הגדרות שונות של קעירות והקשר ביניהן

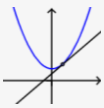
בפרק הנגזרת השנייה וישומיה הוצגו שלוש הגדרת של קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. פרק השלמות זה מציג משפטים הקשורים לשקילות ההגדרות ולתנאים לשקילותן.

קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה – הגדרות

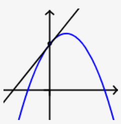
הגדרת קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה באמצעות הנגזרת

פונקציה $f(x)$ גזירה בתחום קשיר על ציר המספרים הממשיים (קטע, קרן, הישר כולו) נקראת **קעורה כלפי מעלה** בתחום זה אם הנגזרת הראשונה $f'(x)$ היא פונקציה עולה במובן החזק. הפונקציה נקראת **קעורה כלפי מטה** בתחום זה אם הנגזרת הראשונה $f'(x)$ היא פונקציה יורדת במובן החזק.

הגדרת קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה באמצעות משיקים

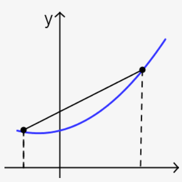

איור 1

פונקציה $f(x)$, **גזירה** בתחום קשיר (קטע, קרן, ישר), נקראת **קעורה כלפי מעלה** בתחום זה אם הגרף של $f(x)$ בתחום זה נמצא כולו מעל לכל ישר המשיק לגרף, למעט נקודת ההשקה (שהיא משותפת למשיק ולגרף).


איור 2

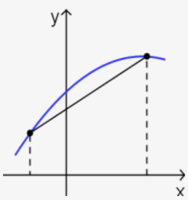
פונקציה $f(x)$, **גזירה** בתחום קשיר (קטע, קרן, ישר), נקראת **קעורה כלפי מטה** בתחום זה אם הגרף של $f(x)$ בתחום זה נמצא כולו מתחת לכל ישר המשיק לגרף, למעט נקודת ההשקה (שהיא משותפת למשיק ולגרף).

הגדרת קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה באמצעות מיתרים



איור 3

פונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בתחום קשיר נקראת **קעורה כלפי מעלה** בתחום זה אם הגרף שלה **בכל קטע** (a,b) בתחום נמצא **מתחת** למיתר המחבר את קצות הגרף בקטע זה.



איור 4

פונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בתחום קשיר נקראת **קעורה כלפי מטה** בתחום זה אם הגרף שלה בכל קטע (a,b) בתחום נמצא **מעל** למיתר המחבר את קצות הגרף בקטע זה.

הקשרים בין ההגדרות באים לידי ביטוי במשפטים הבאים:

קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה – משפטים הקשורים בשקילות ההגדרות

משפט על שקילות שתי ההגדרות הראשונות

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בתחום קשיר D (קטע, קרן, ישר).

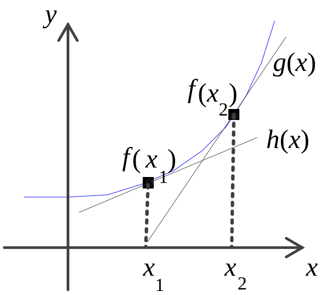
א. הפונקציה הנגזרת הראשונה $f'(x)$ עולה ב-D אם ורק אם הגרף של $f(x)$ נמצא כולו מעל לכל ישר המשיק לגרף (למעט נקודת ההשקה שבה הגרף והמשיק מתלכדים).

ב. הפונקציה הנגזרת הראשונה $f'(x)$ יורדת ב-D אם ורק אם הגרף של $f(x)$ נמצא כולו מתחת לכל ישר המשיק לגרף, למעט נקודת ההשקה.

הוכחה

נוכיח תחילה את טענה א.

כיוון א: נניח כי הגרף של $f(x)$ נמצא כולו מעל לכל ישר המשיק לו, בכל נקודה בתחום D, למעט נקודת ההשקה, ונראה שבמקרה זה $f'(x)$ עולה ב- D.



איור 5

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת $x=x_0$ היא:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

תהיינה $x_1<x_2$ שתי נקודות כלשהן ב-D. נוכיח כי $f'(x_1)<f'(x_2)$.

משוואת המשיק לגרף של $f(x)$ ב-x_1 היא: $y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$.

משוואת המשיק לגרף של $f(x)$ ב- x_2 היא: $y=f(x_2)+f'(x_2)(x-x_2)$.

לפי ההנחה, הגרף של $f(x)$ נמצא מעל לכל משיק בתחום (למעט נקודת ההשקה).

בפרט, הנקודה $(x_2,f(x_2))$ נמצאת מעל למשיק לגרף $y=f(x)$ כאשר $x=x_1$, כלומר:

$$f(x_2)>f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1).$$

בדומה, הנקודה $(x_1,f(x_1))$ נמצאת מעל למשיק לגרף $y=f(x)$ כאשר $x=x_2$, כלומר:

$$f(x_1)>f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2).$$

נחבר את שני האי-שוויונות ונקבל:

$$f(x_2)+f(x_1)>f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2).$$

לאחר פישוט נקבל: $(x_2-x_1)(f'(x_1)-f'(x_2))<0$.

על-פי הנתון: $x_1<x_2$. נצמצם את האי- שוויון האחרון במספר חיובי x_2-x_1 ונקבל:

$(f'(x_1)-f'(x_2))<0$ כלומר: $f'(x_2)>f'(x_1)$.

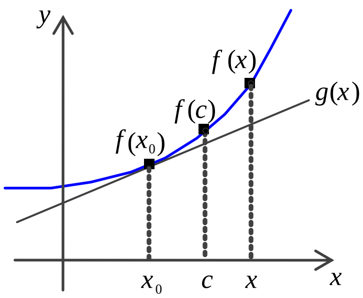
בכך הוכחנו כי הפונקציה $f'(x)$ עולה ב- D.

כיוון ב: נניח כי הנגזרת $f'(x)$ עולה בתחום קשיר D, ונוכיח כי הגרף של $f(x)$ נמצא כולו מעל לכל ישר המשיק לגרף, למעט נקודת ההשקה.

משוואת המשיק לגרף של פונקציה $f(x)$ בנקודה $x=x_0\in D$ היא:

$$y=g(x)\equiv f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\,.$$

על מנת להראות שגרף הפונקציה $f(x)$ נמצא כולו מעל למשיק זה, למעט נקודת ההשקה, נראה שלכל $x\in D$ למעט $x=x_0$ מתקיים: $f(x)-g(x)>0$.



איור 6

פונקציית ההפרש $f(x)-g(x)$ היא:

$$f(x)-g(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \qquad (*)$$

לפי משפט הערך הממוצע של לגרנז' (הפניה) לכל $x\neq x_0$ קיימת נקודה c בין x_0 לבין x כך ש- $f'(c)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. נכפול ב- $x-x_0$ ונקבל:

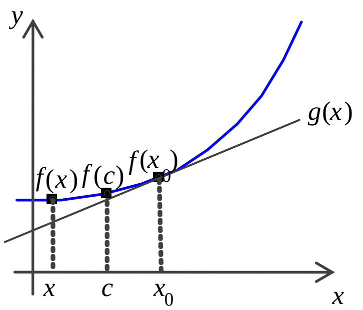
$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)\ ,\ \text{כאשר}\ x\neq x_0\in D\,. \qquad (**)$$

מ- (*) ו- (**) נובע:

$$f(x)-g(x)=\big(f'(c)-f'(x_0)\big)(x-x_0)\ \ \text{כאשר}\ x\neq x_0\in D\,.$$

כדי לבדוק את סימן ההפרש $f(x)-g(x)$ נבחין בין שני מקרים: $x_0<c<x$ ו- $x<c<x_0$ (איור 6).

היות ולפי ההנחה $f'(x)$ עולה בתחום D, במקרה $x_0<c<x$ מתקיים: $f'(c)-f'(x_0)>0$, $x-x_0>0$ ולכן: $f(x)-g(x)>0$.



איור 7

מאותה סיבה במקרה $x<c<x_0$ (איור 7) מתקיים: $f'(c)-f'(x_0)<0$, $x-x_0<0$, ולכן $f(x)-g(x)>0$.

כלומר, מתקיים: $f(x)-g(x)>0$ לכל $x\neq x_0\in D$. במילים אחרות, הגרף של $f(x)$ נמצא מעל כל משיק בכל נקודה בתחום D, למעט נקודת ההשקה. כך הוכחנו את טענה א של המשפט.

כדי להוכיח את טענה ב של המשפט נעבור לפונקציה $(-f(x))$ ונישם את טענה א שכבר הוכחה. לפי טענה זו הפונקציה הנגזרת הראשונה $(-f(x))'$ עולה ב- D אם ורק אם הגרף של $(-f(x))$ נמצא כולו מעל לכל ישר המשיק לגרף (למעט נקודת ההשקה שבה הגרף והמשיק מתלכדים).

אבל הנגזרת $(-f(x))'$ עולה אם ורק אם הנגזרת $f'(x)$ יורדת, והגרף של $(-f(x))$ נמצא מעל לכל ישר המשיק לגרף זה אם ורק אם הגרף של $f(x)$ נמצא מתחת לכל ישר המשיק לו.

לכן הטענה לעיל עבור הפונקציה $\left(-f(x)\right)$ שקולה לטענה הבאה לגבי הפונקציה $f(x)$:

הפונקציה הנגזרת הראשונה $f'(x)$ יורדת ב- D אם ורק אם הגרף של $f(x)$ נמצא כולו מתחת לכל ישר המשיק לגרף (למעט נקודת ההשקה שבה הגרף והמשיק מתלכדים).

בכך הוכחה גם טענה ב של המשפט.

מהמשפט נובע שכאשר $f(x)$ גזירה בתחום D הגדרת הקעירות באמצעות הנגזרת הראשונה והגדרת קעירות באמצעות משיקים הן הגדרות שקולות זו לזו.

משפט על שקילות ההגדרה באמצעות משיקים וההגדרה באמצעות מיתרים עבור פונקציות גזירות בתחום קשיר

א. פונקציה $f(x)$, אשר גזירה בתחום קשיר D , קעורה כלפי מעלה בתחום זה לפי ההגדרה באמצעות משיקים אם ורק אם היא קעורה ב- D כלפי מעלה לפי ההגדרה באמצעות מיתרים.

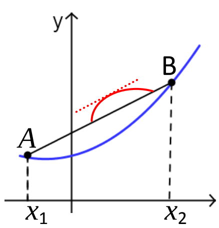
ב. פונקציה $f(x)$, אשר גזירה בתחום קשיר D , קעורה כלפי מטה בתחום זה לפי ההגדרה באמצעות משיקים אם ורק אם היא קעורה ב- D כלפי מטה לפי ההגדרה באמצעות מיתרים.

נוכיח כאן את חלק א של המשפט. את חלק ב ניתן להוכיח באופן דומה.

הוכחת חלק א של המשפט

כיוון א: נניח כי $f(x)$ קעורה ב- D כלפי מעלה לפי הגדרה באמצעות משיקים, כלומר הגרף של $f(x)$ כולו נמצא מעל לכל משיק בכל הנקודות ב- D , למעט נקודת ההשקה. נוכיח כי היא קעורה כלפי מעלה גם לפי ההגדרה באמצעות מיתרים. יהיו $A\left(a, f(a)\right), B\left(b, f(b)\right)$ שתי נקודות על הגרף של $f(x)$.

נתבונן בחלק הגרף בקטע $a \le x \le b$ ובמיתר AB . אם בקטע $a \le x \le b$ יש חלק של הגרף אשר נמצא מעל למיתר זה (איור 8), אזי לפי משפט לגרנז' (עמ' 605) קיים משיק לגרף המקביל למיתר AB כך שבסביבת נקודת ההשקה הגרף נמצא בין המיתר לבין המשיק, כלומר, אינו עולה מעל למשיק. אבל מצב זה סותר את ההנחה כי $f(x)$ קעורה ב- D כלפי מעלה, לפי ההגדרה באמצעות משיקים, כלומר, הגרף כולו נמצא מעל לכל משיק (למעט נקודת ההשקה). הסתירה מראה כי הגרף אינו עולה מעל למיתרו AB , כלומר, חלקו בקטע $a \le x \le b$ נמצא כולו מתחת למיתר או על המיתר. היות וההגדרה באמצעות משיקים שקולה להגדרה באמצעות הנגזרת, הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה עולה, ולכן לא ייתכן כי הגרף של $f(x)$ מתלכד עם אותו ישר במספר נקודות גדול משתיים (חישבו מדוע!). כלומר, חלק הגרף של $f(x)$ בכל הקטע $a \le x \le b$ נמצא מתחת למיתר AB , למעט נקודות הקצה A, B בהן הגרף והמיתר מתלכדים.



איור 8

בכך הוכח כי $f(x)$ קעורה כלפי מעלה לפי ההגדרה באמצעות מיתרים.

כיוון ב: נניח כי $f\left(x\right)$ גזירה בתחום D וקעורה כלפי מעלה לפי ההגדרה באמצעות מיתרים, כלומר, כל חלק של הגרף של $f\left(x\right)$ נמצא מתחת למיתרו, למעט נקודות הקצה שהן משותפות לגרף ולמיתר. נוכיח כי $f\left(x\right)$ קעורה כלפי מעלה לפי ההגדרה באמצעות משיקים.

יהיו x_1, x_2 שתי נקודות בתחום D. המיתר המחבר את הנקודות $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right),\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$ הוא גרף הפונקציה:

$$g\left(x\right)=f\left(x_1\right)+\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\cdot\left(x-x_1\right).$$

היות וכל חלק הגרף של $f\left(x\right)$ נמצא מתחת למיתרו, מתקיים:

$$f\left(x\right)<f\left(x_1\right)+\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\cdot\left(x-x_1\right). \quad \text{לכל } x \text{ בין } x_1,x_2 \qquad (*)$$

נניח תחילה כי $x_1<x<x_2$. אזי ב- (*) מקבלים:

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}<\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1} \quad \text{כאשר } x_1<x<x_2.$$

אם באי-שוויון זה נעבור לגבול עבור $x\to x_1$ נקבל:

$$f'\left(x_1\right)\le\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}.$$

ומכאן:

$$f\left(x_2\right)\ge f\left(x_1\right)+f'\left(x_1\right)\left(x_2-x_1\right). \qquad (1)$$

אם $x_2<x_1$ אז $x<x_1$, ומ- (*) מקבלים:

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}>\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1} \quad \text{כאשר } x_2<x<x_1.$$

אם באי-שוויון זה נעבור לגבול עבור $x\to x_1$ נקבל:

$$f'\left(x_1\right)\ge\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}.$$

ומכאן, היות ו- $x_2-x_1<0$ שוב מקבלים אי-שוויון (1). כלומר, אי-שוויון (1) מתקיים גם כאשר $x_2>x_1$ וגם כאשר $x_2<x_1$, במילים אחרות, הוא מתקיים לכל $x_2\ne x_1$. לפי אי-שוויון זה כל הגרף של $f\left(x\right)$ בתחום D נמצא מעל לכל משיקו או מתלכד אתו. אבל לא ייתכן כי לגרף ומשיקו יש נקודת התלכדות נוספת, למעט נקודת ההשקה, כי אז המשיק היה הופך למיתר, וחלק הגרף צריך להימצא תחתיו לפי ההנחה, וזה סותר את המסקנה לעיל. לכן כל הגרף של $f\left(x\right)$ בתחום D נמצא מעל לכל משיקו, למעט נקודת ההשקה שבה המשותפת לגרף ולמשיק. בכך הוכח כי $f\left(x\right)$ קעורה בתחום D כלפי מעלה לפי ההגדרה באמצעות משיקים.