הגדרת הפונקציה הלוגריתמית באמצעות מערכת אקסיומות

כמו לפונקציה מעריכית, גם לפונקציה לוגריתמית ניתן לתת שתי הגדרות: הגדרה אלגברית והגדרה אקסיומטית. נתחיל מהגדרה אקסיומטית. כפי שכבר ראינו קודם, זאת הגדרה באמצעות קבוצה מינימלית של תכונות יסוד מהן נובעות כל שאר התכונות של הפונקציות המוגדרות.

מערכת האקסיומות המגדירה את משפחת הפונקציות הלוגריתמיות נקראת מערכת L, והפונקציות המקיימות אותה מסומנות בהתאם $L(x)$.

מערכת אקסיומות $\mathbf{L}$

הגדרה

אקסיומה L1: פונקציה $L(x)$ מוגדרת לכל $x>0$.

אקסיומה L2: לכל $x>0$ ו- $y>0$ מתקיים: $L(x\cdot y)=L(x)+L(y)$.

אקסיומה L3: פונקציה $L(x)$ היא פונקציה מונוטונית, עולה או יורדת, במובן החזק (ממש) בתחומה.

למעשה,האקסיומה הראשונה והאקסיומה השלישית במערכת $\mathbf{L}$ דומות לאלה שבמערכת E, כאשר האקסיומה השנייה ב- $\mathbf{L}$ הפוכה לאקסיומה השנייה ב- E.

משפט

מערכת $\mathbf{L}$ מתארת את כל הפונקציות ההפוכות לאלו המקיימות את מערכת E.

תהליך ההוכחה של המשפט הוא כדלקמן:

נגדיר פונקציה $L(x)=\int_1^x\left(\frac{1}{t}\right)dt$ בתחום $x>0$. על-פי המשפט על אינטגרל מסוים עם גבול עליון משתנה, הפונקציה $L(x)$ רציפה וגזירה בתחומה ומתקיים: $L'(x)=\left(\int_1^x\left(\frac{1}{t}\right)dt\right)'=\frac{1}{x}$. מכאן, $L'(x)>0$ כאשר $x>0$. ולכן $L(x)$ מונוטונית עולה בתחום $x>0$ במובן החזק. בכך, $L(x)$ מקיימת את האקסיומות **L1** ו- **L3**. כדי להוכיח את קיום האקסיומה **L2**,

נתבונן בפונקציה המורכבת $L(ax)=\int_1^{ax}\left(\frac{1}{t}\right)dt$ בתחום $x>0$:

לפי כלל השרשרת

$$\left(L(ax)\right)'=\left(\int_1^{ax}\left(\frac{1}{t}\right)dt\right)'_x=\frac{1}{ax}\cdot a=\frac{1}{x}$$

כיוון שלפונקציות $L(x)=\int_1^x \left(\frac{1}{t}\right)dt$ ו- $L(ax)=\int_1^{ax} \left(\frac{1}{t}\right)dt$, המוגדרות בתחום $x>0$ ורציפות בו, אותה פונקציה נגזרת, נוכל להסיק

$$L(ax)=L(x)+c$$

כדי לגלות את c נציב $x=1$ ונקבל:

$$L(1)=\int_1^1 \left(\frac{1}{t}\right)dt=0$$

$$L(a\cdot 1)=L(1)+c$$

$$L(a)=0+c=c$$

ומכאן

$$L(ax)=L(x)+L(a)$$

כיוון שהשוויון $L(ax)=L(x)+L(a)$ מתקיים לכל $x>0$ ו- $a>0$ נוכל להסיק לכל זוג $x>0\,,y>0$, $L(xy)=L(x)+L(y)$. האקסיומה **L2** אכן מתקיימת. בכך הוכח כי הפונקציה $L(x)=\int_1^x \left(\frac{1}{t}\right)dt$ מקיימת את מערכת האקסיומות **L**.

נראה כעת שפונקציה זו הפוכה לפונקציה e^x. על-פי כלל השרשרת מוצאים כי לכל x ממשי מתקיים:

$$\left(L\left(e^x\right)\right)'=\left(\int_1^{e^x}\left(\frac{1}{t}\right)dt\right)'=\frac{1}{e^x}\cdot\left(e^x\right)'=\frac{1}{e^x}\cdot e^x=1\,.$$

מכאן מסיקים כי $L\left(e^x\right)=x$ לכל x ממשי, ומכאן נובע כי הפונקציה $L(x)=\int_1^x \left(\frac{1}{t}\right)dt$ בתחום $x>0$ הפוכה לפונקציה $f(x)=e^x$ בתחום $-\infty<x<\infty$. לפונקציה כזו קוראים לוגריתם טבעי ומסמנים $\ln x$. מהזהות $\ln\left(e^x\right)=x$ נובע כי $\ln e=1$ ו- $\ln 1=0$.

תהי כעת $L(x)$ פונקציה כלשהי המקיימת את מערכת האקסיומות **L**. מהאקסיומה **L2** נובע כי $L(1)=0$. כמו כן, מהמערכת **L** ניתן להסיק כי לכל פונקציה $L(x)$ המקיימת מערכת זו, יש מספר $a>0$ ו- $a\neq 1$ עבורו $L(a)=1$, וכי לשתי פונקציות שונות מתאימים מספרי a כאלה שונים.

קל לוודא כי אם $L(x)$ מקיימת את מערכת **L**, אז לכל c שונה מאפס גם הפונקציה $c\cdot L(x)$ מקיימת את מערכת **L**.

כעת נסמן כל פונקציה $L(x)$ המקיימת מערכת **L**, כ- $L_a(x)$ כאשר a המספר עבורו $L(a)=1$ $(0<a\neq 1)$.

בפרט, $L_e(x)=\ln x=\int_1^x \left(\frac{1}{t}\right)dt$. לאור הנ"ל, ניתן להציג את $L_a(x)$ בצורה:

$$L_a(x)=\frac{L_e(x)}{L_e(a)}=\frac{\ln x}{\ln a}\,.$$

מכאן שכל הפונקציות במערכת $\mathbf{L}$ מתקבלות מפונקציה אחת, הפונקציה $\ln x$, על-ידי הכפלתה בגורם קבוע $c=\frac{1}{\ln a}$.

פונקציה $L_a\left(x\right)=\frac{\ln x}{\ln a}$ הפוכה לפונקציה המעריכית $f\left(x\right)=a^x$, כי לכל $x>0$ מתקיים:

$$f\left(L_a\left(x\right)\right)=a^{\frac{\ln x}{\ln a}}=\left(e^{\ln a}\right)^{\frac{\ln x}{\ln a}}=e^{\ln x}=x\,.$$

לפונקציה ההפוכה ל- a^x קוראים פונקציה לוגריתמית לפי בסיס a, ומסמנים $\log_a x$ ($0<a\neq 1$).

בכך הוכחנו כי מערכת האקסיומות $\mathbf{L}$ אכן מגדירה את הפונקציות ההפוכות לפונקציות מעריכיות a^x, $0<a\neq 1$, פונקציות אלה נקראות, כידוע, **פונקציות לוגריתמיות**.

הגדרה

פונקציה $f\left(x\right)$ נקראת פונקציה לוגריתמית אם ורק היא מקיימת (בזיהוי $f\left(x\right)=L\left(x\right)$) את מערכת האקסיומות $\mathbf{L}$.

זאת ההגדרה האקסיומטית של פונקציות לוגריתמיות ודרכה מגיעים, כפי שראינו לעיל, לגילוי תכונות חשובות של פונקציות אלו.

את הפונקציה ההפוכה לפונקציה מעריכית a^x ($0<a\neq 1$), הנקראת פונקציה לוגריתמית והמסומנת $\log_a x$ ניתן להציג בצורה:

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}\int_1^x\frac{1}{t}dt\,. \quad \text{לכל } x>0$$

כאשר $\ln x$ היא פונקציה ההפוכה ל- e^x.

מכאן נובע כי הפונקציה $\log_a x$ רציפה וגזירה בתחומה ומתקיים:

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}\,. \quad \text{לכל } x>0$$

הגדרת פונקציות מעריכיות כפונקציות הפוכות לפונקציות לוגריתמיות חוסכת את הצורך להוכיח את הרציפות של הפונקציות המעריכיות, היות ותכונה זו מתקבלת כמסקנה מהרציפות של הפונקציה הלוגריתמית ההפוכה לה. כמו כן,על-פי הנגזרות הידועות של הפונקציות הלוגריתמיות ניתן למצוא נגזרות של הפונקציות המעריכיות ההפוכות להן.

מהמערכת $\mathbf{L}$ נובעות תכונות נוספות של פונקציות לוגריתמיות, כגון, גבולות בקצות תחום ההגדרה.

כפי שרואים, ההגדרה של פונקציות לוגריתמיות על-ידי מערכת האקסיומות $\mathbf{L}$ היא הגדרה נוחה ופורייה במהלך של חקירת תכונותיהן.