השלמות

המשפט היסודי של האלגברה ויישומיו באנליזה

אחת הבעיות המרכזיות של האלגברה היא בעיית התרת **משוואות פולינומיות** או **משוואות אלגבריות**. אלה הן משוואות מהצורה

$$P(x)\equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (*)$$

כאשר x הוא הנעלם, n הוא מספר טבעי או $n=0$, והמקדמים a_0, a_1, ..., a_n הם מספרים קבועים. הפונקציה $f(x)=P(x)$ העומדת באגף שמאל של המשוואה (*) נקראת פונקציית פולינום או פונקציה פולינומיאלית או, בקצרה - פולינום. אם $a_n \neq 0$, הפולינום נקרא **פולינום ממעלה** n, והמקדם a_n נקרא **המקדם הראשי** של הפולינום (*).

טיפול בבעיה של התרת משוואות פולינומיות דורש יציאה מתחום המספרים הממשיים לתחום המספרים המרוכבים. נזכיר, כי כל מספר ממשי הוא גם מספר מרוכב, אבל לא להפך.

בפרק זה, בהיעדר ציון ספציפי, ברירת המחדל היא, שהמקדמים a_j של פולינום, כולם או בחלקם, יכולים להיות מספרים מרוכבים שאינם ממשיים, ושהמשתנה x של פולינום יכול לקבל גם ערך מרוכב שאינו ממשי.

הגדרה 1

כל ערך של משתנה x אשר מקיים את המשוואה (*), כלומר, הצבתו במשוואה הופכת אותה לזהות, נקרא **פתרון המשוואה** (*), וגם **השורש של הפולינום** $P(x)$.

במילים אחרות, השורש של פולינום $P(x)$ הוא נקודת אפס של הפונקציה $f(x)=P(x)$.

לאור הנאמר בשורות הראשונות של סעיף זה, ברור מדוע המשפט אשר דן בקיום של שורש של פולינום נקרא **המשפט היסודי של האלגברה.**

לפני ניסוחו ניזכר כי כל מספר ממשי הוא מקרה פרטי של מספר מרוכב, ולכן תחום המספרים המרוכבים כולל את קבוצת כל המספרים הממשיים.

משפט 1 (המשפט היסודי של האלגברה)

לכל פולינום $P(x)$ ממעלה $n>0$ בתחום המספרים המרוכבים קיים שורש, אחד לפחות.

נציין כי בניסוחו של המשפט, המשתנה x נתפס כמשתנה מרוכב, כלומר, הוא יכול לקבל הן ערכים ממשיים והן ערכים מרוכבים שאינם ממשיים.

נדגיש כי, במקרה פרטי, מקדמי הפולינום אליו מתייחס המשפט יכולים להיות, כולם או חלקם, מספרים ממשיים, וגם השורש עליו מדובר יכול להיות מספר ממשי. יחד עם זאת לא מובטח קיום של שורש ממשי לפולינום, אף אם כל מקדמיו ממשיים. נציין גם כי אין קשר בין סוג מקדמי הפולינום לבין סוג שורשיו. למשל לפולינום ממעלה שנייה $P(x)=x^2+1$ עם מקדמים ממשיים, יש שני שורשים מרוכבים $x=\pm i$, ולפולינום $P(x)=ix^3-ix$ עם מקדמים מרוכבים, יש שלושה שורשים ממשיים $x=0, x=\pm 1$.

קיימות דרכים שונות להוכחת משפט 1, כולן מחוץ למסגרת ספר זה[1]
המשפטים 2, ו- 3 להלן עוסקים בפירוק של פולינום לגורמים ליניאריים וריבועיים. הניסוח של משפטים אלה ושל השלכותיהם דורש הגדרת המושג "ריבוי של שורש".

הגדרה 2

יהי m מספר טבעי $(m \ge 1)$. המספר $x = x_0$ נקרא שורש של הפולינום $P(x)$ **בעל ריבוי** m אם ניתן להציג את $P(x)$ בצורה:

$P(x) = (x - x_0)^m Q(x)$ כאשר $Q(x)$ הוא פולינום עבורו $Q(x_0) \ne 0$.

נציין כי גם $Q(x_0) = c$ הוא פולינום.

הגדרה 3

לשורש של פולינום בעל ריבוי $m = 1$ קוראים **שורש פשוט,** ולשורש בעל ריבוי $m > 1$ קוראים **שורש מרובה.**
שורש מרובה בעל ריבוי $m = 2$ נקרא **שורש כפול**.

דוגמה

את הפולינום $P(x) = x^3 - 2x^2 + x$ ניתן להציג כ- $P(x) = x(x-1)^2$. מכאן שלפולינום זה יש שני שורשים. השורש $x = 0$ בריבוי יחיד והשורש $x = 1$ בריבוי כפול.

בשני המשפטים הבאים נסמן פולינום ממעלה n ב-$P_n(x)$.

משפט 2 (המשפט על פירוק פולינום לגורמים ליניאריים)

יהי $P_n(x)$ פולינום ממעלה $n > 0$, ויהי $x_1, x_2, ..., x_k$ $(1 \le k \le n)$ כל השורשים השונים של $P_n(x)$ בתחום המספרים המרוכבים עם הריבויים $m_1, m_2, ..., m_n$ בהתאם. אזי ניתן להציג את $P_n(x)$ כמכפלת חזקות של גורמים ליניאריים בצורה הבאה:

$$P_n(x) = (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} (x - x_3)^{m_3} ... (x - x_k)^{m_k} \cdot a_n \qquad (**)$$

כאשר a_n הוא המקדם הראשי של $P_n(x)$ ומתקיים: $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$.

הוכחה

מנתוני המשפט והגדרת ריבוי השורש נובע כי את הפולינום $P_n(x)$ ניתן להציג בצורה:

$$P_n(x) = (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} ... (x - x_k)^{m_k} Q(x)$$

כאשר $Q(x)$ הוא פולינום אשר אינו מתאפס בנקודות $x = x_1, x_2, ..., x_k$.

[1] את אחת ההוכחות ניתן לראות במאמרן של מובשוביץ-הדר, זסלבסקי ושמוקלר (1995), בו הוצגה גם היסטוריית ההוכחות של המשפט הזה, המשתרעת על פני כמאתיים שנה. במאמר הוצעו דרכים ופעילויות להפנמת המשפט על-ידי תלמידי תיכון ללא הוכחתו המדויקת.

נראה כי $Q(x)$ חייב להיות מספר קבוע.

נניח כי $Q(x)$ הוא פולינום ממעלה $n>0$. לפי המשפט היסודי של האלגברה לפולינום $Q(x)$ יש שורש $x=x_0$.

כמובן $x=x_0$ הוא גם שורש של $P_n(x)$.

אולם לפי נתוני המשפט $Q(x)$ אינו מתאפס בנקודות $x=x_1,x_2,...,x_k$, ולכן $x=x_0$ אינו יכול להיות אחד משורשי הפולינום $P_n(x)$, וזה סותר את הנתון ש- $x_1,x_2,...,x_k$ הם כל השורשים השונים של $P_n(x)$ בתחום המספרים המרוכבים. הסתירה מראה כי $Q(x)=a_n$, ומתקיים: $m_1+m_2+...+m_k=n$. משפט 2 הוכח במלואו.

ממשפט 2 נובעות השלכות חשובות:

- לכל פולינום $P_n(x)$ סכום הריבויים של כל השורשים השונים שלו בתחום המספרים המרוכבים, שווה למעלתו n.
- לכל פולינום $P_n(x)$ ממעלה n בתחום המספרים המרוכבים יש בדיוק n שורשים, בתנאי שכל שורש מרובה נמנה מספר פעמים השווה לריבויו.
- לכל פולינום $P_n(x)$ ממעלה n בתחום המספרים **הממשיים** יש **לכל היותר** n שורשים.

נעבור כעת לפולינומים שכל מקדמיהם הם מספרים ממשיים, אבל המשתנה x יכול לקבל גם ערכים מרוכבים. פולינומים כאלה הם בעלי התכונה המיוחדת הבאה:

אם מספר מרוכב $(a+ib)$ הוא שורש של הפולינום שכל מקדמיו הם מספרים ממשיים אזי המספר המרוכב הצמוד $(a-ib)$ גם הוא שורש של אותו פולינום.

הוכחת טענה זו מתבססת על הזהות $P\left(\overline{a+ib}\right)=\overline{P(a+ib)}$ אשר מתקיימת לכל פולינום $P(x)$ עם מקדמים ממשיים. לפי זהות זו, אם $P(a+ib)=0$ אזי $P(a-ib)=P\left(\overline{a+ib}\right)=\overline{P(a+ib)}=\overline{0}=0$, כלומר: $a-ib$ גם הוא שורש של אותו פולינום $P(x)$.

מהטענה לעיל נובע ששורשים מרוכבים של פולינום עם מקדמים ממשיים מופיעים בזוגות של מספרים צמודים $a\pm ib$. ניתן גם להוכיח כי שורשים מרוכבים צמודים של אותו פולינום עם מקדמים ממשיים הם בעלי אותו ריבוי. עובדות אלו מאפשרות לגלות את המבנה המיוחד של פולינומים ממשיים.

משפט 3 (המשפט על פירוק פולינום ממשי לגורמים ליניאריים וריבועיים)

יהי $P_n(x)$ פולינום ממשי ממעלה $n>0$ בעל s שורשים ממשיים שונים x_j עם ריבוי m_j $(j=1,2,...,s)$ ו- t זוגות שונים של שורשים מרוכבים צמודים $a_j\pm ib_j$ עם ריבוי r_j של כל אחד $(j=1,2,...,t)$. אזי ניתן להציג את הפולינום כמכפלת חזקות של גורמים ליניאריים וריבועים ממשיים:

(***)

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{m_1}\cdot(x-x_2)^{m_2}\cdot...\cdot(x-x_s)^{m_s}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}\cdot\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{r_2}\cdot...\cdot\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{r_t}$$

כאשר a_n הוא המקדם הראשי של $P_n(x)$, הגורמים הריבועיים אינם פריקים בתחום המספרים הממשיים, ומתקיים:

$$m_1+m_2+...+m_s+2r_1+2r_2+...+2r_t=n.$$

הוכחה

לפולינום ממשי $P_n(x)$ ממעלה $n>0$ תקף פירוק (**) אשר פותח במשפט 2.

לפי פירוק זה ניתן להציג את הפולינום הנתון במשפט 3 בצורה הבאה:

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{m_1}\cdot(x-x_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_s)^{m_s}\cdot$$
$$\cdot\left(x-(a_1+ib_1)\right)^{r_1}\cdot\left(x-(a_1-ib_1)\right)^{r_1}\cdot\left(x-(a_2+ib_2)\right)^{r_2}\cdot\left(x-(a_2-ib_2)\right)^{r_2}\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot\left(x-(a_t+ib_t)\right)^{r_t}\cdot\left(x-(a_t-ib_t)\right)^{r_t}$$

כאשר a_j ו- b_j הם מספרים ממשיים.

בפירוק לעיל נחשב מכפלה של כל זוג גורמים מרוכבים צמודים באופן הבא:

$$\left(x-(a_j+ib_j)\right)^{r_j}\cdot\left(x-(a_j-ib_j)\right)^{r_j}=\left((x-a_j)^2+b_j^2\right)^{r_j}$$
$$=\left(x^2-2a_jx+\left(b_j^{\,2}+a_j^{\,2}\right)\right)^{r_j}=\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{r_j}$$

נציין כי p_j,q_j הם מספרים ממשיים והטרינום בסוגריים אינו פריק לגורמים ליניאריים ממשיים.

אם בפירוק של $P_n(x)$ נחליף כל זוג גורמים מרוכבים צמודים על-ידי מכפלתם, נגיע לפירוק (***).

מהשוואת המעלות של הפולינומים בשני אגפי (***) נובע כי:

$$m_1+m_2+\ldots+m_s+2r_1+2r_2+\ldots+2r_t=n$$

משפט 3 הוכח.

דוגמה 1

יהי נתון פולינום ממעלה רביעית:

$$P_4(x)=x^4+1$$

על-פי משפט הפירוק של פולינום ממשי, חייב להימצא פירוק של הפולינום הנתון לגורמים ליניאריים וריבועיים בלתי-פריקים, או רק לגורמים ליניאריים או רק לגורמים ריבועיים בלתי פריקים, עם מקדמים ממשיים בלבד. ניתן למצוא פירוק זה כך:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-2x^2=\left(x^2+1+\sqrt{2}x\right)\left(x^2+1-\sqrt{2}x\right)$$

הפירוק מכיל רק גורמים ריבועיים. לכל טרינום ריבועי בסוגריים יש שורשים מרוכבים, והוא אינו פריק בתחום המספרים הממשיים. בעזרת הפירוק לעיל ניתן למצוא את כל ארבעת השורשים של הפולינום הנתון והם:

$$x_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2},$$
$$x_{3,4}=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$$

כל השורשים הם מספרים מרוכבים, מופיעים בזוגות של צמודים, כל שורש הוא שורש פשוט.

משפט 3 מציין דרך בה ניתן לבנות פולינום ממעלה נתונה, כאשר תכונות שורשיו נקבעות מראש.

דוגמה 2

האם קיים פולינום ממעלה 7 אשר יש לו רק שני שורשים ממשיים: אחד פשוט ואחד כפול?
התשובה לשאלה היא חיובית. יש אינסוף פולינומים המקיימים את התנאים הנתונים. אחד מהם הוא:

$$P_7\left(x\right)=\left(x-1\right)(x+3)^2\left(x^2+1\right)^2$$

לפולינום זה יש שורש פשוט $x=1$, שורש כפול $x=-3$, ושני שורשים מרוכבים כפולים $x=i$ ו- $x=-i$.
סכום הריבויים של כל השורשים שווה למעלת הפולינום: $1+2+2+2=7$.