $y = f(x)$, על-ידי הזזתו במקביל לציר ה- x שמאלה אם $c > 0$, וימינה אם $c < 0$, כך שגודל התזוזה בשני המקרים הוא $|c|$.

לאחר שהמחשנו את נכונות המשפט במקרים פרטיים נוכיח אותו במקרה הכללי.

נסמן $g(x) = f(x+c)$. נניח תחילה כי $c > 0$. נתבונן בגרף הפונקציה $y = g(x)$. תהי (x_0, y_0) נקודה כלשהי על גרף זה. מכאן $y_0 = g(x_0)$, כלומר, $y_0 = f(x_0 + c)$. מכאן נובע כי הנקודה $(x_0 + c, y_0)$ נמצאת על גרף הפונקציה $y = f(x)$. נקודה זו מתקבלת על-ידי הזזה ימינה ב- c יחידות של הנקודה (x_0, y_0) שעל גרף הפונקציה g . במילים אחרות, הנקודה (x_0, y_0) שעל גרף הפונקציה $g(x)$ מתקבלת על-ידי הזזה שמאלה ב- c יחידות של הנקודה $(x_0 + c, y_0)$ שעל גרף הפונקציה $f(x)$. כיוון שהנקודה (x_0, y_0) היא נקודה כללית על הגרף של $g(x)$, כל הגרף של $g(x)$ מתקבל מהגרף של $f(x)$ על-ידי הזזה שמאלה ב- c יחידות.

נשאיר לקוראים את הוכחת המשפט כאשר $c < 0$.

השפעת ההזזה של גרף הפונקציה על תבנית הפונקציה

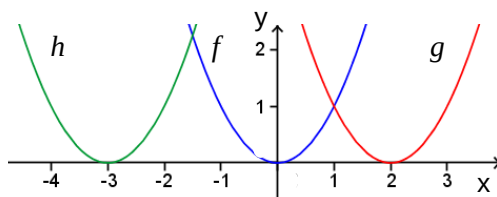


איור 39

נתבונן בגרף הפונקציה $f(x) = x^2$ (איור 39, בכחול) ובגרף המתקבל ממנו על-ידי הזזה ב-2 יחידות ימינה (באדום). לפונקציה שהתקבלה כתוצאה מהטרנספורמציה נקרא $g(x)$.

כיצד נדע מהי התבנית המתאימה לפונקציה $g(x)$? נתבונן בנקודה כלשהי (נקודה כללית) $A(x, y)$ על גרף הפונקציה g . נקודה זו התקבלה מהנקודה $B(x-2, (x-2)^2)$ ששיעוריה $B(x-2, (x-2)^2)$. כיוון ששיעורי ה- y של הנקודות A ו- B זהים, נסיק ששיעורי הנקודה A , נקודה כללית על גרף הפונקציה g , הם $A(x, (x-2)^2)$. מכאן נובע שתבנית הפונקציה $g(x)$ המתקבלת לאחר הזזת הגרף של $f(x)$ היא $g(x) = (x-2)^2$.

במילים אחרות: כאשר מזיזים את גרף הפונקציה $f(x) = x^2$ בשתי יחידות ימינה, התבנית של הגרף החדש היא $g(x) = (x-2)^2$.



איור 40

באופן דומה, אם נזיז את גרף הפונקציה $f(x) = x^2$ ב-3 יחידות שמאלה, נראה שהפונקציה החדשה מתאימה לכל x את אותו ערך y שמתאימה הפונקציה $f(x) = x^2$ לערך $(x+3)$.

מכאן שההזזה שמאלה בשלוש יחידות של הפונקציה $f(x) = x^2$ מביאה לתבנית $h(x) = (x+3)^2$.

איור 40 מתאר את ההזזות האופקיות של $f(x) = x^2$ ב-2 יחידות ימינה וב-3 יחידות שמאלה.

באופן כללי, תקף המשפט הבא:

משפט: עבור פונקציה ממשית כלשהי $f(x)$, ומספר ממשי קבוע כלשהו c שונה מאפס, הזזת גרף של $f(x)$ במקביל לציר ה- x ב- $|c|$ יחידות (**הזזה אופקית**) מתוארת על-ידי התבנית $f(x+c)$.

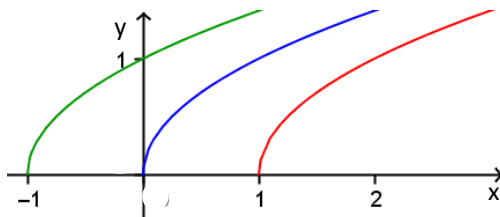
הוכחת המשפט מבוססת על שיקולים הדומים לשיקולים שהוצגו עבור המקרה הפרטי. הקוראים מוזמנים להשלים את ההוכחה.

תשובות לשאלות בעמוד 40 - 41

1. א. $y = |x|$ ב. $y = |x-1|$ ג. $y = |x+1|$

2. א. $y = x^3$ ב. $y = (x-1)^3$ ג. $y = (x+1)^3$

3. א. $y = \sqrt{x}$ ב. $y = \sqrt{x+1}$ ג. $y = \sqrt{x-1}$



איור 41

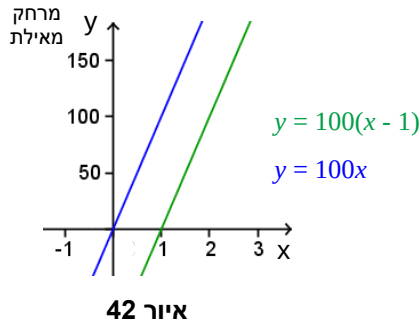
כדי להבליט את העובדה שהגרפים התקבלו זה מזה על-ידי ההזזה אופקית, יש לבחור חלון שבו לכל הגרפים אותו טווח ערכים, למשל החלון המופיע באיור 41.

הערות

- העובדה שהגרף $y = f(x+c)$ מתקבל מהגרף $y = f(x)$ על-ידי הזזתו במקביל לציר ה- x **שמאלה** אם $c > 0$, ו**ימינה** אם $c < 0$, גורמת קושי אינטואיטיבי אצל חלק מהלומדים, בגלל הנטייה לקשר את הסימן "+" עם הכיוון הימני ואת הסימן "-" עם הכיוון השמאלי.
- אחת האפשרויות להסבר אלטרנטיבי, שלפעמים מקל על האינטואיציה, היא לחשוב על ההזזה כהזזה של מערכת הצירים. במקום לשאול על תבנית הפונקציה המתקבלת כאשר גרף הפונקציה z שתי יחידות ימינה, אפשר לשאול על תבנית הפונקציה המתקבלת כאשר מערכת הצירים z שתי יחידות שמאלה.
- אחת האפשרויות לעזור להתמודד עם האינטואיציה שפועלת בכיוון הפוך, היא לתאר את ההזזה באמצעות הטרנספורמציה $y = f(x-c)$. כשהטרנספורמציה מתוארת כך, לפרמטר c חיובי מתאימה הזזה ימינה, ולפרמטר c שלילי מתאימה הזזה שמאלה. דרך הצגה זו נוחה כשדנים בכל טרנספורמציה בנפרד, אך היא אינה עקבית עם ההצגה הכללית של טרנספורמציה לינארית כ- $g(x) = Af(ax+b) + B$.
- בפונקציות עם נקודת חיתוך יחידה עם ציר ה- x , אחת האפשרויות להתמודד עם האינטואיציה היא לחשוב מה קורה לנקודת החיתוך עם ציר ה- x בעקבות הטרנספורמציה.
- לעתים עיסוק בהזזה אופקית בהקשר של פתרון בעיות, למשל, בהקשר של בעיות תנועה, יכול לסייע בתפיסת הכיוון של ההזזה האופקית, ובהתמודדות עם האינטואיציה שאצל רבים פועלת בכיוון הפוך.

המחשת ההזזה האופקית באמצעות סיטואציה של בעיית תנועה

מכונית יצאה מאילת בחצות ונסעה צפונה בכביש הערבה במהירות קבועה של 100 קמ"ש. שעה לאחר מכן יצאה מאילת מכונית נוספת ונסעה באותה מהירות ולאחר כיוון כמו המכונית הראשונה.



נניח את הסיטואציה בדרך גרפית. נסמן ב- x את הזמן בשעות שחלף מרגע שהמכונית הראשונה החלה בנסיעה.

הפונקציה $f(x) = 100x$ מתאימה ל- x את המרחק מאילת של המכונית הראשונה, x שעות לאחר שיצאה לדרך.

הפונקציה $g(x) = 100(x-1)$ מתאימה ל- x את המרחק מאילת של המכונית השנייה, x שעות לאחר שהמכונית הראשונה יצאה לדרך (כלומר $x-1$ שעות אחרי שהיא עצמה יצאה לדרך).

שתי המכוניות נוסעות במהירות זהה (100 קמ"ש). לכן הפונקציות המתארות את מרחקיהן מעיר מיוצגות על-ידי זוג ישרים מקבילים בעלי שיפוע 100.

איור 42 מציג זה לצד זה את הגרפים של שתי הפונקציות.

בסיטואציית בעיה זו, שבה גרף הפונקציה $g(x) = 100(x-1)$ מייצג את נסיעת המכונית שיצאה לדרך מאוחר יותר, אין קושי לתפוס את $g(x) = f(x-1)$ כהזזה של $f(x)$ יחידה אחת ימינה. במקרה זה השפה הטבעית תומכת בייצוג האלגברי.

שאלות חידוד והעמקה

1. האם ייתכן כי ההזזה האופקית של $f(x)$ אינה משנה את $f(x)$? אם כן, מתי זה מתקיים?
2. האם ייתכן כי הזזה אופקית של פונקציה היא גם הזזה אנכית שלה?
3. חברו שאלות נוספות ברוח זו וענו עליהן.
4. חשבו על יתרונות וחסרונות של דיון בשאלות מסוג זה בכיתה.

מבחר פתרונות לשאלות בעמ' 40 - 41

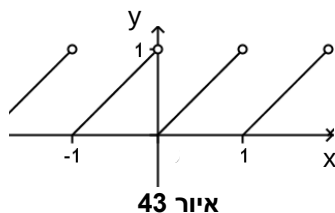
1. נתבונן בפונקציה $f(x)$, שהיא מחזורית בעלת מחזור c .

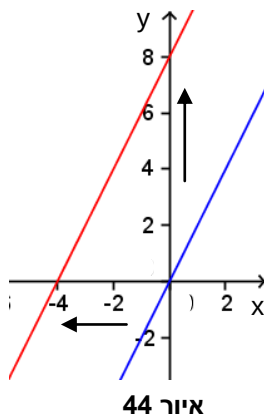
אם $c \neq 0$, אז הפונקציה $f(x-c)$ זהה לפונקציה $f(x)$.

למשל, הפונקציה $f(x) = x - [x]$ (איור 43) היא פונקציה מחזורית שכל מספר שלם m הוא מחזור שלה. כל הזזה אופקית של f ב- $c = m$ מביאה לפונקציה זהה.

באופן דומה, הפונקציות $y = \sin(x + 2k\pi)$ זהות לפונקציה $y = \sin x$ לכל k שלם.

לעומת זאת, בהזזה אנכית, אם $c \neq 0$ הפונקציה $f(x) + c$ שונה מ- $f(x)$.





2. נתבונן בגרפים של הפונקציות הליניאריות: $y = 2x$ ו- $y = 2x + 8$ (איור 44).

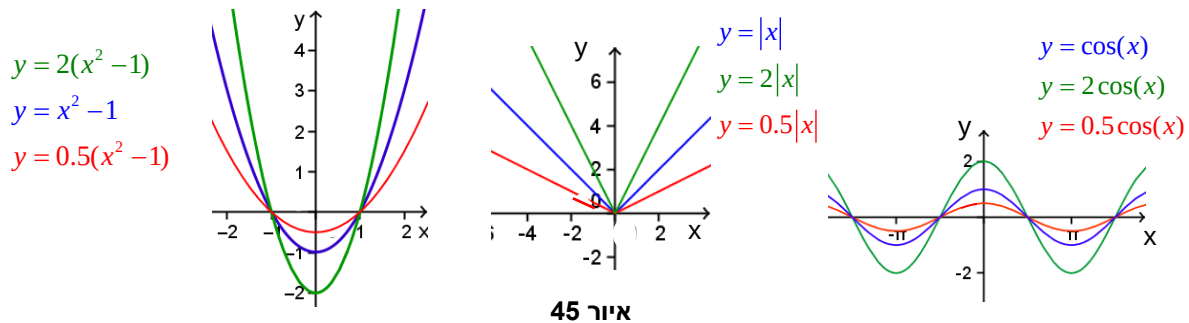
ניתן לראות את הישר $y = 2x + 8$ כהזזה של $y = 2x$ ב- 8 יחידות כלפי מעלה, או כהזזה של $y = 2x$ ב- 4 יחידות שמאלה, מאחר ומתקיים: $y = 2x + 8 = 2(x + 4)$.

נראה שכל הזזה אופקית של פונקציה ליניארית ניתן לראות כהזזה אנכית שלה.

נתונה פונקציה ליניארית $f(x) = kx + m$, k, m מספרים קבועים. ההזזה אופקית ב- c מביאה לפונקציה: $f(x - c) = k(x - c) + m = (kx + m) - kc$. מכאן נובע כי ההזזה אופקית של פונקציה ליניארית ב- c היא בזזמנית ההזזה האנכית שלה ב- $b = -kc$.

מתיחה אנכית וכיווץ אנכי של גרף הפונקציה - הטרנספורמציה: $y = af(x)$ כאשר $a > 0$.

בכל אחת ממערכות הצירים הגרף המסורטט בצבע כחול מייצג את הפונקציה $f(x)$ ושני הגרפים האחרים מייצגים את הפונקציות שהתקבלו ממנה באמצעות הטרנספורמציה $y = af(x)$ כאשר $a > 0$.



איור 45

באיור 45 מוצגת הטרנספורמציה $y = af(x)$ עבור שלוש פונקציות f שונות, ושני ערכים $a = 2$ ו- $a = \frac{1}{2}$. נסקור

מספר תכונות של טרנספורמציה זו הנראות באיורים אלה.

בעוד שטרנספורמציות ההזזה השפיעו על מיקומו של הגרף במערכת הצירים, מבלי לשנות את צורת הגרף, הפעם השתנתה גם צורת הגרף.

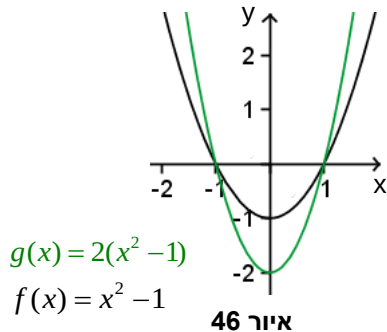
הנקודות היחידות שאינן משתנות בעקבות הטרנספורמציה הן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x . שאר הנקודות על הגרף מתרחקות מציר ה- x (מתיחה) או מתקרבות אליו (כיווץ). הגרפים הירוקים, אשר התקבלו באמצעות הטרנספורמציה $y = 2f(x)$, נראים רחוקים יותר מציר ה- x מאשר הגרפים של הפונקציות לפני הטרנספורמציה (בכחול), והגרפים האדומים, אשר התקבלו באמצעות הטרנספורמציה $y = \frac{1}{2}f(x)$, נראים

קרובים יותר לציר ה- x מאשר הגרפים של הפונקציות לפני הטרנספורמציה (בכחול).

נשים לב, שהנקודות שהיו מתחת לציר ה- x נשארות מתחתיו גם לאחר הטרנספורמציה, והנקודות שהיו מעל לציר ה- x נשארות מעליו לאחר הטרנספורמציה.

נתמקד בפונקציות $f(x) = x^2 - 1$ ו- $g(x) = 2(x^2 - 1)$ ונסביר את התופעות בעזרתן.

נתבונן בטבלת ערכים משותפת לשתי הפונקציות ובגרפים שלהן המסורטים במערכת צירים אחת.

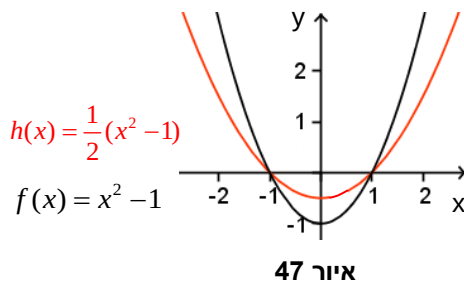


x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x) = x^2 - 1$	3	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	3	8
$g(x) = 2(x^2 - 1)$	6	0	$-\frac{6}{4}$	-2	$-\frac{6}{4}$	0	6	16

טבלה 15

פרט לשתי נקודות האפס ב- $x = 1$ וב- $x = -1$ כל הנקודות על גרף הפונקציה $g(x) = 2(x^2 - 1)$ רחוקות יותר מציר ה- x מהנקודות על גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 1$. גרף הפונקציה החדשה נראה כאילו מתחו אותו פי 2 במקביל לציר ה- y .

כפי שניתן לראות בטבלה, לכל נקודה $A(x, x^2 - 1)$ על גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 1$ מתאימה נקודה $B(x, 2(x^2 - 1))$ על גרף הפונקציה $g(x) = 2(x^2 - 1)$ שהיא בעלת אותו שיעור x , אך שיעור y שלה גדל פי 2.



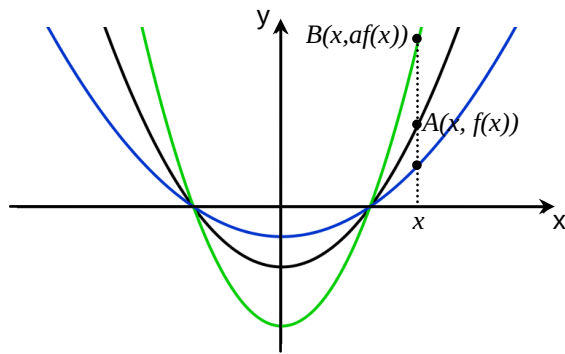
באופן דומה, ניתן להראות שגרף הפונקציה $h(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ מהווה כיווץ אנכי של גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 1$ פי 2 (איור 47).

במקרה הכללי תקף המשפט הבא:

משפט: תהי $f(x)$ פונקציה ממשית, a מספר חיובי קבוע כלשהו: $a > 0$. במערכת צירים קרטזית אחת, הגרף $y = af(x)$ מתקבל מהגרף $y = f(x)$ על-ידי מתיחתו פי a אם $a > 1$, או כיווצו פי $\frac{1}{a}$ אם $0 < a < 1$, במקביל לציר ה- y וביחס לציר ה- x .

הוכחה

נתייחס תחילה למקרה $a > 1$. לכל נקודה $A(x, f(x))$ על גרף הפונקציה המקורית מתאימה נקודה $B(x, af(x))$. לשתי הנקודות יש אותו שיעור x , אולם שיעור ה- y של הנקודה B גדול פי a . הנקודה B רחוקה פי a מציר ה- x מאשר הנקודה A . כיוון שהדבר נכון לכל הנקודות בגרף, הגרף $y = af(x)$ כולו, מתקבל על-ידי מתיחה פי a של הגרף $y = f(x)$ במקביל לציר ה- y וביחס לציר ה- x .



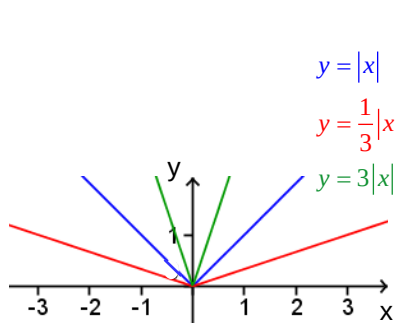
איור 48

בדומה, כאשר $0 < a < 1$ לכל נקודה $A(x, f(x))$ על גרף הפונקציה המקורית מתאימה נקודה $C(x, af(x))$ על גרף הפונקציה החדשה. לשתי הנקודות יש אותו שיעור x אולם שיעור ה- y של הנקודה C קטן פי $\frac{1}{a}$. הנקודה C קרובה פי $\frac{1}{a}$ לציר ה- x מאשר הנקודה A . כיוון שהדבר נכון לכל הנקודות בגרף, הגרף $y = af(x)$ כולו מתקבל על-ידי כיווץ פי $\frac{1}{a}$ של הגרף $y = f(x)$ במקביל לציר ה- y וביחס לציר ה- x .

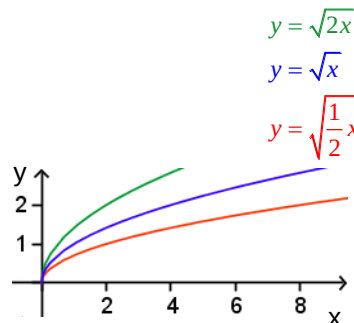
לדוגמה, גרף הפונקציה $y = \frac{1}{2}f(x)$ מתקבל מכיווץ אנכי של גרף הפונקציה $y = f(x)$ פי 2.

מתיחה אופקית וכיווץ אופקי של גרף הפונקציה - הטרנספורמציה: $y = f(ax)$ כאשר $a > 0$.

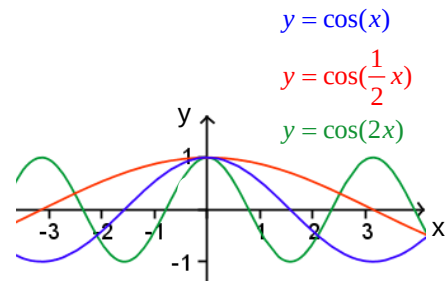
כל אחד מהסרטטים הבאים מציג משפחה של גרפים שהתקבלו בעקבות הפעלת הטרנספורמציה $y = f(ax)$.



$$y = |ax|$$



$$y = \sqrt{ax}$$



$$y = \cos(ax)$$

איור 49

בכל אחת ממערכות הצירים הגרף המסורטט בצבע מייצג את הפונקציה $f(x)$, ושני הגרפים האחרים הם

טרנספורמציות מהצורה: $y = f(ax)$ כאשר $a = 2$ ו- $a = \frac{1}{2}$.

הגרפים בכל מערכת צירים נראים כמתקבלים זה מזה על-ידי מתיחה או כיווץ "לרוחב", במקביל לציר ה- x וביחס לציר ה- y .

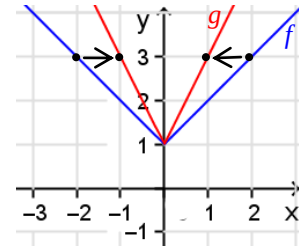
נסביר תחילה את התופעה באמצעות דוגמה.

השפעת השינוי בתבנית הפונקציה על גרף הפונקציה

איור 50 מציג את הגרפים של הפונקציות $f(x) = |x| + 1$ בכחול ו- $g(x) = |2x| + 1$ באדום.

x	-4	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	4
$y = x + 1$	5	3	2	1.5	1	1.5	2	3	5
$y = 2x + 1$	9	5	3	2	1	2	3	5	9

טבלה 16



איור 50

הפונקציה $g(x) = |2x| + 1$ התקבלה מהפונקציה $f(x) = |x| + 1$ באמצעות הטנספורמציה $g(x) = f(2x)$. נסביר מדוע השפעת הטנספורמציה על גרף הפונקציה היא כיווץ אופקי.

נתבונן בטבלת הערכים המשותפת לשתי הפונקציות.

הפונקציה $g(x) = |2x| + 1$ מתאימה לכל ערך של x את הערך שהפונקציה $f(x) = |x| + 1$ מתאימה ל- $2x$.

כך, למשל, למשתנה החופשי 0.5 בפונקציה g מתאים הערך 2 אשר מתאים למשתנה החופשי 1 בפונקציה המקורית f , כי $g(0.5) = |2 \cdot 0.5| + 1 = |1| + 1 = f(1)$.

למשתנה החופשי 1 ב- g מתאים הערך 3, אשר מתאים למשתנה החופשי 2 בפונקציה המקורית f .

למשתנה החופשי 2 ב- g מתאים הערך 5, אשר מתאים למשתנה החופשי 4 בפונקציה המקורית f .

במילים אחרות, כל ערך y שהתאים למשתנה חופשי כלשהו x ב- f מתאים עכשיו למשתנה חופשי $\frac{x}{2}$ ב- g (מדוע?).

לכן הגרף של $g(x) = f(2x)$ נראה כמתקבל על-ידי הכיווץ של הגרף של $f(x)$ פי 2 במקביל לציר ה- x ובחס לציר ה- y (איור 50).

איור 51 מציג את הגרפים של הפונקציות $f(x) = |x| + 1$ בכחול ו- $h(x) = \left|\frac{1}{2}x\right| + 1$ בשחור. הפונקציה

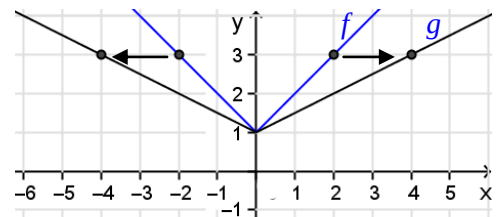
$h(x) = \left|\frac{1}{2}x\right| + 1$ התקבלה מהפונקציה $f(x) = |x| + 1$ באמצעות הטנספורמציה $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$. נסביר מדוע

השפעת הטנספורמציה על גרף הפונקציה היא מתיחה אופקית.

נתבונן בטבלת הערכים המשותפת לשתי הפונקציות.

x	-4	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	4
$y = x + 1$	5	3	2	1.5	1	1.5	2	3	5
$y = \left \frac{1}{2}x\right + 1$	3	2	1.5	1.25	1	1.25	1.5	2	3

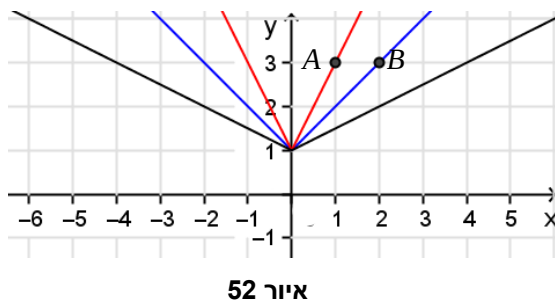
טבלה 17



איור 51

הפונקציה $h(x) = \left|\frac{1}{2}x\right| + 1$ מתאימה לכל ערך של x , את הערך שהפונקציה $f(x) = |x| + 1$ מתאימה ל- $\frac{1}{2}x$.
 למשתנה החופשי 1 בפונקציה h מתאים הערך 1.5, אשר מתאים למשתנה החופשי $\frac{1}{2}$ בפונקציה f המקורית.
 למשתנה החופשי 2 בפונקציה h מתאים הערך 2, אשר מתאים למשתנה החופשי 1 בפונקציה f המקורית.
 למשתנה החופשי 4 בפונקציה h מתאים הערך 3, אשר מתאים למשתנה החופשי 2 בפונקציה f המקורית.
 במילים אחרות, כל ערך y של g מתאים למשתנה חופשי שהוא גדול פי 2 מהמשתנה החופשי שהתאים לאותו ערך y בפונקציה המקורית f (מדוע?).
 לכן הגרף של $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ כולו נראה כמתקבל על-ידי מתיחה פי 2 של הגרף של פונקציה מקורית $f(x)$ במקביל לציר ה- x וביחס לציר ה- y .

נחשוב עכשיו על מתיחה וכיווץ אופקיים מנקודת המבט השנייה:



השפעת השינוי בגרף הפונקציה על תבנית הפונקציה

באיור 52 מופיע בכחול גרף הפונקציה $f(x) = |x| + 1$. הגרף השחור התקבל ממנו על-ידי מתיחה אופקית פי 2, והגרף האדום התקבל ממנו על-ידי כיווץ אופקי פי 2. נניח שאיננו יודעים עדיין את תבניות הפונקציות המתאימות לגרפים שהתקבלו בעקבות המתיחה והכיווץ, ונראה כיצד ניתן לקבל תבניות אלה.

נתבונן בנקודה $A(x, y)$ על הגרף האדום ועל הנקודה המתאימה לה על הגרף המקורי, $B(2x, y)$. מכיון שהפונקציה המקורית ידועה ($y = f(x) = |x| + 1$) נוכל לרשום: $B(2x, |2x| + 1)$.

לשתי הנקודות A ו- B יש אותו שיעור y ולכן הנקודה A היא: $A(x, |2x| + 1)$. הנקודה A היא נקודה כללית על גרף הפונקציה g . מכאן שתבנית הפונקציה החדשה היא $g(x) = |2x| + 1$.

שאלה: הסבירו מדוע תבנית הפונקציה המתאימה לגרף השחור, אשר התקבל כתוצאה ממתיחה אופקית של גרף הפונקציה $f(x) = |x| + 1$ פי 2, היא: $h(x) = \left|\frac{1}{2}x\right| + 1$.

במקרה הכללי תקף המשפט הבא:

תהי $f(x)$ פונקציה ממשית, a מספר חיובי קבוע כלשהו: $a > 0$.
 במערכת צירים קרטזית אחת, הגרף $y = f(ax)$ מתקבל מהגרף $y = f(x)$ על-ידי מתיחתו פי $\frac{1}{a}$ אם $0 < a < 1$, או כיווצו פי a אם $a > 1$, במקביל לציר ה- x וביחס לציר ה- y .

לאחר שהמחשנו את נכונות המשפט במקרים פרטיים, נוכיח אותו במקרה הכללי.

הוכחה

נסמן $g(x) = f(ax)$. נניח תחילה כי $a > 0$. נתבונן בנקודה (x_0, y_0) על גרף הפונקציה $y = g(x)$. לפי חוק הפונקציה g מתקיים $y_0 = f(ax_0)$. מכאן נובע כי הנקודה (ax_0, y_0) נמצאת על גרף הפונקציה $y = f(x)$. נקודה זו רחוקה מציר ה- y פי a מאשר הנקודה (x_0, y_0) שעל גרף הפונקציה g . במילים אחרות: הנקודה (x_0, y_0) שעל גרף הפונקציה $g(x)$ קרובה לציר ה- y פי a מאשר הנקודה (ax_0, y_0) שעל גרף הפונקציה $f(x)$. כיוון שהנקודה (x_0, y_0) היא נקודה כללית על הגרף של $g(x)$, כל הגרף של $g(x)$ מתקבל מהגרף של $f(x)$ על-ידי כיווצו פי a ביחס לציר ה- y .

נשאיר לקוראים את הוכחת המשפט כאשר $1 < a < 1$.

שאלות העמקה וחיידוד

1. האם ייתכן שטרנספורמציה של מתיחה אנכית יכולה להיות גם טרנספורמציה של כיווץ אופקי?
2. האם ייתכן שטרנספורמציה של כיווץ אופקי יכולה להיות גם טרנספורמציה של כיווץ אנכי?
3. האם ייתכן שטרנספורמציה של הזזה אופקית יכולה להיות גם טרנספורמציה של מתיחה אנכית?

תשובות

1. מצבים כאלה אפשריים. למשל, ניקח $f(x) = x^2$.

$$\text{מתקיים: } f(3x) = (3x)^2 = 3^2 x^2 = 9x^2 = 9f(x)$$

לכן הכיווץ האופקי של הפונקציה $(f(3x))$ הוא המתיחה האנכית שלה $(9f(x))$: $f(3x) = 9f(x)$.

$$\text{באופן דומה: } f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 = \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}f(x)$$

כלומר, המתיחה האופקית של הפונקציה $f(x)$ היא כיווץ אנכי שלה.

ניתן להכליל תוצאה זו. עבור $f(x) = x^2$ מתקיים:

$$f(ax) = (ax)^2 = a^2 x^2 = a^2 f(x) = a_1 f(x)$$

אם $a > 1$ אז $a_1 > 1$. לכן הכיווץ האופקי של $f(x)$ הוא המתיחה האנכית שלה: $f(ax) = a_1 f(x)$.

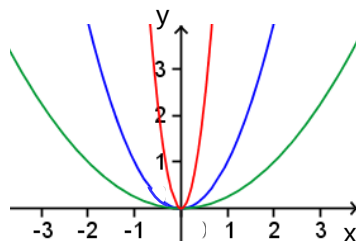
אם $0 < a < 1$ אז $0 < a_1 < 1$. לכן המתיחה האופקית של הפונקציה $f(x)$ היא כיווץ אנכי שלה.

לסיכום, כל מתיחה או כיווץ אופקיים של הפונקציה $f(x) = x^2$ (ושל כל פונקציה $f(x) = x^n$) הם גם כיווץ או מתיחה אנכיים שלה.

2. מצב כזה אפשרי. נתבונן בפונקציה $g(x) = \frac{1}{x}$. מתקיים:

$$g(2x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} g(x)$$

כלומר, הכיווץ האופקי פי 2 של הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x}$ הוא גם כיווץ אנכי שלה פי 2.



איור 53

באופן דומה מתקיים: $g\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}x} = 2 \cdot \frac{1}{x} = 2g(x)$. כלומר, מתיחה אופקית פי 2 של הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x}$ היא גם מתיחה אנכית פי 2 שלה.

הקוראים מוזמנים להראות שכל כיווץ אופקי של הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x}$ פי a הוא כיווץ אנכי שלה באותו שיעור a , וכל מתיחה אופקית של הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x}$ היא מתיחה אנכית שלה באותו שיעור.

3. באופן מפתיע, גם מצב זה אפשרי. למשל, הפונקציה $y = 2^{x+3}$ היא גם הזזה אופקית של $y = 2^x$ ב-3 יחידות שמאלה, וגם מתיחה אנכית של פונקציה זו פי 8 כי: $y = 2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x$.

דוגמה כללית יותר:

תהי $f(x) = a^x$, $(a > 0)$. תהא $g(x) = f(x+c)$ הזזה אופקית של f . על-ידי הפעלת חוקי החזקות נקבל: $f(x+c) = a^{x+c} = a^x a^c = k f(x)$. מכאן ש- g היא גם מתיחה אנכית או כיווץ אנכי של f , בהתאם לערך של a^c .

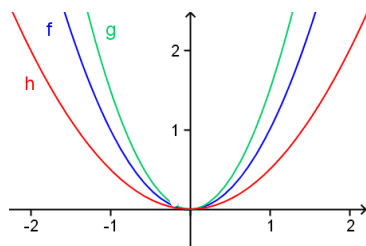
הראו כי הזזה אופקית של כל פונקציה מהצורה $f(x) = a^{cx+d}$, $(a > 0)$, היא גם מתיחה אנכית או כיווץ אנכי של פונקציה זו.

הערות דידקטיות ונקודות למחשבה

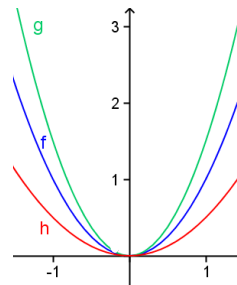
1. כמו בהזזה אופקית, כך גם במתיחה וכיווץ אופקיים עלול להיווצר אצל חלק מהלומדים קושי אינטואיטיבי בהבנת השפעת הפרמטר על סוג הטרנספורמציה (מתיחה או כיווץ). מקור הקושי נעוץ בעובדה שכפל המשתנה החופשי במספר גדול מ-1 גורם לכיווץ אופקי של גרף הפונקציה, ואילו כפל המשתנה החופשי במספר בין 0 ל-1 גורם למתיחה אופקית של הגרף.

2. לעומת זאת, במתיחה וכיווץ אנכיים, בדומה להזזה אנכית, השפעת הפרמטר על סוג הטרנספורמציה (המתיחה או הכיווץ) תואמת את האינטואיציה.

3. ראינו כי ישנן פונקציות, לדוגמה פונקציות ריבועיות שהגרף שלהן עובר דרך ראשית הצירים, אשר טרנספורמציות מתיחה אנכית שלהן מביאה לאותה פונקציה (ולאותו הגרף) כמו טרנספורמציות כיווץ אופקי שלהן. אחת הדרכים להדגיש את הטרנספורמציה היא בעזרת בחירת חלון מתאים של גרף הפונקציה.



איור 55



איור 54

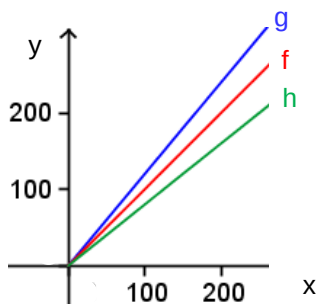
במערכות הצירים שבאיורים 54 ו-55 מוצגות אותן שלוש פונקציות. איור 54 מדגיש את העובדה שהפונקציות התקבלו זו מזו על-ידי כיווץ או מתיחה אנכיים, ואילו איור 55 מדגיש את העובדה שהפונקציות התקבלו זו מזו על-ידי כיווץ או מתיחה אופקיים. הביאו דוגמה נוספת לתופעה זו. מצאו חלון גרף מתאים להדגשת כל טרנספורמציה.

ניתן להמחיש את טרנספורמציות המתיחה והכיווץ באמצעות סיטואציות בעיה בתוך הקשר מתאים.

המחשה של טרנספורמציות המתיחה והכיווץ באמצעות סיטואציות בעיה

המחשת מתיחה וכיווץ אנכיים

מקום עבודה משלם לעובדיו החזר הוצאות נסיעה לפי תעריף של 1 ₪ לכל קילומטר. הפונקציה f מתאימה למספר הקילומטרים שנסע עובד את התשלום שיקבל. הפונקציה g מתארת את התשלום אם התעריף יעלה ב-20%, ופונקציה h מתארת את התשלום אם התעריף ירד ב-20%.



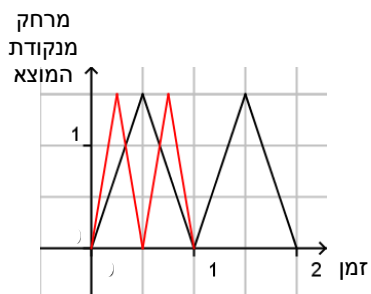
איור 56

באיור 56 מוצגים הגרפים של הפונקציות $f(x) = x$, $g(x) = 1.2x$, ו- $h(x) = 0.8x$. גרף הפונקציה g התקבל מגרף הפונקציה f על-ידי מתיחה אנכית, ואילו גרף הפונקציה h התקבל ממנו על-ידי כיווץ אנכי. החיתוך של חלון הגרף, כך שכל שלושת הגרפים נראים באותו התחום, מדגיש את המתיחה האנכית.

דוגמה זו מסייעת להמחיש את הקשר בין גרף הפונקציה $f(x)$ לגרף הפונקציה $af(x)$ במקרה של פונקציה ליניארית, וזורעת זרעים להכללה לפונקציה כלשהי.

המחשת הכיווץ האופקי

בכל ערב יוצאות יפה ועדינה להליכה באורך 1.5 ק"מ לאורך טיילת הנוף החדשה. הן צועדות בקצב קבוע של 3 ק"מ לשעה. כשהן מגיעות לקצה הטיילת הן חוזרות באותה דרך, ואז ממשיכות והולכות הלך וחזור פעם נוספת לאורך הטיילת, באותה המהירות.



איור 57

נועם רץ בכל ערב לאורך הטיילת במהירות כפולה משלהן, ומשלים שני מחזורי ריצה הלך ושוב במשך שעה אחת.

א. אחד הגרפים באיור 57 הוא של הפונקציה $f(x)$, המתאימה לזמן ההליכה של יפה ועדינה את מרחקן (לאורך הטיילת) מנקודת המוצא. הגרף השני הוא של הפונקציה $g(x)$ המתאימה לזמן הריצה של נועם את מרחקו (לאורך הטיילת) מנקודת המוצא. של מי הגרף השחור ושל מי הגרף האדום?

ב. מצאו קשר בין הפונקציות f ו- g : $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

הזמן הדרוש לנועם לרוץ לאורך הטיילת הוא מחצית מהזמן הדרוש ליפה ועדינה להשלים את אותו המסלול בהליכתו. מכאן שגרף הפונקציה המתאימה לזמן הריצה של נועם את מרחקו מנקודת המוצא, הוא הגרף האדום, שמתאפיין על-ידי שהות קצרה יותר בטיילת.

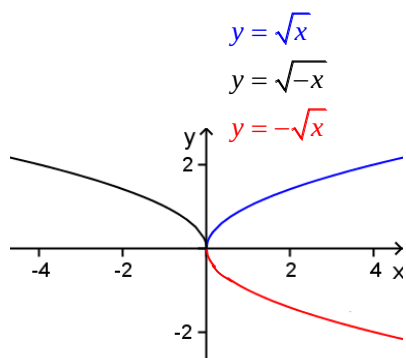
נשים לב כי המרחק הכולל שעבר נועם זהה למרחק הכולל שעברו יפה ועדינה. ניתן היה לזהות שהגרף האדום מתאים לתנועתו של נועם גם לפי השיפועים של קטעי הגרף, שהנם תלולים יותר, ולכן מתאימים לייצוג מהירות גדולה יותר. ההתייחסות לשהות הקצרה יותר של נועם בטיילת היא המדגישה את העובדה שהגרף האדום התקבל מהגרף השחור על-ידי כיווץ אופקי.

סיטואציית הבעיה נבחרה כך, ששתי הפונקציות המופיעות בה הן בעלות אותו טווח ערכים, במטרה להמחיש את הכיווץ האופקי.

ג. הביאו דוגמאות לבעיות מציאותיות נוספות שיכולות להמחיש את טרנספורמציות המתיחה והכיווץ.

שיקוף של גרף הפונקציה ביחס לצירים

באיור 58 מוצגים במערכת צירים אחת הגרפים של הפונקציות:



איור 58

$y = \sqrt{x}$ ו- $y = -\sqrt{x}$ הגרפים של הפונקציות $y = \sqrt{-x}$ ו- $y = -\sqrt{-x}$ סימטריים ביחס לציר ה- x , והגרפים של הפונקציות $y = \sqrt{x}$ ו- $y = \sqrt{-x}$ סימטריים ביחס לציר ה- y .

ניזכר כי שתי נקודות במישור נקראות **סימטריות ביחס לישר** אם הן נמצאות על אנך אחד לישר, מצדדים שונים, ובאותו מרחק ממנו, כלומר, הישר מהווה אנך אמצעי לקטע הנוצר על-ידי שתי הנקודות.

העתקת נקודה לנקודה סימטרית ביחס לישר נתון, נקראת **שיקוף נקודה ביחס לישר** זה. **שיקוף צורה גאומטרית ביחס לישר נתון** מתבצע על-ידי שיקוף כל נקודה של הצורה ביחס לישר זה.

שתי צורות, שכל אחת מהן מתקבלת על-ידי שיקוף השנייה ביחס לישר נתון, נקראות **סימטריות ביחס לישר זה**.

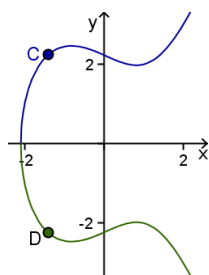
שיקוף ביחס לציר ה- x

משפט

במערכת צירים קרטזית אחת, גרף הפונקציה $g(x) = -f(x)$ מתקבל מגרף הפונקציה $f(x)$ על-ידי שיקופו ביחס לציר ה- x , כלומר, שני הגרפים סימטריים ביחס לציר ה- x .

הוכחה

לפי הגדרת הפונקציה $g(x) = -f(x)$, לכל נקודה $C(x, f(x))$ על גרף הפונקציה $f(x)$, מתאימה נקודה $D(x, -f(x))$ על גרף הפונקציה $g(x)$, ולהיפך. הנקודות C ו- D סימטריות ביחס לציר ה- x . מכאן נובע כי הגרפים $y = f(x)$ ו- $y = -f(x)$ מתקבלים אחד מהשני על-ידי שיקוף ביחס לציר ה- x .



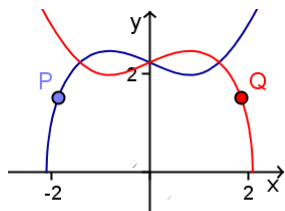
איור 59

שיקוף ביחס לציר ה- y

משפט

במערכת צירים קרטזית אחת, גרף הפונקציה $g(x) = f(-x)$ מתקבל מגרף הפונקציה $f(x)$ על-ידי שיקופו ביחס לציר ה- y , כלומר, שני הגרפים סימטריים ביחס לציר ה- y .

הוכחה



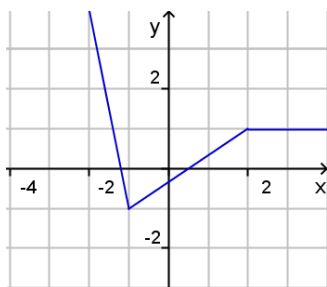
איור 60

הפונקציה $g(x) = f(-x)$ מתאימה, על-פי הגדרתה, לכל x את הערך שהפונקציה $f(x)$ מתאימה ל- $-x$. לכן, לכל נקודה $Q(x, f(x))$ על גרף הפונקציה $f(x)$, מתאימה נקודה $P(-x, f(x))$ על גרף הפונקציה $g(x)$, ולהיפך. הנקודות A ו- B סימטריות ביחס לציר ה- y . מכאן נובע כי הגרפים $y = f(x)$ ו- $y = f(-x)$ מתקבלים אחד מהשני על-ידי שיקוף ביחס לציר ה- y .

תרגילים

1. נתונה הפונקציה $y = |x|$. עבור כל אחת מהפעולות שלהלן רשמו מהי תבנית הפונקציה וסרטטו סקיצה של הגרף.

- הזזה שמאלה ב-2 יחידות, ולמעלה ב-3 יחידות.
- הזזה ימינה ב-4 יחידות, ולמטה ביחידה אחת.
- מתיחה אופקית פי 2, ושיקוף ביחס לציר ה- y .
- מתיחה אנכית פי 3, ושיקוף ביחס לציר ה- x .



איור 61

2. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$ (איור 61).

סרטטו גרפים של הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------|-------------------|-------------------|
| א. $f(x) - 4$ | ג. $f(x - 2)$ | ה. $f(x + 2) - 1$ |
| ב. $f(x + 3)$ | ד. $f(x - 1) + 2$ | ו. $-f(x)$ |

השאלה הטבעית היא: כיצד משפיעות פעולות בפונקציות, כמו: הזזה, מתיחה, כיווץ ושיקוף, על התכונות הבסיסיות שלהן? למשל, אם $f(x)$ היא פונקציה זוגית, האם תכונה זו נשמרת בפעולות הנ"ל?

קל לחקור שאלה זו בדרך גרפית. ניזכר שפונקציה $f(x)$ זוגית אם ורק אם הגרף שלה סימטרי ביחס לציר ה- y . הטרנספורמציות של מתיחה, כיווץ, שיקוף והזזה אנכית של הגרף, שומרות על הסימטריות שלו ביחס לציר ה- y . אבל בהזזה אופקית תכונה זו עלולה ללכת לאיבוד. למשל, הפונקציה $f(x) = x^2$ זוגית, אבל $f(x-1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

באופן דומה ניתן לחקור את השפעת הפעולות הליניאריות בפונקציה $f(x)$ על תכונות בסיסיות נוספות. סיכום החקירה מוצג בטבלה הבאה. בשורה העליונה רשומות תבניות פונקציות המתקבלות מפונקציה $f(x)$ על-ידי טרנספורמציות ליניאריות, ובעמודה הראשונה מימין רשומות תכונות פונקציית המקור $f(x)$. בכל שורה ניתן לראות באילו פונקציות נשמרת התכונה של $f(x)$ שצוינה בעמודה הראשונה. כך, לפי השורה הראשונה, אם $f(x)$ היא פונקציה זוגית, אז כל אחת מהפונקציות: $f(x)+c$, $f(ax)$, $af(x)$, $-f(x)$ ו- $f(-x)$ גם היא פונקציה זוגית.

המקום הריק מתחת ל- $f(x-c)$ מעיד כי אין מסקנה חד-משמעית לגבי זוגיות של פונקציה זו במקרה ו- $f(x)$ זוגית.

$f(x)$	$\Leftarrow$	$f(x-c)$ ($c \in \mathbb{R}$)	$f(x)+c$ ($c \in \mathbb{R}$)	$f(ax)$ ($a > 0$)	$af(x)$ ($a > 0$)	$f(-x)$	$-f(x)$
זוגית	$\Leftarrow$		זוגית	זוגית	זוגית	זוגית	זוגית
אי-זוגית	$\Leftarrow$			אי-זוגית	אי-זוגית	אי-זוגית	אי-זוגית
חסומה	$\Leftarrow$	חסומה	חסומה	חסומה	חסומה	חסומה	חסומה
עולה	$\Leftarrow$	עולה	עולה	עולה	עולה	יורדת	יורדת
יורדת	$\Leftarrow$	יורדת	יורדת	יורדת	יורדת	עולה	עולה
מחזורית	$\Leftarrow$	מחזורית	מחזורית	מחזורית	מחזורית	מחזורית	מחזורית

טבלה 18

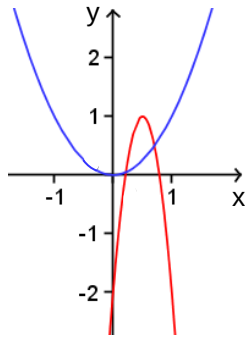
לפי הטבלה לעיל, כל התכונות הבסיסיות של $f(x)$ נשמרות בפעולות מתיחה, כיווץ, שיקוף והזזה, למעט התכונות של זוגיות ואי-זוגיות. תכונות אלה עלולות ללכת לאיבוד בהזזה אופקית. תכונות האי-זוגיות של פונקציה הולכת לאיבוד גם בהזזה אנכית.

כעת נדון בפעולה ליניארית כללית בפונקציה $f(x)$ המתוארת על-ידי התבנית

$$Af(ax+b)+B \quad (*)$$

כאשר a, b, A, B הם מספרים ממשיים קבועים, חיוביים או שליליים, בתנאי נוסף ש- $a \neq 0, A \neq 0$.

פעולה הטרנספורמציה של $f(x)$ המתוארת ב- (*) ניתנת לפירוש כסדרת פעולות ליניאריות בסיסיות.



איור 62

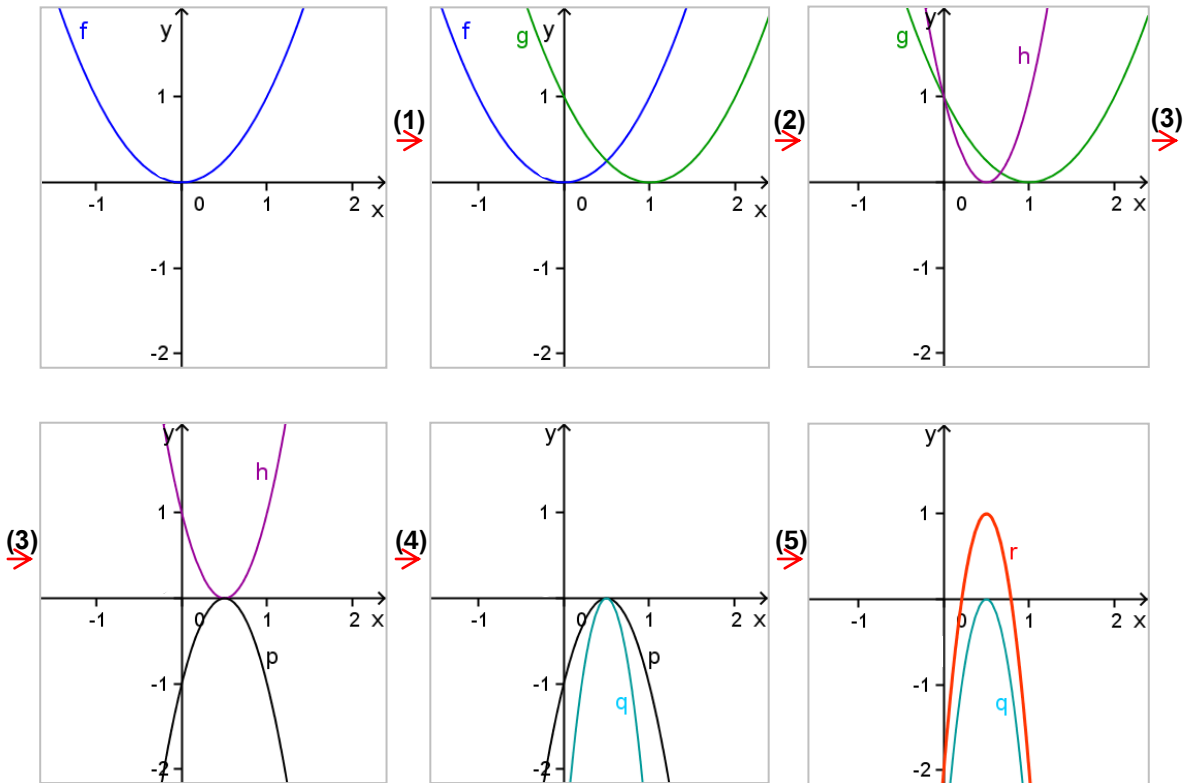
דוגמה לפירוש פונקציה כתוצאה של סדרת פעולות ליניאריות בסיסיות

ניקח את הפונקציה $f(x) = x^2$, ונגדיר $r(x) = -3(2x-1)^2 + 1$. (איור 62).

הפונקציה $r(x)$ יכולה להתקבל מהפונקציה $f(x)$ על-ידי סדרת הפעולות הבאות, כאשר כל פעולה מופעלת על תוצאת הפעולה הקודמת לה.

(1) הזזה אופקית ב-1 ימינה $\leftarrow$ (2) כיווץ אופקי פי 2 $\leftarrow$ (3) שיקוף ביחס לציר ה- x $\leftarrow$ (4) מתיחה אנכית פי 3 $\leftarrow$ (5) הזזה אנכית ביחידה אחת כלפי מעלה.

איור 63 מציג את סדרת הטרנספורמציות.

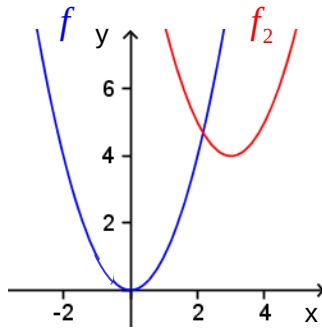


איור 63

1. רשמו את תבנית הפונקציה שהתקבלה בכל אחד משלבי הביניים.
2. רשמו לפחות סדרה אחת נוספת של טרנספורמציות בעזרתן ניתן לקבל את הפונקציה $r(x) = -3(2x-1)^2 + 1$ מהפונקציה $f(x) = x^2$.
3. חברו 3 תרגילים דומים.

שתי פעולות בפונקציה $f(x)$ נקראות פעולות **חילופיות** אם סדר הפעלתן, בהפעלתן זו אחר זו, אינו משפיע על התוצאה הסופית.

דוגמה לשתי פעולות חילופיות



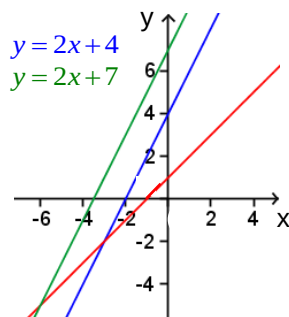
איור 64

נתונה פונקציה $f(x) = x^2$. נזיז אותה ב-3 יחידות ימינה ונקבל: $f_1(x) = (x-3)^2$. נרים פונקציה זו ב-4 יחידות ונקבל: $f_2(x) = (x-3)^2 + 4$. אם נשנה את סדר הפעולות נקבל: $f_1(x) = x^2 + 4$, $f_2(x) = (x-3)^2 + 4$. הגענו לאותה תוצאה.

האם זה מקרי?

הראו כי שתי הפעולות הללו: הזזה אופקית והזזה אנכית, שהוגדרו לעיל, הן פעולות חילופיות.

דוגמה לשתי פעולות שאינן חילופיות



איור 65

נתונה פונקציה $f(x) = x + 1$. נכוץ אותה פי 2 בכיוון אופקי, ואחר כך נזיז אותה שמאלה ב-3. לאחר הפעולה הראשונה נקבל: $f_1(x) = 2x + 1$, ולאחר הפעולה השנייה על $f_1(x)$, מקבלים: $f_2(x) = 2(x+3) + 1 = 2x + 7$. אם נשנה את סדר הפעולות נקבל: $f_1(x) = x + 1 + 3 = x + 4$, $f_2(x) = 2x + 4$.

התוצאות הסופיות שונות. לכן הפעולות של כיווץ אופקי והזזה אופקית שהוגדרו לעיל אינן פעולות חילופיות.

פעילות 5: חקירת חילופיות של פעולות ליניאריות בפונקציה



השאלות הבאות מתייחסות לחילופיות של פעולות ליניאריות. הביאו דוגמאות תומכות או דוגמאות נגדיות באמצעות המחשב.

1. האם הזזה אופקית והזזה אנכית הן פעולות חילופיות?

2. האם הזזה אופקית וכיווץ אופקי הן פעולות חילופיות?

3. האם הזזה אופקית ושיקוף בציר ה-y הן פעולות חילופיות?

4. האם הזזה אופקית ושיקוף בציר ה-x הן פעולות חילופיות?

5. האם מתיחה אופקית וכיווץ אנכי הן פעולות חילופיות?

תשובות

1. כן, הזזה אופקית והזזה אנכית הן פעולות חילופיות. אכן, אם קודם נבצע הזזה אופקית ב- c ואחר כך הזזה אנכית ב- b , נקבל: $f(x) \rightarrow f(x-c) \rightarrow f(x-c)+b$. ואם קודם נבצע הזזה אנכית ב- b ואחר כך הזזה אופקית ב- c , נקבל: $f(x) \rightarrow f(x)+b \rightarrow f(x-c)+b$.

לשתי סדרות הפעולות יש אותה תוצאה סופית. כלומר, הפעולות חילופיות.

2. לא, הזזה אופקית וכיווץ אופקי אינן פעולות חילופיות.

אם קודם נבצע הזזה אופקית ב- c , ואחר כך כיווץ אופקי פי $a > 1$, נקבל:

$$f(x) \rightarrow f(x-c) \rightarrow f(ax-c)$$

$$f(x) \rightarrow f(ax) \rightarrow f(a(x-c)) = f(ax-ac)$$

התוצאות הסופיות בשתי הסדרות של הפעולות שונות זו מזו. כלומר, הפעולות אינן חילופיות.

3. לא, הזזה אופקית ושיקוף בציר ה- y אינן פעולות חילופיות.

אם קודם נבצע הזזה אופקית ב- c ואחר כך שיקוף בציר ה- y , נקבל: $f(x) \rightarrow f(x-c) \rightarrow f(-x-c)$, ואם קודם נבצע שיקוף בציר ה- y ואחר כך הזזה אופקית ב- c , נקבל:

$$f(x) \rightarrow f(-x) \rightarrow f(-(x-c)) = f(-x+c)$$

התוצאות הסופיות בשתי הסדרות של הפעולות שונות זו מזו. כלומר, הפעולות אינן חילופיות.

4. כן (הסבירו)

5. כן (הסבירו)