

פתרון בעיות ערך קיצון

מבוא

האפשרות למצוא את הפתרון הטוב ביותר מבין מגוון פתרונות אפשריים לבעיה נתונה היא אחד הביטויים לעצמתה של המתמטיקה. הכלים של החשבון הדיפרנציאלי הם מן הכלים המרכזיים בהשגת מטרה זו. בעת פתרון בעיות ערך קיצון התלמידים נחשפים להיבט יישומי רב עצמה של המושגים והכלים של החשבון הדיפרנציאלי שהכירו. מכאן החשיבות הגדולה של הוראת נושא זה, בכל רמות הלימוד. הבלטת האתגר למצוא את הפתרון הטוב ביותר, מאפשרת לבנות את השיעורים בדרך המעוררת סקרנות ועניין ולהמשיך ולתרגל חקירה של פונקציות מכל הסוגים, בתוך הקשר משמעותי המעמיק את ההבנה.

למרות החשיבות הרבה של הנושא, תלמידים רבים חווים קושי בהתמודדות עם בעיות ערך קיצון. קשיים בהבנת הנקרא, קשיים אלגבריים, והקושי להגדיר משתנים ולייצג בעזרתם את נתוני הבעיה משותפים לפתרון בעיות ערך קיצון ולפתרון בעיות מילוליות אחרות. קשיים אחרים, למשל, הקושי לראות סרטטים המופיעים בנתוני השאלה כסרטטים דינמיים, הם ייחודיים לבעיות ערך קיצון.

החלק המרכזי של הפרק בנוי כאוסף פעילויות שכל אחת מהן מתמקדת במטרה מרכזית, כגון:

- הדגשת המטרה של פתרון בעיית ערך קיצון - מציאת הפתרון הטוב ביותר מבין מגוון פתרונות אפשריים.
- הדגשת הדינמיות של סרטטים המופיעים בין נתוני השאלה.
- הצגת אפשרויות שונות למנף שאלות רגילות הנמצאות בכל ספר לימוד, כדי לעודד תלמידים לשאול שאלות, על מנת להדגיש נקודות עדינות ולעורר סקרנות ועניין.
- הצגת פתרונות בדרכים שונות בכלים של החשבון הדיפרנציאלי, במטרה לאפשר דיון ביתרונות ובחסרונות של כל אחת מדרכי הפתרון, להעשיר את ארגז הכלים של התלמידים, ולפתח גמישות בבחירת דרך הפתרון.
- הצגת דרכים נוספות, מלבד הכלים של החשבון הדיפרנציאלי, למציאת הפתרון הטוב ביותר.
- הצגת דרכי התמודדות עם מספר קשיים שתלמידים חווים בעת למידת הנושא, כגון, כפל תפקידים של המשתנה החופשי בבעיות בפונקציות וגרפים, מציאת תחום ההגדרה של פונקציית המטרה, והפעלת שיקולים שונים כדי לקבוע שאכן מצאו נקודות קיצון **מוחלט**.

בכל הפעילויות, הפונקציה שאת המינימום או המקסימום שלה מחפשים נקראת כאן "פונקציית המטרה".

אגדה עתיקה¹



פובליוס וירגיליו מארוס, מגדולי המשוררים של רומא העתיקה, מספר ביצירתו "איניאידה" על מנוסתה של הנסיכה הפיניקית דידו מפני אחיה. בהגיעה לקרתגו, שטחה בפני המושל בקשה צנועה: דידו ביקשה לרכוש חלקת אדמה שניתן להקיף באמצעות עור של פר. כשבקשתה נענתה, חתכה דידו את עור הפר לרצועות דקות, קשרה אותן זו לזו, והקיפה חלקה בצורת עיגול. כעבור 2600 שנה הוכח בצורה מתמטית שמכל הצורות בעלות היקף נתון, הצורה ששטחה מקסימלי היא עיגול.

¹ מבוסס על לטנר וזיסקין (1998) ועל טיחומירוב (2000).

יסודות מתמטיים בפתרון בעיות ערך קיצון

פתרון בעיות ערך קיצון בכלים של החשבון הדיפרנציאלי דורש מיומנויות כלליות של פתרון בעיות מילוליות, ומיומנויות הקשורות לחקירת פונקציות ולמציאת נקודות קיצון מוחלט בתחום הפונקציה. היסודות המתמטיים הקשורים במציאת נקודות קיצון מוחלט, בכלים של החשבון הדיפרנציאלי, הוצגו בהרחבה בפרקי הספר הקודמים. נחזור כאן על עיקרי הדברים.

מציאת קיצון מוחלט של פונקציה ממשית בתחום הגדרתה - עיקרי הדברים

- מבחינים בין שני סוגים של נקודות קיצון: נקודות קיצון מקומי ונקודות קיצון מוחלט. כל נקודת קיצון מוחלט היא גם נקודת קיצון מקומי אבל לא להפך.
 - אם תחום ההגדרה של פונקציה רציפה הוא קטע סגור, יש לפונקציה מינימום מוחלט ומקסימום מוחלט. (ייתכן שהקיצון המוחלט מושג בקצות הקטע).
 - נקודת קיצון מקומי פנימית של הפונקציה, שבה הפונקציה גזירה, היא בהכרח נקודת אפס של הנגזרת.
 - לא כל נקודת אפס של הנגזרת היא נקודת קיצון. כדי לוודא שנקודת אפס של הנגזרת היא נקודת קיצון, וכדי לקבוע את סוג הקיצון, יש לבצע בדיקות נוספות.
 - כדי למצוא נקודות קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בתחום סגור, שהיא גזירה בכל נקודה פנימית של התחום, די לבדוק את ערכי הפונקציה בקצות תחום ההגדרה ובנקודות האפס של הנגזרת, ולקבוע היכן מתקבל הערך הגדול ביותר, והיכן מתקבל הערך הקטן ביותר של הפונקציה.
 - נקודות בתחום ההגדרה של פונקציה בהן הפונקציה אינה גזירה, יכולות אף הן להיות נקודות קיצון (מקומי או מוחלט). לכן, אם יש בתחום ההגדרה של הפונקציה נקודות אי-גזירות שלה, החיפוש אחר נקודות קיצון (מקומי או מוחלט) של הפונקציה, צריך לכלול גם נקודות אלה בין הנקודות החשודות כנקודות קיצון.
 - אם תחום ההגדרה של פונקציה רציפה אינו קטע סגור, הקיום של נקודות קיצון מוחלט אינו מובטח. בפרט נכון הדבר כשתחום ההגדרה של הפונקציה הוא קטע פתוח, קטע פתוח באחד הקצוות, או קרן.
 - אם לפונקציה שתחומה קשיר, (קטע, קרן, או ישר המספרים כולו) יש נקודת קיצון פנימית **יחידה**, אז נקודה זו היא נקודת קיצון מוחלט.
- להלן תיאור תהליך אופייני לפתרון בעיות ערך קיצון. התהליך מתייחס לבעיות שניתן לפתור באמצעות חקירה של פונקציה רציפה בתחום קשיר.
- תהליך הפתרון של בעיות ערך קיצון, בכלים של חשבון דיפרנציאלי, מבוסס על שלושה שלבים עיקריים: (1) בניית פונקציית מטרה, (2) חיפוש נקודות חשודות כנקודות קיצון, (3) בדיקה אם הנקודות החשודות הן נקודות קיצון מוחלט וקביעת סוג הקיצון.

תהליך הבנייה של פונקציית המטרה כולל:

- ↔ זיהוי של משתני הבעיה וחשיפת הקשרים ביניהם.
- ↔ בחירת משתנה חופשי (בלתי תלוי).
- ↔ ביטוי כל המשתנים התלויים באמצעות המשתנה החופשי ובניית פונקציית המטרה.
- ↔ קביעת התחום של פונקציית המטרה. קביעת התחום של פונקציית המטרה כרוכה לפעמים בהחלטה אם לכלול בו, בדרך כלל משיקולי נוחיות, גם נקודות קצה, אף כאשר מבחינת נתוני הבעיה ערכיהן מתאימים למקרים קיצוניים מנוונים, שאינם יכולים להתרחש במציאות.

תהליך החיפוש אחר נקודות חשודות כנקודות קיצון של פונקציית המטרה כולל:

- ↔ מציאת הפונקציה הנגזרת של פונקציית המטרה.
- ↔ מציאת נקודות האפס של הנגזרת, השייכות לתחום ההגדרה של פונקציית המטרה, בתור חשודות כנקודות קיצון.
- ↔ הוספת נקודות קצה של תחום ההגדרה של פונקציית המטרה (אם יש כאלה) ונקודות בתחום זה בהן הפונקציה אינה גזירה (הנגזרת אינה קיימת) לנקודות החשודות כנקודות קיצון.

תהליך הבדיקה של הנקודות החשודות כנקודות קיצון כדי לאתר נקודות של קיצון מוחלט:

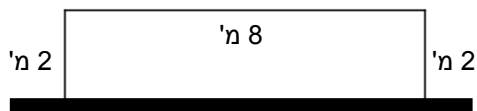
- ↔ כאשר תחום ההגדרה של פונקציית המטרה הוא קטע סגור די למצוא את ערך הפונקציה בכל אחת מהנקודות החשודות כנקודות קיצון, ועל-ידי השוואתם לקבוע היכן מתקבלים ערכי הקיצון המוחלט (נוח לעשות זאת באמצעות טבלת ערכים).
- ↔ כאשר תחום ההגדרה של פונקציית המטרה אינו קטע סגור, יש, ראשית, לבדוק אם הנקודות החשודות כנקודות קיצון הן אכן נקודות קיצון. נקודת קיצון יחידה של פונקציה רציפה בתחום קשיר היא תמיד נקודת קיצון מוחלט. אם לפונקציה יש יותר מנקודת קיצון אחת, בדרך כלל, יש לבצע חקירה מלאה של הפונקציה בתחום הגדרתה.
- ↔ לפעמים ניתן לקצר את תהליך הבדיקה של הנקודות החשודות כנקודות קיצון באמצעות שיקולים המתבססים על תכונות מוכרות של פונקציית המטרה (כמו, מונוטוניות, זוגיות), או על נקודות ידועות (כמו, למשל, נקודת קדקוד של פרבולה, או נקודת קיצון של פונקציה טריגונומטרית מוכרת).

פעילות 1: מחיפוש אינטואיטיבי ובדיקת דוגמאות לבניית פונקציית מטרה

הצעה לפתיחת הנושא

פעילות הפתיחה מכוונת להבלטת המטרה בפתרון בעיות ערך קיצון - מציאת הפתרון הטוב ביותר מבין הפתרונות האפשריים לבעיה.

החצר הגדולה ביותר



איור 1

גל רוצה לבנות חצר מלבנית לכלבו, שתהיה צמודה לקיר לבנים ארוך בקצה החצר. לרשותו של גל גליל גדר רשת באורך 12 מ'. אחת מצלעות המלבן היא קיר הלבנים, ולכן הגדר צריכה להספיק לשלוש צלעות של המלבן.

אחת האפשרויות של גל להקים את הגדר היא כמתואר באיור 1. האם זו האפשרות הטובה ביותר? מהו השטח הגדול ביותר של חצר שגל יכול לבנות בדרך זו?

כדי להבין את מהות הבעיה, כדאי לפתוח בתהליך שבו התלמידים מציעים פתרונות אפשריים ללא כלים של חשבון דיפרנציאלי. הדיון בשאלה איך נדע שבידנו הפתרון הטוב ביותר יכול להוביל באופן טבעי אל הכלים של החשבון הדיפרנציאלי, או אל כלים אחרים, כמו, מציאת קדקוד של פרבולה.

בנוסף על חיפוש הפתרון הטוב ביותר, חשוב שפעילות הפתיחה תדגיש מרכיבים חשובים של הנושא: ייצוג משתני הבעיה באמצעות פונקציית מטרה, קביעת תחום פונקציית המטרה מתוך נתוני הבעיה, בחירה נוחה של המשתנה החופשי, הצורך לאמת שקיבלנו מקסימום מוחלט של הפונקציה ועוד.

שתי הפעילויות שלאחר פעילות זו (פעילות 2 ופעילות 3) מציגות שני כיוונים להרחבת פעילות הפתיחה.

הפעלת הכיתה בשיעור פתיחה – הצעת מהלך והערות דידקטיות

מהלך השיעור המוצע מכון לאסוף הצעות רבות, לבחור את ההצעה הטובה מביניהן, ולדון בשאלה איך אפשר להיות בטוחים שבידנו ההצעה הטובה ביותר.

שאלות מקדימות קצרצרות כגון "מי מכם מגדל בעל חיים?", "איזה בעל חיים אתם מגדלים?", "היכן הוא גר?" מאפשרות לפעמים לשנות במקצת את הבעיה המוצגת לתלמידים, ולבסס אותה על סיפור אמיתי של תלמיד מהכיתה.

כדאי לבקש מהתלמידים, ביחידים או בקבוצות, להעלות 3 הצעות לבניית החצר לכלב, תוך ניצול כל אורך הגדר. הבקשה להעלות 3 הצעות נועדה להבטיח מתן שהות, שבה גם תלמידים פחות מהירים יצליחו להעלות לפחות הצעה אחת, וכדי שייוצר אוסף גדול מספיק של הצעות להמשך הדיון.

למרות שהשאלה עוסקת במציאת החצר הגדולה ביותר האפשרית בתנאים הנתונים, כדאי, בעת הדיון, לבקש מהתלמידים להציע גם חצר ששטחה קטן ככל האפשר. כך יגדל מגוון ההצעות.

שטח	צלע חזיתית	צלע צדדית
16	8	2
18	6	3
16	4	4
10	10	1
5.5	11	0.5
$S(x) = x(12 - 2x)$	$12 - 2x$	x

טבלה 1

בשלב הראשון כדאי לסרטט את ההצעות על הלוח, ולרשום בכל סרטוט את שטח החצר המתאימה לסרטוט (לדוגמה, ראו איור 1).

כשנאספו מספר הצעות כדאי לארגן את התוצאות בטבלה כדוגמת טבלה 1.

בניית עמודה גם לצלע הצדדית וגם לצלע החזיתית, נועדה כדי לעורר אחר כך את השאלה איזו צלע נוח יותר לבחור כמשתנה חופשי בפונקציית המטרה, וגם כדי להביא בחשבון את שתי הצלעות בשעת קביעת תחום ההגדרה של פונקציית המטרה. קביעת התחום של פונקציית המטרה נעשית תוך שמירת העיקרון שכל משתנה המייצג גודל פיסי חייב להיות חיובי. (בהמשך אפשר

יהיה לדון באפשרות להרחיב את פונקציית המטרה ולכלול בו, בדרך כלל משיקולי נוחיות, גם נקודות קצה, אף כאשר מבחינת נתוני הבעיה ערכיהן מתאימים למקרים קיצוניים מנוונים, שאינם יכולים להתרחש במציאות.)

כדאי לעודד את התלמידים, גם בעת מילוי הטבלה, להציע עוד ועוד הצעות כדי לקבל שטח גדול ככל האפשר, וכדי לקבל שטח קטן ככל האפשר. חיפוש אפשרויות שונות המקיימות את תנאי הבעיה, נותן תחושה אינטואיטיבית של בניית פונקציה ושל קיום מגבלות תחום.

אפשר לסרטט גרף של הפונקציה על-פי הנתונים.

את המקסימום של פונקציית המטרה אפשר למצוא בכלים של החשבון הדיפרנציאלי, או על-ידי מציאת נקודת הקדקוד של הפרבולה המתאימה לפונקציית המטרה.

חשוב לציין את הצורך בבדיקה שהפתרון שמצאנו הוא בתחום הפונקציה ושהוא המקסימום המוחלט שלה. במקרה הנוכחי האישור לכך שנקודת הקיצון היא מקסימום מוחלט, נובע מתכונת הפונקציה הריבועית עם מקדם שלילי ל- x^2 .

התשובה לבעיה: החצר הגדולה ביותר שגל יכול לבנות בנתוני הבעיה, היא חצר שבה צלעות המלבן הצדדיות באורך 3 מ' כל אחת, והצלע החזיתית המאונכת להן היא באורך 6 מ'. שטח חצר זו הוא 18 מ"ר.

שתי הפעילויות הבאות (פעילות 2 ופעילות 3) מציגות שני כיוונים להרחבת פעילות זו. פעילות 2 מציגה הרחבה של הפעילות באמצעות הצגת שאלות חדשות, המתפתחות זו מתוך זו על בסיס הבעיה שבמרכז הפעילות הנוכחית. פעילות 3 מציעה דרכים לפתרון שתיים מן הבעיות המוצגות בפעילות 2 בסביבת תוכנה המשלבת גאומטריה דינמית ומחולל גרפים.

פעילות 2: הצמחת בעיות

חלק מהבעיות שתלמידים פותרים בשיעורי המתמטיקה נתפסות בעיניהם כלא רלוונטיות או לא חשובות. לכן חשוב לאפשר לתלמידים לפתור בעיות שהם עוררו או היו שותפים בבנייתן.

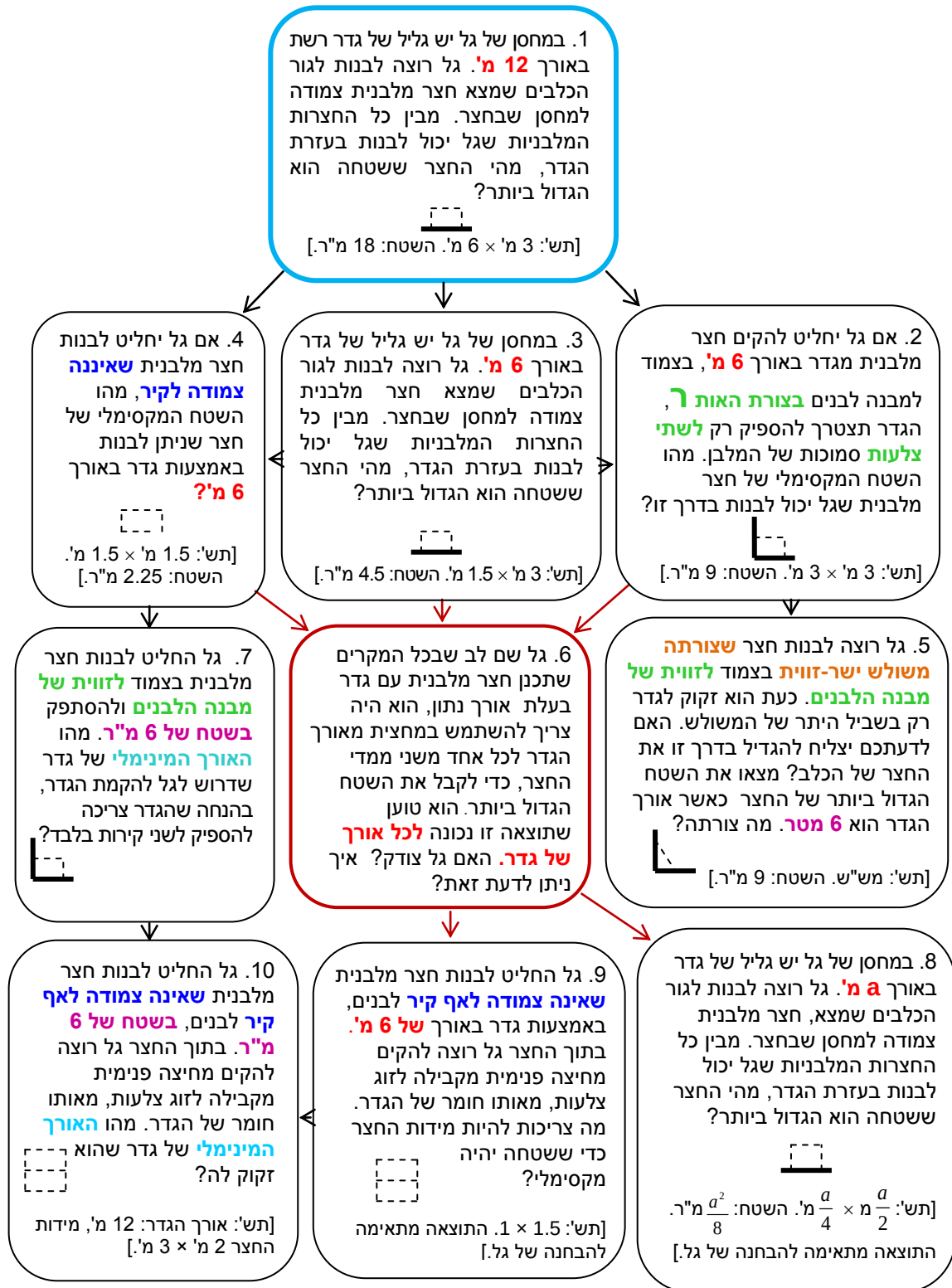
הפעילות הנוכחית מציגה השתלשלות אפשרית של בעיות שיכולות לצמוח בכיתה מן הבעיה שהוצגה בפעילות 1 (ראו תרשים 1). אפשר לשנות את הבעיה המקורית על-ידי שינוי אורך הגדר המשמשת לבניית החצר לכלב (בעיה 3), על-ידי שינוי צורת המבנה אליו מוצמדת הגדר (בעיה 2), אופן הצמדת המבנה לקיר (בעיה 4), צורת החצר (בעיה 5) וכו'. אפשר לבנות בעיות נוספות גם על-ידי קיבוע שטח החצר, וחיפוש דרך לתכנן חצר כך שאורך הגדר הדרושה להקמתה הוא מינימלי (בעיה 7). כל בעיה חדשה היא בעצמה מקור להצמחה של בעיות חדשות על-ידי המורה והתלמידים.

הצמחת בעיות זו מתוך זו, תוך כדי מהלך השיעור, יכולה להאיר באור נוסף את הבעיה המקורית, לעורר סקרנות ועניין בפתרון הבעיה החדשה, לקשר בין בעיות שונות, לסייע במציאת קווי דמיון בין הפתרונות ולעודד ניסוח הכללות. החיפוש אחר הכללות מאפשר גם לשלב באופן טבעי שימוש בפרמטרים. ניתן ורצוי לעודד תלמידים להיות שותפים בתהליך של הצמחת הבעיות.

רוב הבעיות המוצגות בתרשים 1 הן פשוטות ומתאימות גם לכיתות שלומדות מתמטיקה בהיקף 3 יחידות לימוד. בכיתות אלו יש יתרון לבעיות מתפתחות, שמצד אחד יוצרות סקרנות ומצד שני דרגת הקושי של הבעיות יכולה להתפתח באופן מאוד הדרגתי.

הערות לתרשים 1

- מספרי הבעיות מופיעים בתרשים רק כדי להקל על ההתייחסות לבעיות בדיון זה, ואינם רומזים על סדר מומלץ של שימוש בכיתה בבעיות אלה.
- התרשים נועד להראות על כיוונים מגוונים לבניית בעיות על בסיס בעיה נתונה. בחירת הבעיות תלויה במטרת ההוראה, באוכלוסיית התלמידים, וגם בשאלות שתלמידים מעלים תוך כדי השיעור. חץ שחור מוביל אל כיוון אפשרי להרחבת הבעיה.
- החצים האדומים בתרשים מציגים אפשרות לדון בהשערה שיכולה להתעורר כתוצאה מזיהוי של תכונה משותפת של התשובות לשאלות הראשונות.



תרשים 1

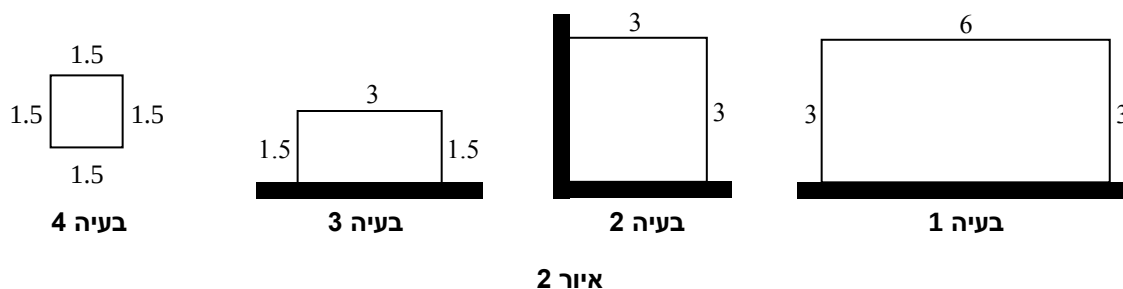
- החצים האדומים העליונים מובילים להבחנה המוצגת במסגרת האדומה, שתיקרא בהמשך "ההבחנה של גל": בכל המקרים 1 - 4 צריך להשתמש במחצית הגדר לבניית קירות החצר בכל אחד משני ממדיה (רוחב ואורך).
 - החצים האדומים התחתונים מובילים אל דרכים שונות לפרש ולבדוק את ההבחנה של גל. בדרך הראשונה (בעיה 8) מנסחים את השאלה עם פרמטר. בדרך השנייה (בעיה 9) משנים את השאלה על-ידי בניית מחיצה נוספת באחד הממדים. בשני המקרים פתרון הבעיה החדשה מתאים להבחנה של גל.
- ניתן להצמיח מתוך סידרת בעיות זו גם בעיות עם היבטים כלכליים, אם מוסיפים מידע על מחיר ההקמה של קירות החצר בחזית ובצדדים, ומחפשים חצר ששטחה נתון ומחיר הקמתה מינימלי, או חצר בעלת שטח מקסימלי במחיר נתון.

מבחר תשובות, פתרונות והערות

הערות לבעיה 6

גל מבחין בתכונה שמשותפת לפתרונות של הבעיות 1 - 4. בכל הבעיות הללו נתון אורך הגדר הוא קבוע (6 מ'), אך צורת החצר משתנה כתוצאה משינוי בנתוני השאלה. הסרטוטים שלהלן מציגים, לכל אחת מהבעיות 1 - 4 את צורת החצר ששטחה מקסימלי ואת מידותיה (איור 2).

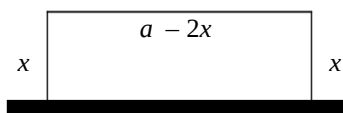
בכל המקרים הנ"ל השטח המקסימלי של החצר מתקבל כאשר משתמשים במחצית מאורך הגדר לבניית הקירות בכל אחד משני ממדי החצר. למשל, בבעיה 3, מחצית מאורך הגדר משמשת לבניית שני קירות, הקיר המזרחי והקיר המערבי ($1.5 + 1.5$ מ) והמחצית השנייה מאורך הגדר משמשת לבניית קיר אחד - הקיר הצפוני של החצר (3 מ').



זיהוי תופעה זו ("ההבחנה של גל") במקרים אחדים יכול לעורר עניין בשאלה האם היא מקרית או שהיא רומזת על תופעה כללית. החיפוש אחרי תשובה לבעיה 6 יכול להביא לניסוח וחקירה של בעיות חדשות, ולשימוש בפרמטרים, שנולד מתוך צורך המתעורר באופן טבעי. אחד מכיווני החקירה האפשריים מופיע בבעיה 8.

פתרון בעיה 8

אורך הגדר: a מ'.



איור 3

נסמן ב- x את אורך כל אחד משני הקירות המקבילים של החצר המלבנית. אורך הקיר השלישי: $a - 2x$ (איור 3).

פונקציית המטרה (שטח החצר): $S(x) = x(a - 2x)$, תחום ההגדרה:

$$0 < x < \frac{a}{2} \text{ הוא קטע פתוח.}$$

נוח להוסיף לתחום פונקציית המטרה גם את נקודות הקצה של הקטע, המתאימות למקרים מנוונים,

$$\text{ולחקור פונקציה המוגדרת בקטע הסגור } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

נמצא נקודות קיצון מקומי של $S(x)$ בכלים של חשבון דיפרנציאלי:

$$S'(x) = a - 4x, \quad S'(x) = 0 \Rightarrow a - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{4}$$

$$S''(x) = -4 < 0, \quad \text{לכן } x = \frac{a}{4} \text{ היא נקודת מקסימום מקומי.}$$

כיוון שתחום הפונקציה הוא קטע סגור, כדי למצוא את המקסימום המוחלט שלה בקטע זה, יש להשוות בין הערכים $S(0)$, $S\left(\frac{a}{4}\right)$, $S\left(\frac{a}{2}\right)$. ניעזר בטבלה הבאה.

x	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$
$S(x)$	$0(a - 2 \cdot 0) = 0$	$\frac{a}{4} \left(a - 2 \cdot \frac{a}{4} \right) = \frac{a^2}{8}$	$\frac{a}{2} \left(a - 2 \cdot \frac{a}{2} \right) = 0$
	מינימום מוחלט	מקסימום מוחלט	מינימום מוחלט

טבלה 2

השטח המקסימלי של החצר הוא $\frac{a^2}{8}$ מ"ר. הוא מתקבל כשאורך הקיר בחזית החצר שווה $\frac{a}{2}$ מ',

ואורך של כל אחד מהקירות הצדדיים שווה $\frac{a}{4}$ מ'.

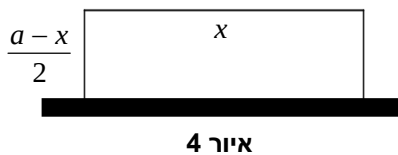
חקירת הבעיה עם פרמטר מספקת תמיכה להבחנה של גל: לבניית החצר בעלת השטח הגדול ביותר דרושה מחצית מאורך הגדר לכל אחד מהממדים - רוחב ואורך.

הערות

⇐ ניתן למצוא את המקסימום המוחלט של פונקציית המטרה גם על סמך העובדה שפונקציה זו היא פונקציה ריבועית עם מקדם שלילי ל- x^2 .

⇐ התחום של פונקציית המטרה הוא תחום סגור רק אם מוסיפים לתחום את קצות הקטע המתאימים למקרים מנוונים. חשוב, לפחות בראשית הוראת הנושא, להגדיר תחילה את התחום כתחום פתוח, **ולאחריו אותו על-** ידי הוספת המקרים המנוונים. ניתן להצדיק הרחבה זו בשיקולי של נוחות החקירה של פונקציה בקטע סגור.

⇐ בחירת משתנים באופן שונה מובילה לאותו פתרון אך מתוך פונקציית



$$0 \leq x \leq a, S(x) = \frac{x(a-x)}{2} \quad \text{מטרה אחרת בעלת תחום הגדרה שונה:}$$

נשאיר את המשך הפתרון לקורא.

פתרון בעיה 9

אורך הגדר: 6 מ'. לחצר יש צורת מלבן עם מחיצה (איור 5).

נסמן: x - אורך אחת מצלעות המלבן המקבילה למחיצה.

$$\text{אורך הצלע המאונכת למחיצה: } \frac{6-3x}{2}$$

פונקציית המטרה (שטח הגדר): $S(x) = x(3-1.5x)$, תחום ההגדרה: $0 \leq x \leq 2$ (מדוע?).

לאחר השלמת כל הצעדים הדרושים לחקירה מתקבל הפתרון: $x=1$. השטח הגדול ביותר, מתקבל כאשר אורך הקיר הצדדי של החצר הוא מטר אחד.

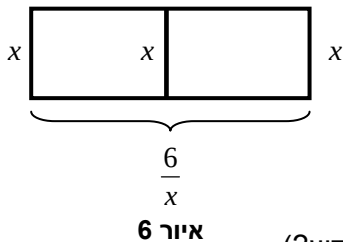
נשים לב, שגם במקרה זה הפתרון שהתקבל תואם את ההבחנה של גל בבעיה 6. כדי לבנות חצר בעלת שטח הגדול ביותר, צריך להשתמש במחצית מאורך הגדר לבניית הקירות "הצפוני והדרומי" של החצר (1.5 מ' + 1.5 מ'); ובמחצית מאורך הגדר לבניית הקירות "המזרחי והמערבי" (1 מ' + 1 מ' + 1 מ').

פתרון בעיה 10

נתון: שטח החצר, שצורתה מלבן עם מחיצה, הוא 6 מ"ר.

נסמן: x - אורך אחת מצלעות המלבן המקבילות למחיצה.

$$\text{אורך הצלע המאונכת למחיצה: } \frac{6}{x}$$



פונקציית המטרה (אורך הגדר): $L(x) = 3x + \frac{12}{x}$, תחום ההגדרה: $0 < x < \infty$ (מדוע?).

$L'(x) = 3 - \frac{12}{x^2}$. נשווה את הנגזרת ונקבל שנקודת קיצון יחידה בתחום ההגדרה היא $x=2$.

קל לבדוק באמצעות הנגזרת השנייה או באמצעות טבלת ערכים ש- $x = 2$ היא נקודת מינימום מקומי. תחום ההגדרה של הפונקציה אינו קטע סגור ($0 < x$), אך מאחר ו- $x = 2$ היא נקודת קיצון יחידה של פונקציה רציפה בתחום קשיר, ניתן לקבוע שהיא נקודת מינימום מוחלט.

לאחר השלמת כל החישובים הדרושים נגיע לפתרון הבעיה: האורך המינימלי של גדר החצר הדרושה

$$\text{מתקבל כאשר מידות החצר הן } x = 2 \text{ מ' ו- } \frac{6}{x} = 3 \text{ מ' והוא שווה } 12 \text{ מ' } (2 \times 3 + 3 \times 2).$$

בעיה זו מאפשרת הרחבה נוספת להשערה של גל: גם בבעיה זו, בה חיפשנו מלבן בעל היקף מינימלי בין כל המלבנים בעלי שטח קבוע, מתקבל פתרון שבו מחצית מאורך הגדר נחוצה לבניית הקירות בכיוון אחד ("צפוני ודרומי", $3 \text{ מ'} + 3 \text{ מ'}$) והשאר לקירות בכיוון האחר, כולל המחיצה ("מזרחי ומערבי", $2 \text{ מ'} + 2 \text{ מ'}$).

הרחבה לבעיה כלכלית

גל רוצה להקים חצר מלבנית בשטח של 9 מ"ר . צלע אחת של המלבן צמודה לקיר של מבנה, ואת 3 הצלעות האחרות עליו להקים. עלות ההקמה של מטר גדר בצדי החצר (הצלעות הסמוכות לקיר המבנה) כפולה מעלות ההקמה של מטר גדר בחזית (הצלע שמול קיר המבנה).

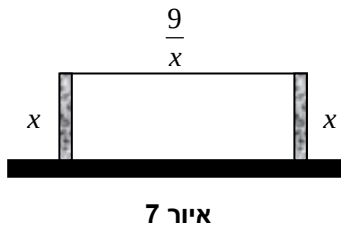
מהן מידות החצר שניתן לבנות בתנאים אלה במחיר מינימלי?

פתרון

נסמן: מחיר הקמת הגדר בחזית החצר הוא A שקלים,

ומחיר הקמת קיר צדדי - $2A$ שקלים.

בחירת משתנים - אורך קיר צדדי: x ; אורך קיר חזיתי: $\frac{9}{x}$.



פונקציית המטרה (עלות הגדר): $m(x) = \frac{9}{x} \cdot A + 2 \cdot 2A \cdot x = \frac{9A}{x} + 4Ax$, תחום הגדרה: $0 < x$.

$$m'(x) = \frac{-9A}{x^2} + 4A$$

לאחר גזירה, איפוס הנגזרת, ואימות שהנקודה החשודה היא מינימום מוחלט, מקבלים שעלות החצר

$$\text{היא מינימלית כאשר: } x = 1.5 \text{ ו- } \frac{9}{x} = 6.$$

הפעם מידות החצר אינן מתאימות להבחנה של גל.

לעומת זאת אפשר לראות שעלות הקמת הקירות הצדדיים של החצר שווה לעלות הקמת הגדר בחזית - $6A$.

האם זה מקרי?

פעילות 3: שימוש בטכנולוגיה להמחשת הפתרון הטוב ביותר בבעיות ערך קיצון

לעתים קרובות תלמידים מתקשים לתפוס את האופי הדינמי של סרטוטים המופיעים בבעיות ערך קיצון. קושי זה מאפיין בעיקר את ההיכרות הראשונה עם הנושא. חלק מהתלמידים שמתנסים בעבודה עם גאומטריה דינמית מדווחים שהבנת הדינמיות של הסרטוט היוותה בשבילם אבן דרך בהתמודדות עם בעיות ערך קיצון.

השפע והמגוון של אמצעים טכנולוגיים ידידותיים וזמינים מאפשרים למורה להמחיש באופנים שונים את מציאת הפתרון הטוב ביותר בבעיות ערך קיצון, החל משימוש בגיליון אלקטרוני ועד לשימוש בתוכנה של גאומטריה דינמית ובמחולל גרפים.

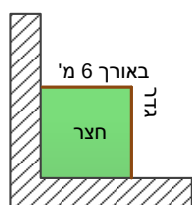
השימוש בתוכנה הדינמית ממחיש איך משתנים כל משתני הבעיה בעקבות שינוי של המשתנה החופשי, ומאפשר גם לסרטוט את הגרף של פונקציית המטרה באמצעות גרירת נקודה במערכת צירים. את הגרף של פונקציית המטרה ניתן לסרטוט גם באמצעות מחולל גרפים. שילוב של סרטוט גרף באמצעות מחולל גרפים ובאמצעות תוכנה של גאומטריה דינמית, במהלך פתרון אותה הבעיה, תורם לחשיפת קשרים בין המושגים השונים ויכול להוסיף עניין והנאה לשיעור.

האפשרויות לעשות שימוש בתוכנה דינמית כאשר עוסקים בבעיות ערך קיצון הן מגוונות ותלויות בגורמים רבים, כמו: מיומנויות השימוש בתוכנה של המורה ושל התלמידים, רמת ההעמקה המתאימה לכיתה, הצורך של התלמידים בהמחשה ומגבלות הזמן. נרחיב על כך בהמשך, בהערות לפעילות זו.

פעילות זו מדגימה מספר אפשרויות למינוף ההוראה של בעיות ערך קיצון, על-ידי שימוש בתוכנה של גאומטריה דינמית המשלבת מחולל גרפים. הקוראים מוזמנים להתנסות בבניית הסרטוטים הדינמיים המתוארים בפעילות זו, ובסרטוטים דינמיים נוספים המודגמים בפעילויות נוספות בפרק.

הערה

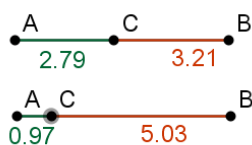
הסרטוטים הדינמיים המופיעים בפרק סורטו באמצעות התוכנה ²geogebra. כל ההנחיות לבניית סרטוטים דינמיים מתאימות לשימוש בתוכנה זו. יתכן ושימוש בתוכנה אחרת מצריך שינויים קלים בתהליך הבנייה. בדרך כלל, התנסות בשימוש בתוכנה גאומטרית דינמית כלשהי מקל מאוד על השימוש בתוכנות מקבילות.



דוגמה 1: מאחורי הבית של גל יש מבנה לבנים בצורת האות Γ . גל מעוניין להקים חצר מלבנית לכלב, בצמוד למבנה הלבנים, כשברשותו גדר רשת באורך 6 מטרים. הגדר דרושה רק עבור שתי צלעות סמוכות של המלבן (ראו איור 8).

מהו השטח המקסימלי של חצר מלבנית שגל יכול לבנות בדרך זו?

איור 8



איור 9

בניית הסרטוט הדינמי

שלב א: המחשת החלוקה של הגדר לשני קטעים

↔ נבנה קטע AB באורך 6 יחידות.

↔ נקבע נקודה C על הקטע AB.

² <http://www.geogebra.org/cms/>

- ↔ נצבע כל אחד מהקטעים AC ו- CB בצבע שונה ונסמן, באמצעות התוכנה, ליד כל קטע את אורכו.
 ↔ נשנה את המיקום של הנקודה C לאורך הקטע. אורכם של הקטעים AC ו- CB ישתנה בהתאם. (איור 9)

שלב ב: בניית הסרטוט הדינמי הממחיש את הבעיה

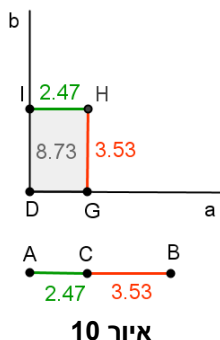
- ↔ נבנה שני קטעים מאונכים, a ו- b הממחישים את מבנה הלבנים. נסמן את קדקוד הזווית הישרה ב- D .
 ↔ נקצה על a קטע DG באורך AC .

- ↔ נקצה על b קטע DI באורך CB .

- ↔ נשלים את בניית המלבן.

- ↔ נמצא את שטח המלבן באמצעות כלי מדידת השטח של התוכנה ונציג אותו על המסך.

- ↔ הזזה של הנקודה C לאורך הקטע AB משנה את אורכי צלעות המלבן ואת שטחו, ומאפשרת לשער שהמלבן בעל השטח הגדול ביותר הוא ריבוע שאורך צלעו 3 מ'.



שלב ג: בניית הגרף של פונקציית המטרה

אפשר לסרטט את גרף פונקציית המטרה באמצעות מחולל הגרפים על-ידי כתיבת הביטוי האלגברי המתאים לה בחלון הפונקציות. כאן נתאר בנייה של גרף פונקציית המטרה המתקבלת באופן ישיר מתוך הסרטוט הדינמי. אופן הבנייה של הגרף ישירות מן הסרטוט דורש היכרות עם התוכנה, ואינו אחיד בכל התוכנות. סרטוט ישיר של הגרף מאפשר לראות, במקביל להשתנות של הסרטוט הדינמי, כאשר משנים את המשתנה החופשי AC , גם את התנועה של הנקודה המתאימה על גרף הפונקציה.

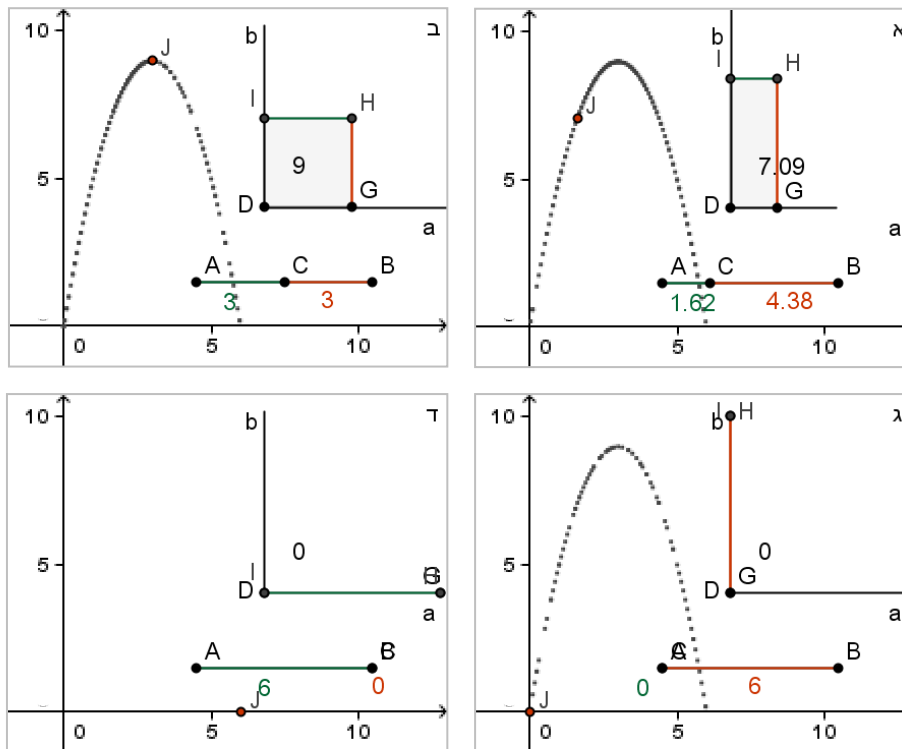
- ↔ נסמן במערכת הצירים נקודה J ששיעור x שלה הוא אורך הקטע AC , ושיעור y שלה הוא שטח המלבן. זוהי נקודה כללית על הגרף של פונקציית המטרה. בתוכנה geogebra, למשל, רושמים את שיעורי הנקודה כזוג סדור בחלון הקלט. למשל, אם אורך הקטע AC מיוצג על-ידי משתנה a ושטח המלבן מיוצג על-ידי המשתנה S , נרשום בחלון הקלט (a, S) . שמות המשתנים ניתנים על-ידי התוכנה, ואפשר לשנותם אם רוצים.

- ↔ נשתמש באופציה "הפעלת עקבה" (הצבעה על הנקודה ושימוש בעכבר ימני) כדי לראות איך משתנה מיקום הנקודה J במערכת צירים כאשר גוררים את הנקודה C לאורך הקטע AB .

- ↔ גרירת הנקודה C לכל אורך הקטע AB , משאירה במערכת הצירים עקבה בצורת פרבולה. קדקוד הפרבולה $(3, 9)$ הוא ביטוי לכך שהשטח המקסימלי מתקבל כאשר המלבן הוא ריבוע שאורך צלעו 3 מטרים.

- ↔ גרירת הנקודה C עד לקצות הקטע AB או בסמוך מאוד אליהם, מאפשרת להבין את משמעותם של מקרי קצה מנוונים. פעולה זו מזמנת דיון באפשרות לכלול בתחום ההגדרה של פונקציית המטרה גם ערכי x מתאימים למקרי הקצה שלפעמים, כמו הפעם, מייצגים מצב מנוון.

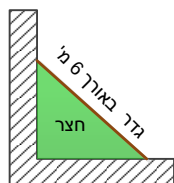
איור 11 מציג ארבעה מסכי מחשב בהם ניתן לראות בעת ובעונה אחת את חלוקת הגדר לשני חלקים, את החצר המתאימה לחלוקה זו ואת הגרף של פונקציית המטרה. בכל גרף ניתן לראות את הנקודה האדומה J שמייצגת את משתני הסרטוט. איור ב מציג את המלבן ששטחו מקסימלי. איורים ג ו-ד מתארים מצבים מנוונים בהם הנקודה C מתלכדת עם אחד מקצוות הקטע AB .



איור 11: ארבעה מסכי מחשב המתארים את ההשתנות של כל משתני הבעיה שבדוגמה 1, כאשר גוררים את הנקודה C לאורך הקטע AB.

הערות

- הבנייה המתוארת בשלב א היא בניית עזר המציגה את חלוקת הגדר של גל לשני חלקים, שכל אחד מהם ישמש צלע של החצר המלבנית. שלב זה ממחיש את מגבלות תחום ההגדרה של פונקציית המטרה. כדאי לבצע בנייה זו גם אם משתמשים בתוכנה המאפשרת לסרטט את החצר ללא בניית עזר
- הדגמת מקרי קצה באמצעות התוכנה הגרפית, יכולה לעורר דיון בשאלה האם ומתי ניתן לכלול בתחום פונקציית המטרה גם ערכי x המתאימים למקרי קצה, אשר לפעמים, כמו בבעיה הנוכחית, מייצגים מצב מנוון.



איור 12

דוגמה 2: גל בודק גם אפשרות לבנות חצר שצורתה משולש ישר-זווית, בצמוד לזווית של מבנה הלבנים. כעת הוא זקוק לגדר הרשת באורך 6 מטר, רק בשביל היתר של המשולש (ראו איור 12).

מהו השטח המקסימלי של חצר שגל יכול לבנות בדרך זו?

בניית הסרטוט הדינמי הממחיש את הבעיה

- נסרטט שני קטעים מאונכים a ו-b המייצגים את קירות הלבנים. נסמן ב-A את הנקודה המייצגת את קדקוד הזווית הישרה של המבנה.
- נסמן על אחד הקטעים נקודה Z כך ש- $AZ = 6$.
- נסמן נקודה C כלשהי בתוך הקטע AZ. נקודה זו מייצגת את אחד הקצוות של הגדר.
- נבנה מעגל ברדיוס 6 יחידות שמרכזו בנקודה C.

↔ נסמן ב- B את נקודת המפגש של המעגל עם הקטע b . קיבלנו משולש ישר-זווית ABC שאורך היתר שלו 6 יחידות.

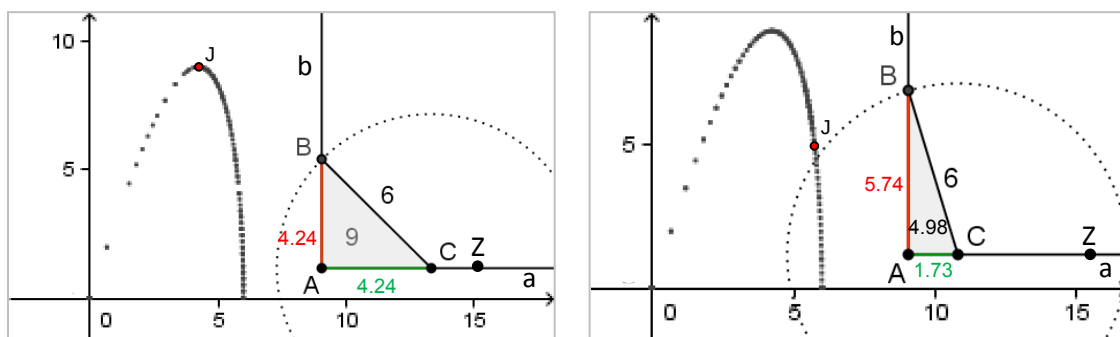
↔ נמצא את שטח המשולש באמצעות כלי מדידת השטח של התוכנה ונציג אותו על המסך.

↔ גרירת C לאורך AZ משנה את אורכי הניצבים. אורך היתר, 6 יחידות, נשמר על-פי הבנייה.

בניית הגרף של פונקציית המטרה

↔ נסמן במערכת הצירים נקודה J ששיעור x שלה הוא אורך הניצב AC , ושיעור y שלה הוא שטח המשולש.

↔ נשתמש באופציה "הפעלת עקבה" כדי לראות איך משתנה מיקום הנקודה במערכת צירים כאשר גוררים את הנקודה C לאורך הקטע AB . בגרירה זו מתקבל הגרף של פונקציית המטרה.



איור 13: שני מסכי מחשב שממחישים את ההשתנות של כל משתני הבעיה שבדוגמה 2 כאשר גוררים את הנקודה C . על המסך מופיע גם הגרף של פונקציית המטרה.

מתוך הגרף מסתמן שגם במקרה שהחצר היא בצורת משולש ישר-זווית השטח המקסימלי הוא 9 מ"ר. **ממש כמו במקרה של חצר מלבנית בדוגמה הקודמת.** פתרון זה מתקבל כאשר המשולש הוא שווה-שוקיים.

כדי לפתור בעיה זו בדרך אלגברית נסמן את אורך הקטע AC ב- x . נבטא את AB באמצעות x :

$AB = \sqrt{6^2 - x^2}$. פונקציית המטרה היא: $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{6^2 - x^2}$ והתחום שלה הוא הקטע הסגור $0 \leq x \leq 6$.

השלמת הפתרון, בכלים של החשבון הדיפרנציאלי מראה שגם במקרה זה השטח המקסימלי הוא 9 מ"ר, והוא מתקבל כאשר יש חצר שווה-שוקיים.

הערה

חשוב לזכור ולהביא לידיעת התלמידים שהמחשב, עקב מגבלותיו, מסרטט גרפים ומבצע חישובים במקורב, ולכן תשובות המתקבלות בעזרת פעילויות במחשב דורשות ביקורת ובדיקה בכלים מתמטיים מדויקים.



במצב זה המשולש הוא שווה שוקיים.



גם ללא שימוש בכלים של חשבון דיפרנציאלי ניתן לראות שהפונקציה $S(x)$ מקבלת בתחום שלה מקסימום מוחלט בקצה התחום $x=0$. לכן השטח המקסימלי של המשולש מתקבל כאשר $x=0$, כלומר, כאשר המשולש הוא שווה-שוקיים.

הערות לפתרון הבעיות שהוצגו

הערה טכנית: חשוב מאוד לבצע את הסרטוטים במערכת צירים קרטזית, שבה היחידות על הצירים אחידות. שימוש במערכת צירים שונה עלול לעוות את הסרטוטים. לכן כאשר רוצים להציג את גרף פונקציית המטרה באותו מסך עם הסרטוט הדינמי, יש **לתכנן מראש את נתוני הבעיה** כך שערכי פונקציית המטרה **יתאימו לגודל המסך**.

תוכנה גאומטרית דינמית להמחשת פתרון בעיות ערך קיצון - אפשרויות ואתגרים

⇐ שימוש בתוכנת גאומטריה דינמית ובכלים טכנולוגיים נוספים, כמו גיליון אלקטרוני, יכול לעזור לתלמידים לתפוס את הדינמיות של נתוני השאלה, להבין את מגבלות תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת משמעותם של מקרי קצה שהם לפעמים מנוונים, לבחון השערות שעולות בשיעור ולגוון את השיעורים. כדי לעשות שימוש מושכל בכלים הטכנולוגיים יש להביא בחשבון, לצד התרומה הרבה שיכולה להיות להם, גם את הקשיים שיכולים להתלוות לשימוש בטכנולוגיה.

⇐ האפשרויות לעשות שימוש בתוכנה דינמית הן מגוונות ותלויות בגורמים רבים, כמו: מיומנויות השימוש בתוכנה של המורה ושל התלמידים, רמת ההעמקה בנושא הלימוד המתאימה לכיתה, הצורך של התלמידים בהמחשה, ומגבלות הזמן.

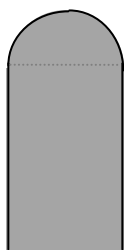
⇐ השימוש בתוכנה דינמית יכול לבוא לפני שפותרים את הבעיה בעזרת כלים אנליטיים / אלגבריים או בעקבות הפתרון האנליטי / אלגברי.

⇐ השימוש בתוכנה דינמית בכיתה יכול להתבצע באופנים שונים:

- הדגמה של המורה באמצעות קובץ מחשב שהוכן מראש.
- בניית הסרטוט הדינמי על-ידי המורה לעיני התלמידים בכיתה.
- הצגת רצף סרטוטים, שהוכנו מראש באמצעות תוכנת גאומטריה דינמית, כדוגמת הסרטוטים המלווים פרק זה.
- התנסות פעילה של תלמידים עם התוכנה. אחת האפשרויות היעילות היא הכנה מראש של קובץ עם הסרטוט הדינמי, המאפשר לתלמידים להתנסות בגרירת נקודות ושינוי הסרטוט במו ידיהם. המשימה של התלמידים יכולה לכלול הוספת פרטים לסרטוט הדינמי.
- נציין כי תלמידים שרכשו ניסיון בעבודה עם תוכנה דינמית בשיעורי גאומטריה, מצליחים גם להכין סרטוטים דינמיים פשוטים בעצמם בקלות ובמהירות לבעיות ערך קיצון.
- משימה: מצאו בעיות נוספות מספרי לימוד המתאימות להמחשה באמצעות כלים טכנולוגיים, ובנו המחשות מתאימות.

פעילות 4: "נחשוב על מקרה פשוט" – בדיקת מקרים פרטיים כצעד בדרך לפתרון

פרמטרים שמופיעים בבעיות ערך קיצון מקשים על הפתרון מסיבות אחדות. אחד הקשיים קשור בחוסר האפשרות לבדוק מקרים פרטיים מספריים. פעולה שיכולה לעזור לתלמידים להבין את מהות הבעיה היא לחשוב על מקרה פשוט. עיקרון זה מודגם באמצעות הבעיה הבאה.



איור 16

חלון לנוף

מחוט מתכת דקורטיבי שאורכו a מטרים רוצים להכין מסגרת לחלון, שתהיה מורכבת משלוש צלעות של מלבן, וחצי מעגל שקוטרו הוא הצלע הרביעית של המלבן (ראו איור 16).

מה צריך להיות קוטר המעגל כדי ששטח החלון יהיה מקסימלי?

מהו החלון בעל השטח הגדול ביותר שניתן לבנות בדרך זו?

אחד הקשיים של בעיה זו הוא שאורך החוט אינו נתון מספרית. קושי נוסף טמון בעובדה שגם אם מגדירים באמצעות משתנה את אורך בסיס החלון (צלע המלבן המקבילה לקרקע), עדיין קיים קושי לבטא באמצעות המשתנה את אורך הצלעות האחרות של המלבן. לכן גם מציאת פונקציית המטרה ותחום ההגדרה של הבעיה איננה מידית.

אחת האפשרויות העומדות בפני המורה (והתלמידים) היא להתחיל את תהליך הפתרון מבדיקת מקרים פרטיים, כדרך להבנת הבעיה.

ייצוג הבעיה באמצעות תוכנה גאומטרית דינמית יכול לגשר בין בדיקת המקרים הפרטיים לפתרון הכללי.

נחליף תחילה את הפרמטר במספר, ונחפש את החלון בעל השטח הגדול ביותר, שניתן לבנות בתנאי השאלה, כאשר אורך חוט המתכת הדקורטיבי הוא 12 מטרים.

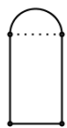
בדיקת מקרים פרטיים

מקרה א: רדיוס המעגל 1 מ'

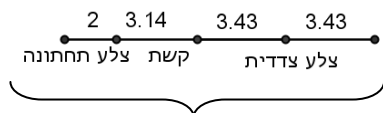
אורך הצלע התחתונה: 2 מ'. אורך חצי המעגל: π מ'.

אורך הצלע הצדדית: $5 - \frac{\pi}{2} = \frac{12 - 2 - \pi}{2}$, בקירוב עשרוני, 3.429 מ'.

$$\text{שטח החלון: } 8.429 \text{ מ}^2 = \underbrace{\left(5 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2}_{\text{מלבן}} + \underbrace{\frac{1^2 \pi}{2}}_{\text{חצי עיגול}}$$



החלון



חוט המתכת

איור 17

באיור 17 מוצג חלק מתוך מסך המחשב המתאר את המקרה שבו אורך חוט המתכת 12 מ' ואורך רדיוס המעגל 1 מ'. בחלון מופיעה בניית עזר שממחישה את חלוקת חוט המתכת לקטעים המקיפים את החלון.

מקרה ב: אורך רדיוס המעגל 2 מ'

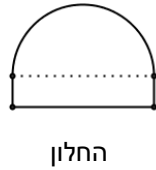
אורך הצלע התחתונה: 4 מ'.

$$\text{אורך חצי המעגל: } \frac{2\pi r}{2} = \pi r = 2\pi$$

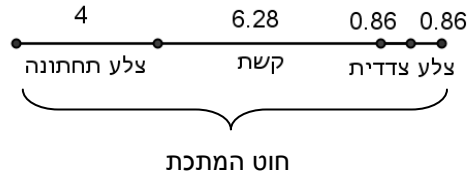
אורך הצלע הצדדית: $4 - \pi = \frac{(12 - 4 - 2\pi)}{2}$, בקירוב עשרוני, $0.86 \approx 0.858$ מ'.

$$\text{שטח החלון: } 9.717 \text{ מ}^2 = \underbrace{(4 - \pi) \cdot 4}_{\text{מלבן}} + \underbrace{\frac{2^2 \pi}{2}}_{\text{חצי עיגול}}$$

איור 18 מציג מסך מחשב המתאר את המקרה שבו אורך חוט המתכת 12 מ', ואורך רדיוס המעגל 2 מ'. לצד החלון מופיעה בניית עזר הממחישה את חלוקת חוט המתכת לקטעים המקיפים את החלון.



החלון



איור 18

מקרה ג: ניסיון לבנות חלון שבו רדיוס המעגל הוא 3 מ'

אם ננסה לבנות מסגרת חלון שבו אורך רדיוס המעגל הוא 3 מטרים, נראה כי אורך החוט אינו מספיק, כיוון שדרושים יותר מאשר 12 מטרים לצלע התחתונה ולחצי המעגל בלבד.

פתרון הבעיה

הגדרת המשתנים וייצוג המשתנים התלויים על-ידי ביטויים אלגבריים:

רדיוס המעגל: x .

הצלע התחתונה של המלבן: $2x$.

אורך הקשת: πx .

אורך הצלע הצדדית של המלבן: $6 - x - \frac{\pi x}{2}$.

$$2x \left(6 - x - \frac{\pi x}{2} \right) + \frac{\pi x^2}{2} = 12x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{\pi x^2}{2} = 12x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$$

שטח החלון: מלבן חצי עיגול

$$S(x) = 12x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$$

מציאת תחום הפונקציה:

כל המשתנים המתארים חלקים של החלון חייבים להיות חיוביים.

$x > 0$, כדי להבטיח חיוביות של אורך צלע המלבן התחתונה ושל אורך חצי המעגל.

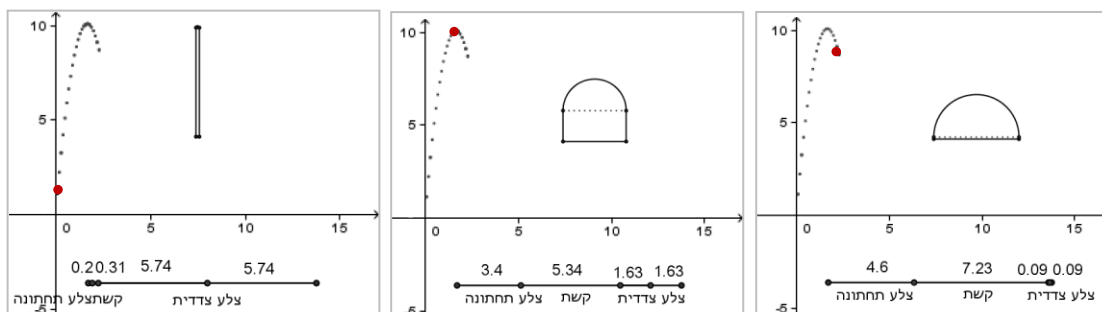
כדי להבטיח שגם הצלע הצדדית חיובית נדרוש: $6 - x - \frac{\pi x}{2} > 0$, כלומר, $x < \frac{12}{2 + \pi}$.

ומכאן שתחום הפונקציה הוא: $0 < x < \frac{12}{2 + \pi}$.

נחזור לפונקציית המטרה. הנגזרת שלה מתאפסת כאשר $x = \frac{12}{4 + \pi} = 1.680$ מ'. נקודת האפס של

הנגזרת התקבלה בתחום הפונקציה. כיוון שפונקציית המטרה היא פונקציה ריבועית עם מקדם שלילי ל- x^2 , הנקודה שמצאנו היא נקודת מקסימום מוחלט בתחום הפונקציה. השטח המקסימלי של החלון הוא: כ- 10.1 מ"ר.

איור 19 מציג מסכי מחשב המתקבלים בתוכנת גאומטריה דינמית, המאפשרת לראות, לצד הסרטוטים, גם את הגרף של פונקציית המטרה.



איור 19: ייצוגים שונים של הבעיה "חלון לנוף" על מסך המחשב.

א. x קרוב לקצה הימני של התחום ב. x קרוב לנקודת הקיצון ג. x קרוב לקצה השמאלי של התחום

פתרון הבעיה הכללית שבה אורך חוט המתכת נתון באמצעות פרמטר

הפעם נסמן את אורך חוט המתכת ב- a .

רדיוס המעגל: x .

הצלע התחתונה של המלבן: $2x$.

אורך הקשת: πx .

אורך הצלע הצדדית של המלבן: $\frac{a - 2x - \pi x}{2}$.

$$\text{שטח החלון: } 2x \left(\frac{a - 2x - \pi x}{2} \right) + \frac{\pi x^2}{2} = ax - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{\pi x^2}{2} = ax - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$$

$$\text{פונקציית המטרה: } S(x) = ax - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}, \quad 0 < x < \frac{12}{2 + \pi}$$

הנגזרת $S'(x) = a - 4x - \pi x$. מתאפסת כאשר $x = \frac{a}{4 + \pi}$. ומהשיקולים שהוצגו קודם זו נקודת מקסימום מוחלט

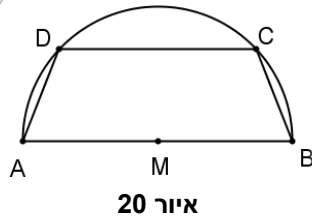
של הפונקציה.

הערות

- פתרון בעיה עם פרמטר, בצמוד לבעיה מקבילה שבה מחליף מספר את הפרמטר, יכול להקל על התלמידים בפתרון הבעיה הכללית.
- ניתן להמליץ לתלמידים לאמץ את האסטרטגיה של הצבת מספר במקום הפרמטר, בשלב הראשון של הפתרון, בכל פעם שהם מתקשים לפתור בעיה עם פרמטר. אחרי פתרון הבעיה המספרית, פתרון הבעיה הפרמטרית הוא הרבה יותר פשוט.

פעילות 5: החופש בבחירת המשתנה החופשי של פונקציית המטרה

לעתים פתרון של בעיה אחת בדרכים שונות תורם יותר מאשר פתרון של מספר בעיות. בפרט, הדבר נכון כאשר הפתרונות השונים מתבססים על מושגים מתמטיים שונים. פתרון בדרכים שונות מאפשר לקשר בין תחומים ומושגים של המתמטיקה, ומסייע לתלמידים לפתח גמישות מחשבתית המאפשרת להם לבחון מספר גישות, ולבחור את היעילה והמתאימה מביניהן לבעיה שבידיהם.



בחצי מעגל שאורך מחוגו 4 ס"מ חוסמים טרפז, כך שבסיסו הוא קוטר המעגל. מבין כל הטרפזים שניתן לחסום באופן זה בחצי מעגל, מצאו את הטרפז בעל השטח המקסימלי ואת שטחו.

בעיה זו ניתנת לפתרון במגוון דרכים. בפעילות זו נציג:

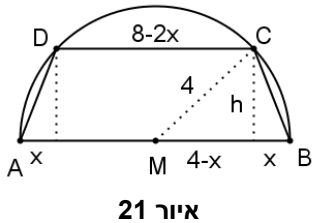
↔ שלוש דרכי פתרון, שמקשרות שלושה תחומי מתמטיקה, וכולן בכלים של החשבון הדיפרנציאלי.

↔ שלוש נקודות מבט על הפתרון המתקבל.

דברים שרואים מכאן
לא רואים משם...

↔ דיון באופנים שונים להצגת הבעיה לתלמידים.

פתרון א



טרפז החסום במעגל הוא טרפז שווה-שוקיים (מדוע?). הגבהים מקדקודי הבסיס העליון מחלקים את הטרפז למלבן ושני משולשים חופפים.

נסמן ב- x את היטל שוק הטרפז על הבסיס.

נוריד גובה מהקדקוד C ונסמנו ב- h . נבטא את הגובה באמצעות x :

$$\text{על-פי משפט פיתגורס: } h = \sqrt{4^2 - (4-x)^2} = \sqrt{8x - x^2}.$$

$$\text{פונקציית המטרה היא שטח הטרפז: } S(x) = \frac{1}{2}(8 + (8-2x))\sqrt{8x - x^2} = (8-x)\sqrt{8x - x^2}.$$

תחום פונקציית המטרה (כאשר מביאים בחשבון גם מקרי קצה מנוונים) הוא $0 \leq x \leq 4$.

עלינו למצוא את המקסימום המוחלט של הפונקציה $S(x)$ בקטע הסגור $0 \leq x \leq 4$.

תחילה נמצא את נקודות האפס של הנגזרת $S'(x)$ בתוך הקטע $0 \leq x \leq 4$:

$$S'(x) = -\sqrt{8x - x^2} + \frac{(8-2x)(8-x)}{2\sqrt{8x - x^2}} = \frac{2x^2 - 20x + 32}{\sqrt{8x - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 8$$

בקטע $0 \leq x \leq 4$ לנגזרת $S'(x)$ יש נקודת אפס אחת $x = 2$. נמצא את ערך פונקציית המטרה בנקודה זו ובקצות

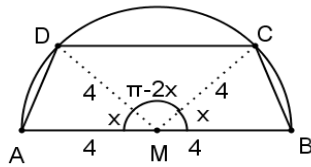
הקטע: $S(4) = 16, S(0) = 0, S(2) = 12\sqrt{3}$. מכאן נסיק כי הנקודה $x = 2$ היא נקודת המקסימום המוחלט של

פונקציית המטרה בתחום $0 \leq x \leq 4$. השטח המקסימלי של הטרפז, $S = 12\sqrt{3}$ סמ"ר, מתקבל כאשר אורך

היטל השוק של הטרפז על הבסיס הגדול הוא 2 ס"מ.

פתרון ב

נסרטט רדיוסים MC ו- MD .



איור 22

נסמן ב- x את המידה ברדיאנים של הזוויות המרכזיות הנשענות על שוקי הטרפז.

מידת הזוויות המרכזיות הנשענות על הבסיס הקטן היא $\pi - 2x$.

נסמן את שטחי המשולשים AMD , DMC , CMB ב- S_1 , S_2 , ו- S_3 .

$$S_1 = S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \sin x = 8 \sin x$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \sin(\pi - 2x) = 8 \sin(\pi - 2x)$$

שטח הטרפז (פונקציית המטרה):

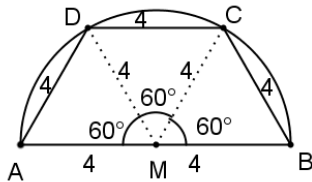
$$S(x) = 2 \cdot 8 \sin x + 8 \sin(\pi - 2x) = 16 \sin x + 8 \sin(\pi - 2x)$$

תחום פונקציית המטרה (כשמביאים בחשבון גם מקרי קצה מנוונים) הוא: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

הנגזרת: $S'(x) = 16 \cos x - 16 \cos(\pi - 2x)$

איפוס הנגזרת מוביל למשוואה: $\cos x - \cos(\pi - 2x) = 0$

הפתרון היחיד של המשוואה בתחום: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ הוא $x = \frac{\pi}{3}$.

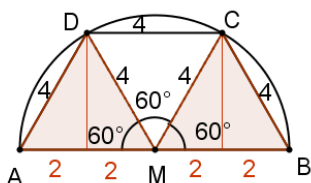


איור 23

השלמת תהליך הפתרון מראה כי בנקודה זו יש לפונקציית המטרה מקסימום מוחלט, $12\sqrt{3}$ סמ"ר $S(x)$.

נחזור ונתבונן בטרפז ששטחו מקסימלי. על-פי הפתרון שקיבלנו השטח המקסימלי של הטרפז מתקבל כאשר קדקודי הבסיס העליון מחלקים את חצי המעגל לשלוש קשתות שוות. הרדיוסים MC ו- MD מחלקים את הטרפז לשלושה משולשים שווים-צלעות.

נוריד מקדקודי הבסיס העליון אנכים לבסיס התחתון, והקשר לפתרון הקודם יתגלה מיד.



איור 24

פתרון ג

נייצג את חצי המעגל כגרף הפונקציה $y = \sqrt{16 - x^2}$. נסמן כ- x

את שיעור ה- x של הנקודה C .

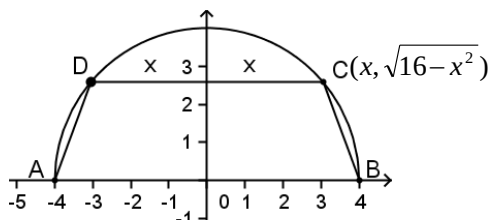
משיקולי סימטריה אורך הבסיס העליון של הטרפז DC הוא $2x$.

גובה הטרפז מיוצג על-ידי שיעור ה- y של הנקודה C .

$$\text{שטח הטרפז } S(x) = \frac{(2x+8)\sqrt{16-x^2}}{2} \text{ המשך}$$

הפתרון מוביל שוב לפתרון $x = 2$, ולאותו הטרפז.

מעניין לשים לב שקיבלנו שוב $x = 2$, הפעם עבור משתנה אחר.



איור 25

הערות

- כדאי לשים לב שגם בפתרון הראשון יכולנו לבחור את x כמחצית הבסיס העליון. בדרך זו חישוב הגובה h נוח יותר מאשר בפתרון א המקורי.
- בפתרון ב חשוב להדגיש כי המשתנה x מתייחס למידת זווית ברדיאנים ולא במעלות. חוקי הנגזרת של הפונקציות הטריגונומטריות תקפים לפונקציות טריגונומטריות ממשיות בהן המשתנה מתייחס למידת זווית ברדיאנים. לאחר חישוב ערך x בו מתקבל המקסימום, נוח לתרגם את התוצאה למעלות ולקשר בין הפתרונות.
- פתרון בעיות בדרכים שונות מסייע לתלמידים לפתח גמישות, ומונע קיבעון ותלות בדרך פתרון אחת ספציפית, שעלולה להיות לא יעילה במקרים מסוימים. לכן לעתים פתרון של בעיה אחת בדרכים שונות תורם יותר מאשר פתרון של מספר בעיות.

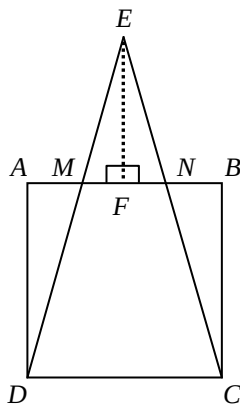
נתון ריבוע $ABCD$ שאורך צלעו 4 ס"מ. נקודה E נמצאת מחוץ לריבוע, כך שמשולש DEC הוא משולש שווה-שוקיים ($DE=CE$). שוקי המשולש חותכות את הצלע AB בנקודות M ו- N .
מה צריך להיות אורך הקטע MN כדי ששכום שטחי המשולשים DAM , CBN ו- MNE יהיה מינימלי?

דרך א: בחירת מחצית MN כמשתנה חופשי מובילה לחקירת פונקציה רציונאלית

כיוון שמשולש MNE הוא שווה-שוקיים, הגובה לבסיס EF הוא גם אנך אמצעי לבסיס. ניתן להראות כי $\triangle EFM \cong \triangle EFN$, $\triangle EFM \cong \triangle EBN$, $\triangle EFM \cong \triangle EBN$ ו- $\triangle DAM \sim \triangle EFM$ (איור 26).

נסמן: $MF = FN = x$

נחשב:



איור 26

$$AM = NB = \frac{4 - 2x}{2} = 2 - x$$

נסמן $EF = y$ ובהתבסס על הפרופורציה בין הצלעות של המשולשים הדומים נבטא גם את y כפונקציה של x .

$$\frac{EF}{AD} = \frac{MF}{AM}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y}{4} = \frac{x}{2 - x}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{4x}{2 - x}$$

כעת נבנה את פונקציית המטרה אותה אנו מעוניינים לחקור:

$$s = S_{\triangle DAM} + S_{\triangle MEN} + S_{\triangle CBN} = 2S_{\triangle DAM} + S_{\triangle MEN}$$

כלומר:

$$s(x) = 2 \cdot \frac{4(2-x)}{2} + \frac{\left(\frac{4x}{2-x}\right)^2 2x}{2} = 4(2-x) + \frac{4x^2}{2-x}$$

$$= \frac{4(2-x)^2 + 4x^2}{2-x} = \frac{16-16x+8x^2}{2-x}$$

תחום פונקציית המטרה: $0 < x < 2$.

כעת נגזור את פונקציית המטרה:

$$s'(x) = \frac{(-16+16x)(2-x) + 16-16x+8x^2}{(2-x)^2} = \frac{-8x^2 + 32x - 16}{(2-x)^2}$$

לאחר שנשווה את הנגזרת לאפס נקבל:

$$-8x^2 + 32x - 16 = 0$$

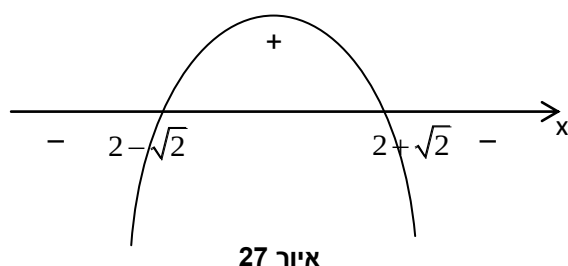
$$x_1 = 2 - \sqrt{2} \quad x_2 = 2 + \sqrt{2}$$

הפתרון $x_2 = 2 + \sqrt{2}$ הוא מחוץ לתחום של פונקציית המטרה.

כדי לאמת שאכן מצאנו נקודת קיצון ולמצוא את סוג הקיצון נתבונן בנגזרת הראשונה ונבחין:

המכנה של הנגזרת $(2-x)^2$ חיובי בכל תחום ההגדרה, ולכן אינו משפיע על סימן הנגזרת. לכן נבדוק את הסימנים של מונה הנגזרת בלבד.

המונה של הנגזרת $-8x^2 + 32x - 16$ הוא ביטוי ריבועי עם מקדם שלילי לחזקה הגבוהה, שמתאפס בנקודות $x_2 = 2 + \sqrt{2}$, $x_1 = 2 - \sqrt{2}$.



נסרטט סקיצה של מונה הנגזרת, ונסיק כי בנקודה $x_2 = 2 - \sqrt{2}$ הפונקציה $s(x)$ עוברת מירידה לעלייה ולכן זו נקודת מינימום.

כיוון שהנקודה היא נקודת קיצון יחידה בתחום קשיר ניתן להסיק שזהו מינימום מוחלט.

לסיכום: על מנת שסכום שטחי שלושת המשולשים יהיה מינימלי אורך הקטע MN צריך להיות: $MN = 2x = 4 - 2\sqrt{2}$.

הערות

- בחרנו לסמן ב- x את MF ולא MN כדי להימנע ככל האפשר מעבודה עם שברים.
- חשוב להדגיש כי רצוי לפשט ככל הניתן את פונקציית המטרה אותה אנו בונים, כדי שבשלב החקירה הביטויים יהיו פשוטים ככל האפשר.
- ניתן היה לאפיין את נקודות הקיצון גם בעזרת טבלה או בעזרת נגזרת שנייה. ההתייחסות הישירה לסימן הנגזרת מקצרת את הפתרון.

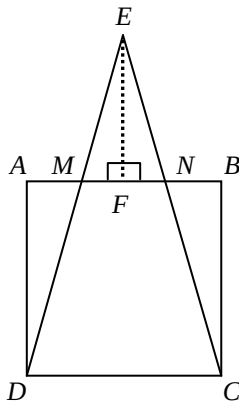
דרך ב: בחירת מחצית הזווית $\angle E$ כמשתנה מובילה לחקירת פונקציה טריגונומטרית

נסמן $\angle MEF = \angle NEF = x$, כך ש- $\angle E = 2x$, כאשר x מייצג את מידת הזווית ברדיאנים.

חישוב שטחי המשולשים (ניעזר באיור 26).

נסמן ב- α זווית $\angle ADM$. במשולש ADM מתקיים: $AM = 4 \tan \alpha$

$$S_{\triangle DAM} = \frac{AD \cdot AM}{2} = \frac{4 \cdot 4 \tan \alpha}{2} = 8 \tan \alpha$$



איור 28

$$MN = 4 - 8 \tan \alpha \Rightarrow MF = 2 - 4 \tan \alpha \quad \text{מכאן:}$$

היות והזוויות $\angle ADM$ ו- $\angle MEF$ שוות, המידה הרדיאנית של זווית α היא x ולכן $MF = 2 - 4 \tan x$. במשולש MEF מתקיים:

$$EF = \frac{MF}{\tan x} = \frac{2 - 4 \tan x}{\tan x}$$

ולכן:

$$S_{\triangle AMNE} = \frac{MN \cdot EF}{2} = \frac{(4 - 8 \tan x) \cdot \frac{(2 - 4 \tan x)}{\tan x}}{2} = \frac{(2 - 4 \tan x)^2}{\tan x} = \frac{4}{\tan x} + 16 \tan x - 16$$

נחבר את שטחי המשולשים ונקבל פונקציית מטרה:

$$s(x) = S_{\triangle DAM} + S_{\triangle NBC} + S_{\triangle MNE} = 2S_{\triangle DAM} + S_{\triangle MNE} = \frac{4}{\tan x} + 32 \tan x - 16$$

כעת נגזור את פונקציית המטרה ונקבל:

$$s'(x) = -\frac{4}{\cos^2 x \tan^2 x} + \frac{32}{\cos^2 x} = \frac{32}{\cos^2 x} - \frac{4}{\sin^2 x}$$

נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל:

$$\begin{aligned}s'(x) &= \frac{32}{\cos^2 x} - \frac{4}{\sin^2 x} = 0 \\ \tan^2 x &= \frac{1}{8} \\ \tan x &= \pm \frac{1}{\sqrt{8}}\end{aligned}$$

פתרונות המשוואה (ברדיאנים): $x_1 = 0.34 + \pi k$ $x_2 = -0.34 + \pi k$.

הפתרון היחיד בתחום הפונקציה הוא $x = 0.34$. נמיר את התוצאה למעלות ונקבל $x = 19.47^\circ$.

ניתן להראות בעזרת טבלת ערכים או בדרכ אחרת שאכן עבור ערך זה מתקבל מינימום מוחלט.

כעת נחשב את MN :

$$MN = 4 - 8 \tan x = 4 - \frac{8}{\sqrt{8}} = 4 - 2\sqrt{2}$$

גם בדרכ זו קיבלנו:

על מנת לקבל שסכום שטחי שלושת המשולשים יהיה מינימלי אורך הקטע MN צריך להיות $4 - 2\sqrt{2}$.

הערות

- למרות שמידות הזווית לא באות לידי ביטוי בפונקציית המטרה, חשוב, בעת הדיון בכיתה, להדגיש שהמשתנה x מייצג מידת זווית ברדיאנים, למצוא את מידת הזווית ברדיאנים, ורק בשלב האחרון להמיר את המידה למעלות.
- גם כאן פישוט הפונקציה לפני הגזירה מקל על תהליך הפתרון.
- ניתן לחשב את שטח המשולש EFM גם באמצעות המשפט "יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון":

$$\Delta DAM \sim \Delta EFM$$

$$\frac{S_{\Delta EFM}}{S_{\Delta DAM}} = \left(\frac{MF}{AM} \right)^2$$

$$\frac{S_{\Delta EFM}}{8 \tan \alpha} = \left(\frac{2 - 4 \tan \alpha}{4 \tan \alpha} \right)^2$$

$$S_{\Delta EFM} = 8 \tan \alpha \cdot \left(\frac{2 - 4 \tan \alpha}{4 \tan \alpha} \right)^2 = \frac{8 \tan \alpha \cdot 4 \cdot (1 - 2 \tan \alpha)^2}{16 \tan^2 \alpha} = \frac{2(1 - 2 \tan \alpha)^2}{\tan \alpha}$$

$$S_{\Delta MNE} = \frac{4(1 - 2 \tan \alpha)^2}{\tan \alpha} = \frac{(2 - 4 \tan \alpha)^2}{\tan \alpha}$$

ומכאן, כמו קודם:

- ניתן כמובן לקצר בחישוב $s'(x)$, על-ידי הצגת $s(x) = 4 \cot x + 32 \tan x - 16$ כ-

ולעשות שימוש בנגזרת הקוטנגנס. כיוון שאין חובה ללמד פונקציה קוטנגנס בתיכון, הפתרון כאן אינו מתבסס עליה.

על דרכים שונות לנסח בעיות ערך קיצון

ניתן להציג בעיות ערך קיצון באופנים שונים, לכל אחת יתרונות וחסרונות. הבעיות יכולות להופיע עם רמזים והדרכה או בלעדיהם. אפשר להנחות את התלמיד בבחירת המשתנה או להשאיר את ההחלטה בידיו. בעיות יכולות להופיע עם או בלי סרטוט. לעתים השאלות מנוסחות כך שהתלמידים צריכים להפעיל שיקול דעת כדי להבחין שלפניהם בעיית ערך קיצון. ההחלטה איך לנסח את השאלות לתלמידים קשורה באוכלוסיית התלמידים, ברמת המיומנות שלהם, ובשיקולים שונים הקשורים למטרות ההוראה.

להלן מגוון אפשרויות להציג את בעיית הטרפז החסום במעגל.

1. הראו כי מכל הטרפזים החסומים בחצי מעגל, כך שהבסיס הגדול של הטרפז מתלכד עם הקוטר, הטרפז בעל השטח הגדול ביותר הוא טרפז שווה-שוקיים שזוויות בסיס שלו בנות 60° .

2. הראו כי מכל הטרפזים החסומים בחצי מעגל, כך שהבסיס הגדול שלהם מתלכד עם הקוטר, הטרפז בעל השטח המקסימלי הוא טרפז שבסיסו הקטן שווה לרדיוס המעגל.

3. נתון חצי מעגל שאורך מחוגו 4 ס"מ. חוסמים במעגל טרפז כך שאחד מבסיסיו הוא קוטר המעגל. הראו כי מבין כל הטרפזים שניתן לחסום בדרך זו בחצי המעגל, הטרפז בעל השטח הגדול ביותר הוא טרפז שאורך הבסיס הקטן שלו הוא 4 ס"מ.

4. בחצי מעגל שמחוגו R חוסמים טרפז כך שאחד מבסיסיו הוא קוטר המעגל. נסמן ב- S את שטח הטרפז.

$$\text{הוכיחו כי: } 0 < S \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

שאלות

א. מנו יתרונות וחסרונות של כל אחת מדרכי ההצגה של הבעיות. כדאי להתייחס בנפרד לכיתות שונות ולשלבים שונים בלמידה.

ב. הציעו דרכים נוספות להציג את הבעיות, ושיקולים מדוע לבחור בדרך שהצעתם.

ג. הציעו בעיות נוספות בהן בחירת המשתנה החופשי יכולה להוביל לפונקציה טריגונומטרית או לפונקציה אחרת.

פעילות 6: פתרון בעיית מספרים – הזדמנות לקישוריות ופריצת תחומי תוכן

משימות שמשולבות בהן הוכחות ויזואליות מגוונות את השיעורים, כיוון שהוכחות אלו הן מעין "חידות ציורים", שלצד ההוכחה המתמטית מזמנות גם את האתגר שבפענוח הסרטוט.

ברוב הפתרונות של הבעיה שבמרכז פעילות זו נעשה שימוש בכלים שאינם קשורים לחשבון דיפרנציאלי, חלקן הוכחות ויזואליות, כמעט ללא מילים.

$$\text{הוכיחו כי } 2 \leq x + \frac{1}{x} \text{ לכל מספר חיובי } x.$$

ניסוח הבעיה, כפי שנוסחה דורש מהפותר לזהות בעצמו את האפשרות להתייחס אל הבעיה כבעיית ערך קיצון. את הבעיה ניתן היה לנסח במילים אחרות, למשל: "מצאו מספר חיובי x כך שהסכום שלו ושל המספר ההופכי שלו מינימלי. מצאו גם את הסכום המינימלי."

פתרון מסורתי בכלים של החשבון הדיפרנציאלי

פונקציית המטרה: $y = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

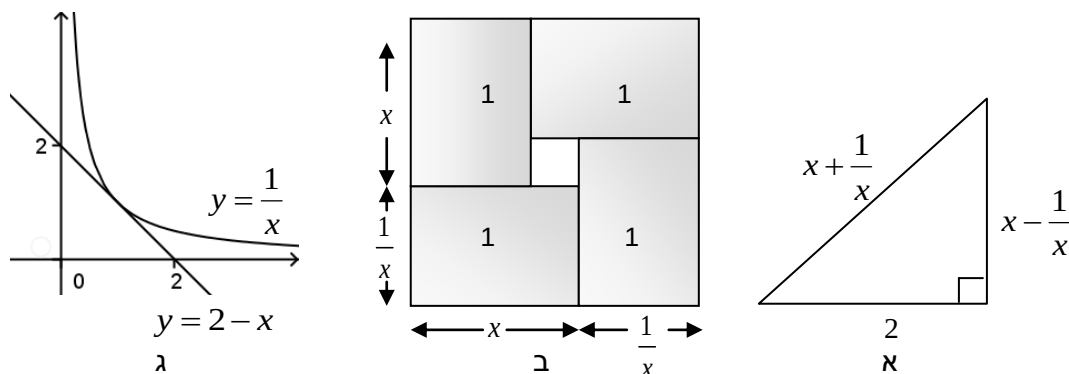
$$y' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

בתחום המבוקש הנגזרת מתאפסת כאשר $x = 1$. השלמת שלבי הפתרון הדרושים מאשרת שזו אכן נקודת מינימום מוחלט של הפונקציה בתחום המבוקש, והערך המינימלי של הפונקציה הוא 2. לכן לכל מספר חיובי x ,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

הוכחות ויזואליות³ ללא כלים של חשבון דיפרנציאלי

בסרטונים שלפניכם מסתתרות שלוש הוכחות לכך ש- $2 \leq x + \frac{1}{x}$ לכל x חיובי. גלו את ההוכחות.



איור 29

הערות ורמזים להוכחה א

הסרטוט מראה דרך לבניית משולשים ישרי-זווית שאחד הניצבים שלהם הוא באורך 2 יחידות. המשולשים שצלעותיהם, 2 , $x - \frac{1}{x}$ ו- $x + \frac{1}{x}$ הם ישרי-זווית כיוון שצלעותיהם מקיימות את משפט פיתגורס. האי-שוויון מתקיים כיוון שבמשולש ישר-זווית היתר גדולה מכל אחד מן הניצבים. חשוב לשים לב שהסרטוט אפשרי רק כאשר בוחרים $x > 1$. במצב המנוון $x = 1$ מתקיים שוויון. לשם המחשה אפשר לבחור ערכים שונים של x ולקבל משולשים ישרי-זווית.

³ מבוסס על נלסון (Nelson, 1933).

הערות ורמזים להוכחה ב

הוכחה ב: במקרה $x \neq 1$, מקבלים ארבעה מלבנים שוני צלעות שצלעותיהם x ו- $\frac{1}{x}$, כמתואר בסרטוט. הם חסומים בריבוע שבמרכזו "חור ריבועי". כיוון ששטח הריבוע גדול מ-4, צלעו גדולה מ-2. במקרה $x=1$ מתקיים $x = \frac{1}{x}$. במצב זה המלבנים הם ריבועים, ומהנחתם, כמתואר בסרטוט, מתקבל ריבוע גדול שצלעו $2x$ ושטחו 4. לכן במצב זה מתקבל שוויון, $x + \frac{1}{x} = 2$.

הערות ורמזים להוכחה ג

לשני הגרפים המתוארים בסרטוט יש נקודת מפגש יחידה, ולכן קל להראות, על-ידי בדיקת ערכי הפונקציות המתאימות בשתי נקודות, משני צדי נקודת המפגש, שלכל $x > 0$ מתקיים $2 - x \leq \frac{1}{x}$.

הוכחות אלגבריות

א. כיוון ששני אגפי האי-שוויון המבוקש חיוביים, נוכיח אי-שוויון שקול שמתקבל על-ידי כפל של שני אגפי המשוואה ב- x .

$$\begin{aligned} 2 &\leq x + \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow 2x &\leq x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x^2 - 2x + 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq (x-2)^2 \end{aligned}$$

ב. הוכחה המתבססת על אי-שוויון הממוצעים:

על-פי אי-שוויון הממוצעים, לכל שני מספרים חיוביים a ו- b מתקיים $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

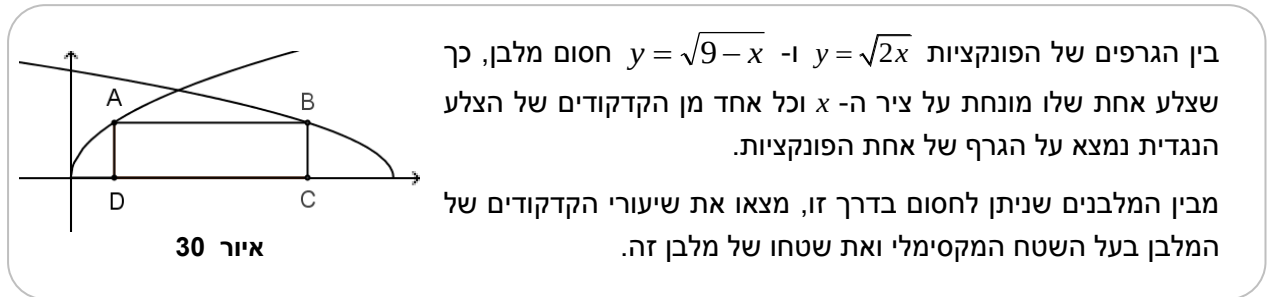
נציב: $a = x$, $b = \frac{1}{x}$ ונקבל את האי-שוויון המבוקש.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 &\geq 0 && \text{ג. נצא מהאי-שוויון:} \\ x - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} &\geq 0 && \text{כאשר } x > 0, \text{ נקבל לאחר פישוט:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2 + \frac{1}{x} &\geq 0 \\ x + \frac{1}{x} &\geq 2 \end{aligned}$$

פעילות 7: בעיות ערך קיצון בפונקציות וגרפים - כפל תפקידים למשתנה

אחד הקשיים הקשורים בפתרון בעיות ערך קיצון בפונקציות וגרפים הוא ההבחנה בין המשתנה של הפונקציה המופיעה בנתוני הבעיה, לעיתים יותר מאשר פונקציה אחת, לבין המשתנה של פונקציית המטרה (למשל, באיור 30 פונקציית היקף המלבן החסום בין הגרפים לבין ציר ה- x).



בין הגרפים של הפונקציות $y = \sqrt{2x}$ ו- $y = \sqrt{9-x}$ חסום מלבן, כך שצלע אחת שלו מונחת על ציר ה- x וכל אחד מן הקדקודים של הצלע הנגדית נמצא על הגרף של אחת הפונקציות. מבין המלבנים שניתן לחסום בדרך זו, מצאו את שיעורי הקדקודים של המלבן בעל השטח המקסימלי ואת שטחו של מלבן זה.

פתרונות והערות דידקטיות

בבעיה זו, כמו בבעיות רבות, יש לנו חופש מסוים בבחירת המשתנה שבאמצעותו נבטא את פונקציית המטרה - את שטח המלבן. ניתן לבחור כמשתנה את שיעור ה- x של הנקודה A , של הנקודה B , או את שיעור ה- y של הנקודות הללו.

בפתרון א נבחר כמשתנה חופשי את שיעור ה- x של הנקודה A , ובפתרון ב נבחר כמשתנה חופשי את שיעור ה- y של הנקודות A ו- B .

פתרון א

בשלב הראשונים של הפתרון כדאי לציין את הנקודה אליה מתייחסים, לצד שיעורי ה- x וה- y של הנקודות. נסמן ב- x_A את שיעור ה- x של הנקודה A ונבטא באמצעותה את צלעות המלבן. בחירת x_A כמשתנה מדגישה את המיקום הדינמי של הקדקוד A .

כיוון שהקדקוד A נמצא משמאל לנקודת מפגש הגרפים, מתקיים: $0 < x < 3$. אם נוסיף לתחום הפונקציה את המקרים המנוונים בהם אחת מצלעות המלבן מצטמצמת לנקודה אחת, נקבל את התחום $0 \leq x_A \leq 3$. לפי הסרטוט מתקיים:

$$\begin{aligned} AD &= BC = \sqrt{2x_A} \\ AB &= DC = x_B - x_A \\ \sqrt{9-x_B} &= \sqrt{2x_A} \quad \Leftrightarrow y_B = y_A : x_A \quad \text{נבטא את } x_B \text{ באמצעות } x_A \\ &\quad \text{נעלה בריבוע את אגפי המשוואה ונקבל:} \\ 9 - x_B &= 2x_A \\ x_B &= 9 - 2x_A \\ AB &= x_B - x_A = 9 - 3x_A \\ S(x_A) &= AB \cdot AD = (9 - 3x_A) \sqrt{2x_A} \quad \text{שטח המלבן:} \end{aligned}$$

$$S'(x_A) = -3\sqrt{2x_A} + \frac{2(9-3x_A)}{2\sqrt{2x_A}}$$

מאיפוס הנגזרת ופתרון המשוואה נקבל פתרון יחיד בתחום, $x_A = 1$.

קדקודי המלבן $A(1, \sqrt{2})$, $B(7, \sqrt{2})$, $C(7, 0)$, $D(1, 0)$.

השטח המקסימלי של המלבן, בתנאי הבעיה: $6\sqrt{2}$ יח"ש.

פתרון ב

נבחר כמשתנה חופשי את שיעור ה- y של הנקודות A ו- B . לנוחיות, נסמן אותו ב- t , $0 < t < \sqrt{6}$ (מדוע?) נבטא את שיעורי ה- x של הנקודות A ו- B באמצעות t .

$$\sqrt{2x_A} = t \Rightarrow x_A = 0.5t^2$$

$$\sqrt{9 - x_B} = t \Rightarrow x_B = 9 - t^2$$

$$AB = x_B - x_A = 9 - 1.5t^2$$

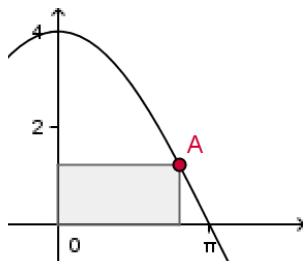
$$S(t) = AB \cdot AC = (9 - 1.5t^2)t = 9t - 1.5t^3$$

אחרי גזירה ואיפוס הנגזרת מקבלים נקודת קיצון יחידה בתחום, $t = \sqrt{2}$, שמובילה, כמובן, למלבן שהתקבל בפתרון א.

הערות

- יחידות האורך, ובהתאם להן גם יחידות השטח, הן היחידות של מערכת הצירים.
- בבעיה הנוכחית, בחירת שיעור y המשותף לשני הקדקודים העליונים של המלבן הובילה לפונקציית מטרה נוחה לגזירה. לפעמים נוח יותר לבחור את שיעור ה- x של נקודה כלשהי כמשתנה החופשי.

הבעיה הבאה והדיון שבעקבותיה נועדו להדגיש את ההכרח להשתמש ברדיאנים בפתרון בעיות ערך קיצון טריגונומטריות.



איור 31

בין גרף הפונקציה $y = 4 \cos \frac{x}{2}$ והצירים, ברביע הראשון, חסום מלבן, כך שקדקוד אחד שלו נמצא על גרף הפונקציה ושלושת הקדקודים האחרים על הצירים. מה צריכים להיות שיעורי הקדקוד שעל גרף הפונקציה כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?

פתרון

נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה A . $0 < x < \pi$.

היקף המלבן: $P(x) = 8\cos\frac{x}{2} + 2x$. זאת פונקציית המטרה שיש למצוא

את המקסימום המוחלט שלה בקטע הפתוח $0 < x < \pi$.

$$P'(x) = -4\sin\frac{x}{2} + 2$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

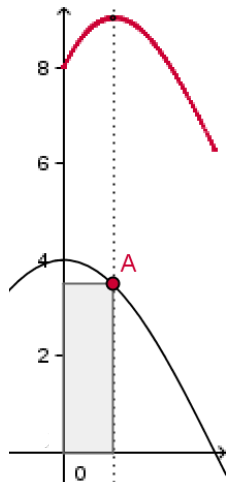
הפתרון היחיד בתחום הוא $x = \frac{\pi}{3}$ (מדוע?).

היות ו- $P''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\frac{\pi}{6} < 0$, הנקודה $x = \frac{\pi}{3}$ היא נקודת מקסימום מקומי של $P(x)$

בתחום $0 < x < \pi$. היות ותחום זה קשיר, פונקציית המטרה רציפה, והנקודה $x = \frac{\pi}{3}$ היא נקודת קיצון מקומי

יחידה בתחום, ניתן להסיק כי $x = \frac{\pi}{3}$ היא גם נקודת מקסימום מוחלט של $P(x)$ בתחום $0 < x < \pi$.

איור 32 מציג את המלבן בעל ההיקף המקסימלי שמתקבל באמצעות תוכנה גרפית דינמית. גרף פונקציית המטרה מופיע באדום.



איור 32

הערות

פתרון של בעיות ערך קיצון כדוגמת הבעיה הנוכחית, יכול להיות הזדמנות לשוב ולעסוק בהגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות. למרבית התלמידים המעבר לרדיאנים נראה מלאכותי, וקשה לבנות אצלם הבנה עמוקה מדוע הפונקציות הטריגונומטריות מוגדרות באמצעות רדיאנים, ומדוע שימוש בכלים של החשבון הדיפרנציאלי מחייב שימוש ברדיאנים ולא במעלות.

חשוב לעזור לתלמידים להתרגל לכך שהפונקציה מוגדרת בעזרת רדיאנים ולא מעלות. במקרים רבים, כאשר תלמידים חוקרים פונקציות טריגונומטריות, למשל, כאשר הם חוקרים את הפונקציה $y = \sin 2x$, התהליך של גזירה ואיפוס הנגזרת מוביל אותם לתיאור נכון של גרף הפונקציה, ולתחומי עליה וירידה נכונים גם כאשר הם מתייחסים לפונקציה, בטעות, כאילו המשתנה x מייצג זווית במעלות. התיאור הנכון של גרף הפונקציה, שמתקבל למרות תהליך החקירה השגוי, עלול להגביר את הקושי לשכנע תלמידים אלה בצורך להשתמש ברדיאנים.⁴ לכן יש חשיבות רבה לעסוק גם בפונקציות שבהן יש שילוב של פונקציה טריגונומטרית עם פונקציה שאיננה טריגונומטרית. בבעיה הנוכחית תלמיד שעורך את חישוביו כאילו המשתנה x בפונקציית המטרה $P(x) = 8\cos\frac{x}{2} + 2x$ מייצג זווית במעלות, יקבל תשובה לא נכונה.

⁴ ר' דיון בעמוד 365

הבעיה הבאה מדגימה שימוש בשיקולי סימטריה בחקירת פונקציית מטרה עם ערך מוחלט.

$$f(x) = x^2 + 5x + 7 \text{ נתונה הפונקציה}$$

בנקודה A שעל גרף הפונקציה נעביר לפונקציה משיק. נסמן ב- C את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x . נוריד מהנקודה A אנך לגרף הפונקציה, ונסמן את נקודת החיתוך שלו עם ציר ה- x ב- B . מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A , כדי ששטח המשולש ABC יהיה מינימלי?

פתרון

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A . שיעורי הנקודות A ו- B הם בהתאמה $A(t, t^2 + 5t + 7)$ ו- $B(t, 0)$ (איור 33).

נמצא את משוואת המשיק לפונקציה דרך הנקודה A . שיפוע המשיק לפונקציה שווה לערך הנגזרת בנקודת ההשקה לכן:

$$f'(x) = 2x + 5$$

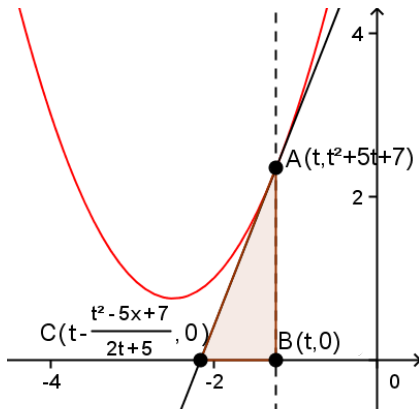
$$m = f'(t) = 2t + 5$$

נקודת ההשקה היא $A(t, t^2 + 5t + 7)$ לכן משוואת המשיק:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (t^2 + 5t + 7) = (2t + 5)(x - t)$$

נמצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .



איור 33

$$y = 0$$

$$0 - (t^2 + 5t + 7) = (2t + 5)(x - t)$$

$$x = t - \frac{(t^2 + 5t + 7)}{(2t + 5)}$$

כלומר, נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x היא $C\left(t - \frac{(t^2 + 5t + 7)}{2t + 5}, 0\right)$.

פונקציית המטרה היא שטח המשולש ABC . נבטא באמצעות t את שטח המשולש ABC .

$$AB = (t^2 + 5t + 7)$$

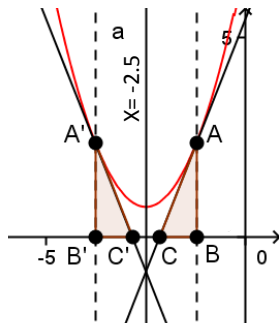
$$BC = \left| t - \left(t - \frac{t^2 + 5t + 7}{2t + 5} \right) \right| = \left| \frac{t^2 + 5t + 7}{2t + 5} \right|$$

ההתמקדות בנקודות שמימין לקדקוד מבטיחה כי BC גודל חיובי.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \left| \frac{(t^2 + 5t + 7)^2}{4t + 10} \right|$$

$$S(t) = \left| \frac{(t^2 + 5t + 7)^2}{4t + 10} \right|$$

אנחנו מחפשים אם כן את המינימום של פונקציית המטרה



איור 34

כדי להימנע מחקירת פונקציה עם ערך מוחלט נתבונן בגרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 5x + 7$, ובמשולשים המתקבלים באופן המתואר בשאלה, כשמעבירים משיקים בשתי נקודות סימטריות ביחס לציר הסימטריה של הפרבולה (איור 34). בנקודת הקדקוד המשיק מקביל לציר ה- x ולכן לא נוצר משולש.

אם A ו- A' הן נקודות על הפרבולה שסימטריות ביחס לישר $x = -2.5$, שהוא ציר הסימטריה של הפרבולה, גם המשיקים לפרבולה בנקודות אלה סימטריים ביחס לישר זה, ולכן המשולשים המתאימים לשתי נקודות אלו הם סימטריים ביחס לישר זה והם שווים שטח.

לכן די למצוא את המקום של נקודה A מימין לנקודת הקדקוד, עבורה שטח המשולש המבוקש הוא מינימלי.

$$S(t) = \left| \frac{(t^2 + 5t + 7)^2}{4t + 10} \right| \quad \text{בתחום } t > -2.5$$

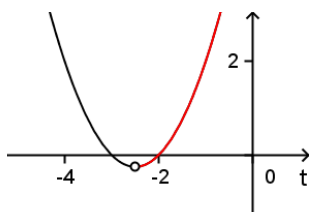
נחפש אם כן, בשלב הראשון את נקודת המינימום של הפונקציה

$$\text{בתחום זה גם המכנה וגם המונה של הביטוי } \frac{(t^2 + 5t + 7)^2}{4t + 10} \text{ חיוביים, ולכן אפשר לוותר על הערך המוחלט.}$$

בהמשך נמצא נקודה נוספת, על הענף השמאלי של הפרבולה, העונה גם היא על דרישות הבעיה. נגזור את הפונקציה:

$$S(t) = \frac{(t^2 + 5t + 7)^2}{4t + 10}$$

$$S' = \frac{2(t^2 + 5t + 7)(2t + 5)(4t + 10) - (t^2 + 5t + 7)^2 \cdot 4}{(4t + 10)^2} = \dots = \frac{12(t^2 + 5t + 7)(t^2 + 5t + 6)}{(4t + 10)^2}$$



איור 35

הנגזרת מתאפסת עבור $t_1 = -3$ $t_2 = -2$

בתחום המבוקש נמצאת הנקודה $t_2 = -2$.

נאמת שמצאנו נקודת מינימום מוחלט:

פונקציית המטרה היא פונקציה רציונאלית לכן בנגזרת המכנה תמיד חיובי.

נתבונן במונה הנגזרת:

הביטוי $12(t^2 + 5t + 7)$ תמיד חיובי (מדוע?)

לכן הביטוי היחיד המשפיע על סימני הנגזרת הוא $t^2 + 5t + 6$.

נצייר סקיצה של הפרבולה המתאימה. נזכור כי אנחנו מתמקדים בתחום $t > -2.5$ (איור 35):

הנגזרת שלילית כאשר $-2.5 < t < -2$ וחיובית כאשר $t > -2$.

מסימני הנגזרת ניתן להסיק כי בנקודה $t = -2$ יש לפונקציה $S(t) = \frac{(t^2 + 5t + 7)^2}{4t + 10}$ מינימום. נקודת קיצון יחידה

בתחום שהוא קרן היא נקודת קיצון מוחלט.

משיקולי סימטריה (ראו איור 34) אם נעביר משיק בנקודה $A'(-3,1)$ שסימטרית לנקודה $A(-2,1)$ ביחס לציר הסימטריה של הפרבולה, נקבל משולש חופף.

נסכם:

כדי ששטח המשולש ABC יהיה מינימלי, קדקוד A צריך להיות באחת מן הנקודות $A(-2,1)$ או $A'(-3,1)$.

הערות

- השימוש במשתנה t כשיעור ה- x של הנקודה A , מאפשר להבחין בין המשתנה החופשי של פונקציית המטרה לבין המשתנה x במשוואת המשיק.
- בפתרון הבעיה נעשה שימוש בתכונת הסימטריה של הפרבולה, כדי לחקור את השתנות שטח המשולש כאשר הנקודה A נעה לאורך הענף החיובי של הפרבולה. אפשרות אחרת היא לחקור את הפונקציה

$$S(t) = \begin{cases} \frac{(t^2 + 5t + 7)^2}{4t + 10} & t > -2.5 \\ -\frac{(t^2 + 5t + 7)^2}{4t + 10} & t < -2.5 \end{cases}$$

במקרה זה יש לחקור את הפונקציה בנפרד בכל אחד מחלקי התחום. החקירה מובילה כמובן לאותן המסקנות.

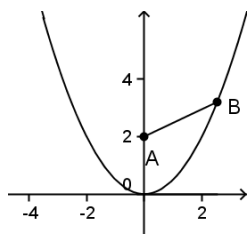
פעילות 8: "מה קורה כאן...?" - על קונפליקט שיכול להתעורר כתוצאה מפתרון לא שלם

תלמידים שפוגשים שוב ושוב בעיות ערך קיצון בהן כל נקודת קיצון פנימית היא נקודת קיצון מוחלט, עלולים לראות בתהליך הבירור אם נקודת הקיצון שמצאו היא נקודת קיצון מוחלט צעד פורמלי, מבלי להיות מודעים לחשיבותו. לכן, מבחר הדוגמאות אליהן תלמידים נחשפים צריך לכלול גם בעיות שבהן נקודות חשודות כקיצון אינן נקודות קיצון מוחלט.

הבעיה שבמרכז הפעילות הנוכחית חשובה כדי להראות ולהדגיש שלפעמים דרושה חקירה של פונקציית המטרה, כדי לוודא שאכן נמצאה נקודת קיצון מוחלט.

בפרט, יש בבעיה פוטנציאל ליצירת קונפליקט קוגניטיבי אצל תלמידים שלא מבררים אם נקודות קיצון שמצאו הן נקודות קיצון מוחלט. חקירה מלאה וסרטוט הגרף של פונקציית המטרה יכולים לשפוך אור על מקור הקונפליקט, ולעזור במניעת טעויות הנובעות מפתרון לא מלא.

בסוף הפעילות מוצגת הצעה להרחיב את הבעיה.



איור 36

המרחק הקצר ביותר

נתונה הפונקציה $y = \frac{1}{2}x^2$.

מצאו את המרחק הקצר ביותר בין גרף הפונקציה לבין הנקודה $A(0,2)$.

פתרון

נסמן $B\left(x, \frac{1}{2}x^2\right)$ נקודה כללית על גרף הפונקציה.

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)^2} : AB \text{ אורך הקטע}$$

כיוון שפונקציית השורש היא פונקציה מונוטונית, אורך הקטע AB מינימלי כאשר הביטוי בתוך השורש מינימלי. לכן נוכל לחסוך עבודה אם נחפש את המינימום המוחלט של הפונקציה שבתוך השורש. למרות שאין זו פונקציית המטרה המקורית, נתייחס אליה בהמשך כאל פונקציית המטרה למען פשטות הניסוח.

אנחנו מחפשים את המינימום המוחלט של הפונקציה:

$$t(x) = x^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 4, \text{ שתחומה הוא כל הישר הממשי.}$$

הנגזרת $t'(x) = x^3 - 2x$ מתאפסת בשלוש נקודות: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, כולן כמובן בתחום הפונקציה.

בדיקה באמצעות הנגזרת השנייה מראה כי: $f''(\sqrt{2}) > 0$, $f''(-\sqrt{2}) > 0$, $f''(0) < 0$.

בדיקה נוספת מגלה שנקודת המינימום היא נקודת מינימום מוחלט, ואילו הנקודות האחרות הן נקודות מקסימום מקומי.

דיון בבעיה עם פוטנציאל ליצירת קונפליקט קוגניטיבי

תלמידים המתעלמים מהצורך למצוא קיצון מוחלט, יגיעו למסקנה (הנכונה, למרות אי-השלמת הפתרון) שהנקודות הקרובות יותר לנקודה A הן: $(\sqrt{2}, 1)$ ו- $(-\sqrt{2}, 1)$, ומרחקן מהנקודה A הוא $\sqrt{3}$. כיוון שאין בשאלה התייחסות למרחק מקסימלי בין הנקודה A לפרבולה, לא צפוי שיחושו קונפליקט קוגניטיבי.

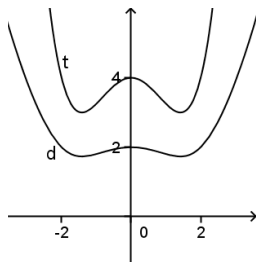
כדי לעורר את הקונפליקט ולדון בפתרוננו כדאי לשאול מה ניתן לומר על הפתרון השלישי: $x = 0$. תלמידים המתעלמים מהצורך למצוא קיצון מוחלט, לפעמים מפרשים פתרון זה כאילו כאשר $x = 0$ אורך הקטע AB מקסימלי. הייתכן?

נחזור ונתבונן בגרף הפונקציה $y = \frac{1}{2}x^2$. קל למצוא על גרף הפונקציה נקודות הרחוקות מ- A יותר

מאשר ראשית הצירים. סביר שלפחות חלק מהתלמידים יחוו קונפליקט שנובע מהפער בין התוצאה שקיבלו באמצעות הכלים של החשבון הדיפרנציאלי (נקודת מקסימום כאשר $x = 0$), לבין מראה עיניהם (הנקודה $(0,0)$) איננה הנקודה הרחוקה ביותר מהנקודה A). הצורך לפתור את הקונפליקט מוביל לדיון שבדיקת סוג הקיצון באמצעות הנגזרת השנייה אינה מספיקה. נקודת קיצון מקומי לא חייבת להיות נקודת קיצון מוחלט, ולכן גם לא תמיד מהווה פתרון לבעיית ערך קיצון.

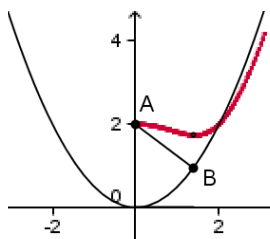
כעת גם נשלים את הפתרון ונראה ששתי נקודות המינימום שמצאנו הן נקודות מינימום מוחלט. הכלים המשמשים ברוב השאלות אינם מתאימים כאן. תחום הפונקציה איננו קטע סגור. גם השיקול על-פיו נקודת קיצון יחידה בתחום קשיר היא נקודת קיצון מוחלט אינו מתאים, כיוון שהפעם קיבלנו **שלוש** נקודות קיצון.

להשלמת הפתרון נשלים את חקירת הפונקציה $t(x)$ שבתוך השורש, ונסרטט את הגרף שלה.



איור 37

איור 37 מציג את פונקציית המטרה $d(x)$ ואת הפונקציה $t(x)$ שבתוך השורש, אותה חקרנו. ניתן לראות ששתי נקודות המינימום הן נקודות מינימום מוחלט, ואילו נקודת המקסימום היא נקודת מקסימום מקומי. הצגת שתי הפונקציות במערכת צירים אחת, בהקשר של פתרון בעיות, גם מחזקת את הבנת הקשרים בין פונקציית השורש לבין הפונקציה שבתוך השורש.



איור 38

איור 38 מציג את הענף הימני של פונקציית המרחק $d(x)$, כפי שהיא מתקבלת בתוכנה של גאומטריה דינמית כאשר גוררים את הנקודה B

לאורך גרף הפונקציה $y = \frac{1}{2}x^2$.



את הבעיה הנתונה אפשר להציג באופנים שונים. לפניכם ניסוחים שונים של השאלה, כולם מתייחסים

לפונקציה הנתונה, $y = \frac{1}{2}x^2$.

מהם היתרונות והחסרונות של כל אחד מן הניסוחים?

א. מהו המרחק הקטן ביותר (אם יש כזה), בין נקודה על גרף הפונקציה לבין הנקודה $A(0,2)$?

ב. מהו המרחק הגדול ביותר (אם יש כזה), בין נקודה על גרף הפונקציה לבין הנקודה $A(0,2)$?

ג. מי הנקודה על גרף הפונקציה שמרחקה מן הנקודה $A(0,2)$ הוא הקטן ביותר האפשרי?

ד. מי הנקודה על גרף הפונקציה שמרחקה מן הנקודה $A(0,2)$ הוא הגדול ביותר האפשרי?

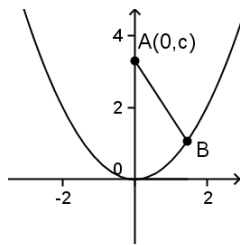
ה. B נקודה על גרף הפונקציה. הראו כי $AB \geq \sqrt{3}$.

הציעו ניסוחים נוספים לשאלה והסבירו את היתרונות של הצעותיכם.

שיקולים אפשריים

- האם אנחנו מעוניינים להכניס לשאלה "סעיפי מדרגה" שיקלו על הפתרון?
- האם אנחנו מעוניינים לרמוז לתלמידים שאולי אין מקסימום מוחלט לפונקציה, או שאנחנו רוצים שהתלמידים יחוו קונפליקט קוגניטיבי על כל המשתמע מכך?

הצעה להרחבת הבעיה



איור 39

מהקיום של נקודת מקסימום מקומית כאשר $x = 0$ נובע, שקיימות על גרף הפונקציה נקודות שקרובות לנקודה A יותר מאשר ראשית הצירים. באופן טבעי עולה השאלה מה יקרה אם נשנה את הנתונים ובמקום הנקודה A נבחר נקודה אחרת על ציר ה- y , ונחפש את הנקודה הקרובה אליה ביותר על גרף הפונקציה.

ניסוח אלטרנטיבי לשאלה זו הוא: "לאילו ערכי C ניתן למצוא על הפרבולה $y = \frac{1}{2}x^2$ נקודות שמרחקן מהנקודה $(0, c)$ גדול ממרחקה של הנקודה $(0, c)$ מראשית הצירים?" מנקודות ראות דידקטית אנו שואלים כיצד ניתן לשנות את נתוני הבעיה תוך שמירה על הפוטנציאל ליצירת קונפליקט קוגניטיבי.

פתרון

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - c\right)^2} : AB \text{ אורך הקטע}$$

הפונקציה בתוך השורש:

$$t(x) = x^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - c\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 - cx^2 + c^2 + x^2$$

$$t'(x) = x^3 - 2Cx + 2x$$

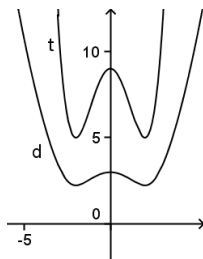
$$t'(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2C + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ או } x^2 = 2C - 2$$

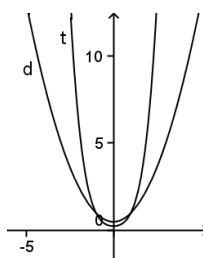
נבחין בין שלושה מקרים:

כאשר $c > 1$ (איור 40) הנגזרת מתאפסת בשלוש נקודות: $x = 0$, $x = \sqrt{2c - 2}$, $x = -\sqrt{2c - 2}$. בדיקה באמצעות הנגזרת השנייה מראה שהנקודה $x = 0$ היא נקודת

מקסימום, ושתי הנקודות האחרות הן נקודות מינימום. כמו בשאלה המקורית, דרושה כאן השלמה של חקירת פונקציית המטרה, כדי להבחין בין נקודות קיצון מוחלט לנקודות קיצון מקומי. כמו בשאלה המקורית מקבלים שנקודות המינימום הן נקודות מינימום מוחלט ונקודת המקסימום היא נקודת מקסימום מקומי.

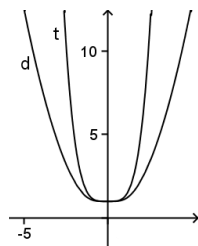


איור 40



איור 41

כאשר $c < 1$ (איור 41) הנגזרת מתאפסת בנקודה $x = 0$ בלבד. בנקודה זו הנגזרת השנייה חיובית. ניתן להסיק שבנקודה $x = 0$ יש לפונקציה מינימום מוחלט. הקטע AB הקצר ביותר מתקבל כאשר B בראשית הצירים. אורך הקטע המינימלי הוא c .



איור 42

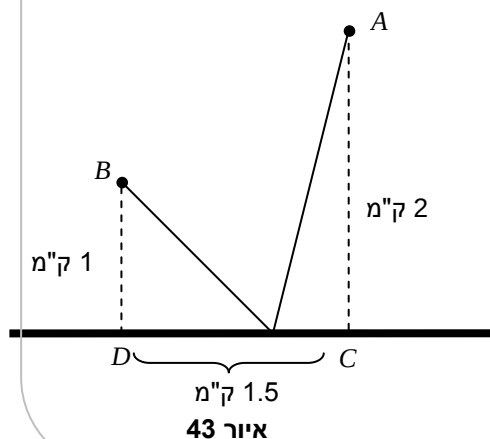
כאשר $c = 1$ (איור 42), $t'(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 0$. הפתרון היחיד הוא $x = 0$. בנקודה זו גם הנגזרת השנייה מתאפסת. בדיקה באמצעות טבלה מראה שבנקודה זו מתקבל מינימום של הפונקציה. כמו במקרים האחרים זהו מינימום מוחלט. גם במקרה זה הקטע AB הקצר ביותר מתקבל כאשר B בראשית הצירים. אורך הקטע המינימלי הוא 1.

פעילות 9: שני פתרונות ושאלה פילוסופית אחת

פעילות זו מציגה בעיה שניתן לפתור אותה בכלים של חשבון דיפרנציאלי וגם בכלים מתחום הגאומטריה, המתבססים על שיקולי סימטריה ועל דמיון וחפיפה של משולשים. הפתרון הגאומטרי, ממנו ניתן ללמוד שהמסלול הקצר ביותר בתנאי הבעיה, מתאים למסלולן של קרני האור המשתקפות במראה, יכול להעלות את השאלה הפילוסופית המהדהדת בדפי הספר של מריו ליביו⁵: "האם אלוהים הוא מתמטיקאי?"

המירוץ אל הקיצון⁶

בחופשת הקיץ הקימו תלמידי חוגי הסיירות של בית הספר "חולות נודדים" שני מחנות אוהלים, בשטח חולי מצדו האחד של כביש ישר. בערב הכינו המדריכים הפתעה והביאו לתלמידים כתב חידה למשחק. התלמידים צריכים לצאת ממחנה A , לרוץ לכביש אל מכונית המדריכים, לקחת את כתב החידה ולרוץ אתו למחנה B . על-פי חוקי בית הספר אסור לתלמידים לצעוד אפילו מטר אחד לאורך הכביש, אלא בשטח החולי בלבד.



איור 43

מחנה A ממוקם במרחק 2 ק"מ מהכביש, ומחנה B במרחק 1 ק"מ מהכביש. נסמן ב- C את הנקודה על הכביש הקרובה ביותר למחנה A . נסמן ב- D את הנקודה על הכביש הקרובה ביותר למחנה B . המדריכים יכולים לחנות רק בחלק הכביש שבין הנקודות D ו- C . המרחק, לאורך הכביש בין הנקודות D ו- C , הוא 1.5 ק"מ.

א. היכן צריכה מכונית המדריכים לעצור, כדי שמסלול הריצה יהיה הקצר ביותר האפשרי?

ב. היכן צריכה מכונית המדריכים לעצור, כדי שמסלול הריצה יהיה הארוך ביותר האפשרי?

פתרון בכלים של חשבון דיפרנציאלי

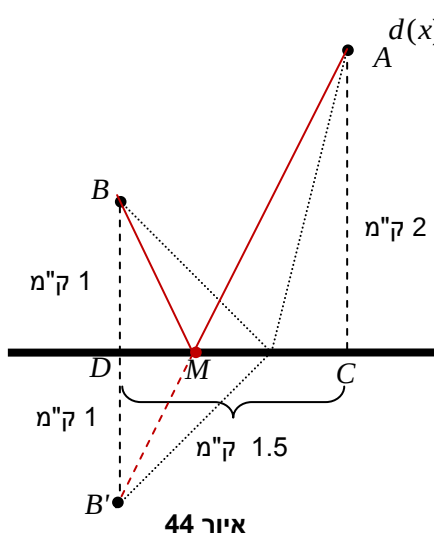
נגדיר כ- x את המרחק מהנקודה C אל מכונית המדריכים. נבטא באמצעות x את הקטעים של מסלול הריצה ואת סכומם.

$$d_A = \sqrt{x^2 + 2^2} \quad d_B = \sqrt{1^2 + (1.5 - x)^2}$$

⁵ ליביו (2010).

⁶ מבוסס על רון וזסלבסקי <http://highmath.haifa.ac.il/images/data2/open2.pdf>.

פונקציית המטרה:



$$d(x) = d_A + d_B = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{1^2 + (1.5 - x)^2} = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{3.25 - 3x + x^2}$$

תחום הפונקציה: $0 \leq x \leq 1.5$

$$d'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} + \frac{-3 + 2x}{2\sqrt{3.25 - 3x + x^2}}$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{3 - 2x}{2\sqrt{3.25 - 3x + x^2}} = 0$$

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{3 - 2x}{2\sqrt{3.25 - 3x + x^2}}$$

$$2x\sqrt{3.25 - 3x + x^2} = (3 - 2x)\sqrt{x^2 + 4}$$

כאשר x בתחום הפונקציה, שני אגפי המשוואה חיוביים. לכן ניתן להעלות את שני אגפי המשוואה בריבוע ללא חשש לקבלת פתרונות זרים.

$$4x^2(3.25 - 3x + x^2) = (3 - 2x)^2(x^2 + 4)$$

אחרי פישוט ופתרון משוואה ריבועית מקבלים כי הפתרון היחיד בתחום הוא $x = 1$.

כיוון שתחום הפונקציה הוא קטע סגור, כדי למצוא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה בקטע זה, יש להשוות בין הערכים $d(1), d(0), d(1.5)$. ניעזר בטבלה.

x	0	1	1.5
$d(x)$	$2 + \sqrt{1^2 + 1.5^2} \approx 3.802$	$\sqrt{1^2 + 0.5^2} + \sqrt{1^2 + 2^2} \approx 3.354$	$1 + \sqrt{2^2 + 1.5^2} \approx 3.5$
מסלול הריצה			
	מקסימום מוחלט	מינימום מוחלט	

טבלה 3

על מנת שמסלול הריצה יהיה הקצר ביותר בין כל המסלולים האפשריים, מכונית המדריכים צריכה לעצור במרחק של קילומטר אחד מהנקודה C. על מנת שמסלול הריצה יהיה הארוך ביותר בין כל המסלולים האפשריים מכונית המדריכים צריכה לעצור בנקודה C.

פתרון גאומטרי

המסלול הקצר ביותר הוא, כמובן, הקטע AB' .

פתרון בעיות ערך קיצון