משפטי הערך הממוצע וכלל לופיטל

משפט הערך הממוצע נוסח והוכח לראשונה על ידי המתמטיקאי הצרפתי ז'וזף לואי לגרנז' (Joseph-Louis Lagrange,1736-1813) ולכן הוא נקרא גם משפט לגרנז'. למשפט זה יש ערך תאורטי ומעשי גדול מאוד, והוא נחשב לאחד המשפטים המרכזיים של החשבון הדיפרנציאלי ושל האנליזה כולה.

משפט 1 (משפט הערך הממוצע – משפט לגרנז')

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע חסום סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b).
אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ בה מתקיים:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

הוכחה

אם $f(x)$ פונקציה ליניארית, כלומר, $f(x)=px+q$, כאשר p,q מספרים קבועים כלשהם, טענת המשפט נכונה לכל $c\in(a,b)$, כי $f'(c)=p$ וגם

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{pb+q-pa-q}{b-a}=p.$$

נתבונן במקרה כאשר $f(x)$ אינה פונקציה ליניארית. נסמן:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k.$$

ונגדיר פונקציה

$$g(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$$

בקטע $a\le x\le b$.
על-פי תנאי המשפט, $g(x)$ רציפה בקטע חסום סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b). היות ו- $f(x)$ אינה פונקציה ליניארית, גם $g(x)$ אינה ליניארית, בפרט אינה קבועה בקטע $a\le x\le b$. בנוסף

$$g(a)=f(a)-f(a)-k(a-a)=0$$

וגם

$$g(b)=f(b)-f(a)-k(b-a)=(b-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-k\right)=0.$$

כלומר: $g(a)=g(b)=0$.
היות ו- $g(x)$ רציפה בקטע $a\le x\le b$, היא בהכרח משיגה בו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי שלה, והיות שהיא אינה קבועה בקטע זה, אחד מערכים אלה מושג בתוך הקטע,כלומר, ל-$g(x)$ קיימת נקודת קיצון $c\in(a,b)$. היות ו-$g(x)$ גזירה בכל נקודה בתוך הקטע, אז, לפי תנאי הכרחי של נקודת קיצון, מתקיים:

$$g'(c)=0.$$

מהגדרת $g(x)$ נובע כי:

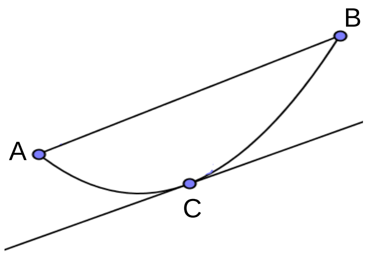
$$g'(x) = f'(x) - k$$

ולכן התנאי $g'(c) = 0$ שקול לתנאי $f'(c) = k$. בכך הוכחה טענת המשפט.

הערה 1

השם "משפט הערך הממוצע" קשור לכך שהיחס $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ מהווה את הערך הממוצע של שינוי $f(x)$ בקטע $[a,b]$. לפי המשפט הערך הזה שווה לאחד הערכים של הנגזרת $f'(x)$ בקטע $a<x<b$ ("ערך הביניים").

הערה 2



המשמעות הגאומטרית של משפט 1 היא בכך שבתוך קשת חלקה, כלומר, כזאת שיש לה משיק בעל שיפוע בכל נקודה פנימית, תמיד קיימת נקודה בה המשיק לקשת מקביל למיתר המחבר את קצותיה (ר' בסרטוט).

המשפט הבא מהווה הכללת משפט 1 והוא הוכח לראשונה על-ידי המתמטיקאי הצרפתי אוגוסטן לואי קושי (Augustin Louis, 1789 -1857) Cauchy.

משפט 2 (משפט הערך הממוצע המוכלל – משפט קושי)

יהיו $f(x)$ ו-$g(x)$ שתי פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בתוכו. אם $g(b) \neq g(a)$ ו- $g'(x) \neq 0$ ל - $x \in (a,b)$, אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך שמתקיים:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

הוכחה

נגדיר פונקציה:

$$H(x) = f(x) - mg(x)$$

כאשר

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

פונקציה $H(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בכל נקודה $x \in (a,b)$. לפי משפט 1 קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך שמתקיים:

$$\frac{H(b)-H(a)}{b-a} = H'(c).$$

אבל לפי הגדרה,

$$\begin{aligned} H(b)-H(a) &= f(b)-mg(b)-f(a)+mg(a) \\ &= f(b)-f(a)-m\big(g(b)-g(a)\big) \\ &= f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(b)-g(a)\big) \\ &= f(b)-f(a)-\big(f(b)-f(a)\big)=0 \end{aligned}$$

לכן:

$$H'(c)=0$$

או

$$f'(c)-mg'(c)=0\,.$$

מכאן נובע כי:

$$m=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

או

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

טענת המשפט הוכחה.

הערה

נציין כי ממשפט 1 נובע מידית כי $\frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$ כאשר $c_1,c_2\in(a,b)$ הן שתי נקודות שאינן חייבות להתלכד. משפט 2 טוען כי קיימת נקודה c אחת עבורה $\frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$. טענה זאת כבר אינה השלכה מידית של משפט 1 אלא הכללתו: משפט 1 הוא מקרה פרטי של משפט 2 שבו $g(x)=x$.

אחד היישומים החשובים של משפטי הערך הממוצע הוא הוכחת כלל לופיטל לחישוב גבולות. כלל זה נוסח לראשונה על- ידי המתמטיקאי השוויצרי יוהאן ברנולי (Johann Bernoulli, 1667 -1748), ופורסם לראשונה על ידי המתמטיקאי הצרפתי גיום פרנקו אנטואן, המרקיז דה לופיטל
(Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital, 1661-1704), בספר הלימוד של חשבון דיפרנציאלי שחובר על- ידו בשנת 1696. מסיבות היסטוריות אלה, הכלל לחישוב גבולות בעזרת נגזרות נקרא בשם מפרסמו הראשון ולא בשם ממציאו הראשון.

משפט 3 (כלל לופיטל)

יהיו $f\left(x\right)$ ו- $g\left(x\right)$ שתי פונקציות, אשר מוגדרות, רציפות וגזירות, בסביבת נקודה $x=x_0$, למעט אולי נקודה זו, ו- $g'\left(x\right)\neq 0$ כאשר $x\to x_0$.

אם:
$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0} g\left(x\right)=0$$

או
$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0} g\left(x\right)=\left(\pm\right)\infty$$

אזי:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$$

במקרה והגבול האחרון של מנת הנגזרות קיים.

הוכחה

נתבונן קודם במקרה כאשר $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0} g\left(x\right)=0$.

נגדיר פונקציות $f\left(x\right)$ ו- $g\left(x\right)$ בנקודה $x=x_0$ באופן הבא:

$$f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)=0\,.$$

אזי $f\left(x\right),g\left(x\right)$ מקיימות את תנאי משפט 2 בכל קטע $\left[x_0,x\right]$ ו- $\left[x,x_0\right]$ כאשר $x\to x_0$. לפי משפט זה עבור $x\to x_0$ מתקיים:

$$\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{g\left(x\right)-g\left(x_0\right)}=\frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)} \tag{1}$$

כאשר c נמצאת בין x שוטף ו- $x=x_0$ קבוע. כאשר x שואף ל- x_0 גם c שואף ל- x_0 , ולכן:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)} \tag{2}$$

במקרה והגבול האחרון קיים. מ- (1), (2) נובע כי במקרה זה קיים גם הגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ ומתקיים:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}\,.$$

בכך הוכחה טענת משפט 3 במקרה ש- $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0} g\left(x\right)=0$.

נוכיח את טענת המשפט כאשר $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0} g\left(x\right)=\infty$.

תהי $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת ערכי x אשר שואפת ל- x_0 . היות ו- $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty} g\left(x_n\right)=\infty$, קיימת סדרה $\left\{\hat{x}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ אשר גם היא שואפת ל- x_0 , אבל $f\left(x_n\right)\gg f\left(\hat{x}_n\right)$ ו- $g\left(x_n\right)\gg g\left(\hat{x}_n\right)$, עד כדי כך שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\hat{x}_n\right)}{f\left(x_n\right)}=0$$

וגם:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g\left(\hat{x}_n\right)}{g\left(x_n\right)}=0\,.$$

מהתנאים לעיל נובע כי-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_n\right)-f\left(\hat{x}_n\right)}{g\left(x_n\right)-g\left(\hat{x}_n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_n\right)\left(1-\dfrac{f\left(\hat{x}_n\right)}{f\left(x_n\right)}\right)}{g\left(x_n\right)\left(1-\dfrac{g\left(\hat{x}_n\right)}{g\left(x_n\right)}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_n\right)}{g\left(x_n\right)}\,.$$

כי כל אחד מהשברים בסוגריים שואף ל- 0 כאשר $n\to\infty$.

על סמך התוצאה שהתקבלה לעיל ומשפט 2, מקבלים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_n\right)}{g\left(x_n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_n\right)-f\left(\hat{x}_n\right)}{g\left(x_n\right)-g\left(\hat{x}_n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'\left(c_n\right)}{g'\left(c_n\right)} \tag{3}$$

כאשר c_n נמצאת בין x_n ו- $\hat{x}_n$. היות והסדרות $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\left\{\hat{x}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ שואפות ל- x_0, גם הסדרה $\left\{c_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל- x_0. לכן:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'\left(c_n\right)}{g'\left(c_n\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)} \tag{4}$$

במקרה והגבול האחרון קיים. מ-(3), (4) נובע כי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_n\right)}{g\left(x_n\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}\,. \tag{5}$$

ניזכר כי $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה כלשהי השואפת ל- x_0. כפי שהוכח בפרק "גבולות": קיום גבול אחיד של סדרת ערכי הפונקציה בכל סדרת הנקודות x_n השואפת ל- x_0, שקול לקיום אותו ערך הגבול של הפונקציה בנקודה $x=x_0$.
לכן מ- (5) נובע כי אם הגבול בצד ימין של (5) קיים, אז קיים גם הגבול בצד שמאל של (5) ומתקיים:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}\,.$$

המשפט 3 הוכח במלואו.

הערה 1

ההוכחה של משפט 3 במקרה שבמנה של פונקציות לשתיהן יש גבול אינסופי לא תלויה בסימן של אינסוף, כלומר, שתיהן יכולות לשאוף ל-$\left(+\infty\right)$ או ל-$\left(-\infty\right)$ או אחת ל-$\left(+\infty\right)$ והשנייה ל-$\left(-\infty\right)$. בהערות להלן הסימן ∞ מסמן $+\infty$ וגם $\left(-\infty\right)$ כאחד.

הערה 2

הדוגמאות לשימוש בכלל לופיטל מובאות בפרק של חשבון דיפרנציאלי. כאן נציין רק שכלל לופיטל תקף לחישוב גבולות של מנות פונקציות במקרי אי-וודאות מסוג "$\frac{0}{0}$" ו- "$\frac{\infty}{\infty}$". לסימונים אלה יש משמעות סימבולית בלבד, ופירושם הוא כי במנת שתי פונקציות הפונקציה במונה והפונקציה במכנה שואפות בו-זמנית ל- 0 או ל- ∞. ניתן גם ליישם את כלל לופיטל במקרי אי-וודאות במכפלת שתי פונקציות מסוג "$0\cdot\infty$", כלומר, כאשר אחת הפונקציות במכפלה שואפת ל- 0 והשנייה ל- ∞. במקרה זה יש קודם להפוך את המכפלה למנה.

הערה 3

אם הגבול הנתון אינו כרוך באי-וודאות, השימוש בכלל לופיטל לחישובו אינו חוקי ועלול להביא לתוצאות שגויות. למשל, הגבול $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{x^2}$ אינו כרוך באי-וודאות. ואכן, כאשר x שואף ל- 0, הפונקציה במונה שואפת ל- 1 והפונקציה במכנה שואפת ל- 0 ונשארת חיובית. לכן המנה שואפת ל-$(+\infty)$, כלומר:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{x^2}=+\infty\,.$$

אילו היינו משתמשים בכלל לופיטל לחישוב גבול זה, היינו מקבלים תשובה שגויה:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}=-\frac{1}{2}\,.$$

כלל לופיטל הוא כלי אפקטיבי לחישוב גבולות, אבל יש להשתמש בו רק במצבים רלוונטיים.

הערה 4

כלל לופיטל הוכח בהנחה כי הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים, סופי או אינסופי. במקרה זה הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ גם קיים ולשני הגבולות יש אותו ערך. אם הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ אינו קיים , כלומר בוודאות ידוע כי הגבול אינו קיים כלל, לא סופי ולא אינסופי, אז לא ניתן להסיק על סמך מידע זה כי הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ גם הוא לא קיים. למשל, עבור הזוג של הפונקציות $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ ו- $g(x)=x$, הגבול $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ אינו קיים כי:

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}=\underbrace{\lim_{x\to0}2x\sin\frac{1}{x}}_{0}-\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}\,,$$

והגבול $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ אינו קיים. לעומת זאת הגבול $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$ כן קיים כי :

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0\,.$$

הערה 5

בחישוב גבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ עם אי-וודאות "$\frac{0}{0}$" או "$\frac{\infty}{\infty}$" , על-פי כלל לופיטל ייתכן שהגבול המתקבל $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ טעון גם הוא באותה אי-וודאות. במקרה זה ניתן ליישם את כלל לופיטל שוב לגבול האחרון, ולהגיע בכך לגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$. אם גם הוא כרוך באי-וודאות הנ"ל, ניתן ליישם גם עליו את כלל לופיטל וכך הלאה. המקרים של שימוש רב-פעמי בכלל לופיטל בחישוב גבול נתון אינם נדירים. התהליך מביא לתשובה במקרים שתוך מספר סופי של צעדים מתקבל גבול אשר קיים וערכו (סופי או אינסופי) מחושב, ואז לגבול המוצא יש אותו ערך. אם במשך התהליך מתקבל גבול אשר בוודאות אינו קיים, כלומר, הוכח שאין לו אף ערך, סופי או אינסופי, אז לא ניתן להסיק משהו מסוים כלפי קיום או אי-קיום של גבול המוצא, ויש לחקור אותו בדרך אחרת (ר' הערה 4).

הערה 6

במשפט 3 הנקודה $x=x_0$ היא נקודה סופית. היות והחלפת משתנה $x=\frac{1}{t}$ מעבירה את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ לגבול $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}$, כלל לופיטל וכל ההערות כלפיו לעיל תקפים גם לגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, במקרי האי-וודאויות "$\frac{0}{0}$" ו-"$\frac{\infty}{\infty}$".