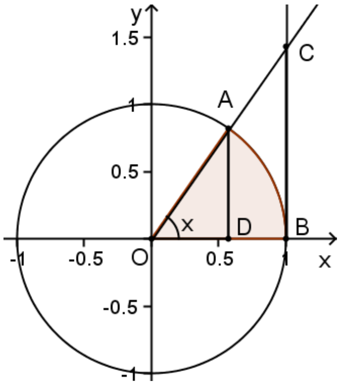
הוכחת הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$



כדי לגזור את הפונקציה $f\left(x\right)=\sin x$ אנו זקוקים לגבול: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

איור 1 מציג עיגול יחידה ובו גזרה בת x רדיאנים OAB, כאשר $0<x<\frac{\pi}{2}$.

השוק OB של זווית הגזרה מונחת על ציר ה- x.

מ- A נוריד אנך ל-ציר ה- x. האנך חותך את ציר ה- x בנקודה D.
דרך הנקודה B נעביר אנך לציר x, החותך את המשך הרדיוס OA בנקודה C.

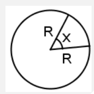
על-פי הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות, מתקיים:

$\tan x=\tan\measuredangle AOB=CB,\ \ \cos x=\cos\measuredangle AOB=OD,\ \sin x=\sin\measuredangle AOB=AD$.

השטח של המשולש הישר-זווית AOD הוא: $S_1=\frac{1}{2}OD\cdot AD=\frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x$.

שטח הגזרה AOB הוא: $\frac{R^2x}{2}=\frac{1^2x}{2}=\frac{x}{2}$

$S=\frac{1}{2}R^2x$



שטח המשולש הישר-זווית OCB הוא: $S_3=\frac{1}{2}OB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x=\frac{\tan x}{2}$.

מהשוואת השטחים נובע כי $S_1<S_2<S_3$, כלומר, $\cos x\cdot\sin x<x<\tan x$.

היות ו- $0<x<\frac{\pi}{2}$, ל- $\sin x$ יש ערך חיובי, ולכן ניתן לחלק את האי-שוויון לעיל ב- $\sin x$.

מקבלים:

$$\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\text{, כאשר } 0<x<\frac{\pi}{2}$$

ומכאן:

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x}\text{, כאשר } 0<x<\frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

היות והפונקציות $\cos x$ ו- $\frac{1}{\cos x}$ רציפות בנקודה $x=0$, מתקיים:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1\\ &\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos 0}=1\end{aligned}\right\}$$

כלומר:

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\,. \qquad (2)$$

מ- (1), (2) ומשפט "הסנדוויץ' " מתורת הגבולות (ראו עמוד 62) נובע כי:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1\,. \qquad (3)$$

כיוון ש- $\frac{\sin x}{x}$ פונקציה זוגית, הגבולות החד-צדדיים שלה בנקודה $x=0$ שווים זה לזה, ולכן מ- (3) מקבלים:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1\,. \qquad (4)$$

שוויון הגבולות החד-צדדים של פונקציה בנקודה, מבטיח את קיום גבולה בנקודה זו. לכן מ- (4) נובע כי קיים הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.[1]

גבולות המתקבלים מהגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ על-ידי החלפת משתנה

מהגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ניתן להסיק:

אם פונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, ו- $\lim_{x\to a}f(x)=0$, אז $\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$. ואכן, החלפת המשתנה $t=f(x)$ במקרה זה, מביאה לגבול: $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.

דוגמאות

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=1\,.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-1}=1\,.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)}=1.$$

[1] דיון בהוכחות נוספות לגבול זה, ועל הוכחות מעגליות ניתן למצוא אצל Richman (1993).