

הפונקציות הטריגונומטריות

מבוא

המפגש עם הפונקציות הטריגונומטריות מביא עמו חידושים רבים. לראשונה התלמידים פוגשים פונקציות שהן בעת ובעונה אחת מחזוריות, חסומות, סימטריות, ובעלות אינסוף נקודות קיצון ואינסוף נקודות פיתול.

הפונקציות הטריגונומטריות מוגדרות באמצעות מעגל היחידה, כפונקציה של זווית. המפגש עם הפונקציות מביא עמו משמעות חדשה למושג הזווית, ומפגש עם יחידת מידה חדשה לזוויות, יחידה זרה ומוזרה שמחייבת שימוש במספרים אי-רציונליים כדי למדוד זוויות "פשוטות" ואפילו מעגל שלם.

המחזוריות של הפונקציות הטריגונומטריות מאפשרת לתאר ולהבין תופעות בעלות התנהגות מחזורית. העולם הסובב אותנו עשיר בתופעות כאלה. עונות השנה חוזרות על עצמן, ועמן השינויים המחזוריים באורך הימים והלילות. הירח משנה את צורתו, הצל משנה במהלך היממה את אורכו וכיוונו, גובה פני הים משתנה במחזורים של גאות ושפל, ואף הלב פועם במחזוריות קבועה. בדרך זו או אחרת, המדענים משתמשים בפונקציות הסינוס והקוסינוס לתיאור ומחקר של תופעות אלה.

לפונקציות הטריגונומטריות תכונות ויזואליות בולטות, ועל כן נוח לחקור או להדגים באמצעותן מושגים מתמטיים שונים. חלק מהפעילויות והצעות דידקטיות אחרות מכוונות להאיר, באמצעות הפונקציות הטריגונומטריות, מושגים כלליים יותר: מחזוריות של פונקציות, טרנספורמציות של פונקציות, פעולות בין פונקציות, קשרים בין תכונות של פונקציות מורכבות לבין תכונות הפונקציות המרכיבות אותן, ועוד.

נגישותן של תכונות מחשב לצורך הצגות גרפיות של הפונקציות הטריגונומטריות, מאפשרת להמחיש את הפונקציות הטריגונומטריות ואת בניית הגרפים שלהן, להעלות השערות לקבל משוב מהיר, להמחיש זהויות, לחקור טרנספורמציות ליניאריות של הפונקציות ועוד.

בפרק יובאו הצעות רבות לפעילות בכיתה, מלוות בפתרונות, והערות מתמטיות ודידקטיות למורה.

מחזוריות של פונקציות¹

הגדרה

נתונה $f(x)$ פונקציה ממשיית עם תחום הגדרה D . פונקציה $f(x)$ נקראת **מחזורית** אם קיים מספר ממשי $T \neq 0$ כך שלכל $x \in D$ מתקיים:

$$(1) \quad x+T \in D \text{ וגם } x-T \in D.$$

$$(2) \quad f(x \pm T) = f(x).$$

המספר T נקרא **מחזור** של $f(x)$.

¹הרחבה בנושא המחזוריות ניתן למצוא בעמוד 26 ובמקורות המוזכרים בו.

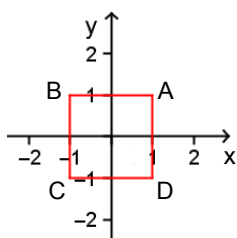
ברור כי אם פונקציה $f(x)$ מחזורית ו- T הוא מחזור שלה, אז כל מספר $m \cdot T$ כאשר m שלם, גם הוא מחזור של $f(x)$. מכאן נובע כי לפונקציה מחזורית יש תמיד אינסוף מחזורים. לעתים אנחנו מעוניינים לדעת מהו המחזור החיובי הקטן ביותר של הפונקציה.

אם בהגדרת פונקציה מחזורית נותר על הדרישה $x - T \in D$, נגיע להגדרת מחזוריות בכיוון חיובי (ימינה). מושג הגדרת המחזוריות החד-כיוונית מועיל כאשר עוסקים בפונקציות אשר תחום הגדרתן ממוקם בחלק החיובי של ציר ה- x .

המספר T נקרא **המחזור היסודי** (או **המחזור**) של פונקציה מחזורית $f(x)$, אם T הוא המחזור החיובי הקטן ביותר מבין כל המחזורים החיוביים של $f(x)$.

להלן פעילויות אחדות שיכולות להוביל לדיון במושג המחזוריות.

פעילות 1: תנועה על היקף ריבוע²

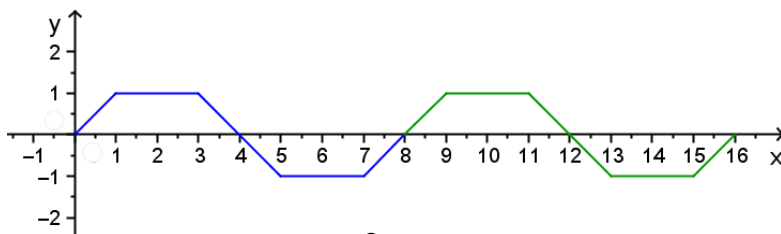


איור 1

במערכת צירים מסורטט ריבוע שקדקודיו $A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1), D(1,-1)$ נדמיין גוף שנע במערכת צירים לאורך היקף הריבוע, החל מהנקודה $(1,0)$, נגד כיוון השעון. הגוף משלים שני סיבובים ונעצר. סרטטו את גרף הפונקציה, המתאים לדרך שעובר הגוף את שיעור ה- y של הנקודה אליה הגיע.

פתרון

כדי לסרטט את הגרף נוח להתמקד בנקודות שקל לזהות, למשל: ברגע המוצא שיעור ה- y הוא אפס ולכן הגרף עובר בראשית הצירים.



איור 2

כשהגוף מגיע לנקודה A הוא עבר דרך באורך יחידה אחת ונמצא בנקודה ששיעור ה- y שלה 1. שיעור ה- y לא משתנה עד אשר הגוף משלים דרך שאורכה 3 יחידות ומגיע לנקודה B .

גרף הפונקציה מוצג באיור 2.

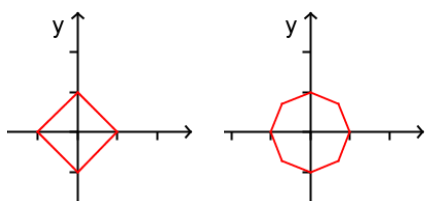
ניתן להמשיך ולשאול על תכונות הפונקציה, תחומי העלייה והירידה שלה, השיפוע של קטעי הגרף השונים, תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה. החשיבה במונחי הדרך שעובר הגוף תומכת במעבר לרדיאנים בהמשך הלמידה.

² הפעילות מעובדת על פי קירו ונפתליס (2001).

אפשרויות להרחבת הפעילות



ניתן לבדוק כיצד ישתנה הגרף אם נקיף מצולעים אחרים במערכת הצירים.



איור 3

פעילויות ההרחבה הן מורכבות יותר מאשר סרטוט גרף הסינוס, ולכן מתאימות כפעילויות העשרה או כפעילויות למורים, ולא כפעילויות הכנה לקראת סרטוט גרף הסינוס.

זוויות במישור כצורות גאומטריות ומדידתן במעלות וברדיאנים

הגדרות

זווית במישור היא צורה גאומטרית המוגדרת כחלק המישור הכלוא בין שתי קרניים היוצאות מנקודה אחת. הקרניים נקראות **שוקי הזווית** והנקודה המשותפת שלהן - **קדקוד הזווית**. קיימות שתי יחידות למדידת גודל של זווית במישור: מעלה ורדיאן.

מעלה היא מידת זווית מרכזית במעגל הנשענת על קשת שאורכה הוא $\frac{1}{360}$ מהיקף המעגל.

רדיאן הוא מידת זווית מרכזית במעגל הנשענת על קשת אשר אורכה שווה לרדיוס המעגל.

בעזרת שתי יחידות המידה הללו ניתן למדוד מידה של כל זווית במישור, הן במעלות והן ברדיאנים. הסימון למידת הזווית במעלות הוא $^{\circ}$ ולמידה ברדיאנים - rad .

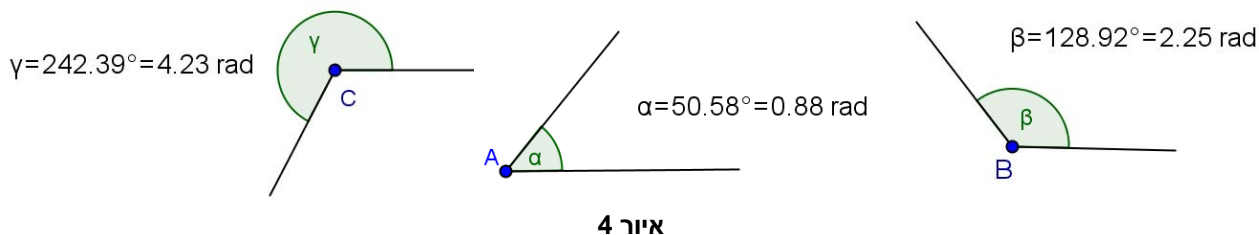
המרת מידת הזווית מרדיאנים למעלות ולהיפך

הקשר בין שתי המידות מתבטא בשוויון היחסים: $\frac{\alpha}{360} = \frac{x}{2\pi}$, כאשר α מייצגת את מידת הזווית במעלות ו- x מייצג את המידה של אותה הזווית ברדיאנים. השברים שבשני אגפי השוויון מבטאים אותו חלק של המעגל.

$$\text{מתוך הפרופורציה מתקבלות שתי נוסחאות: } x = \frac{\pi \cdot \alpha}{180} \text{ ו- } \alpha = \frac{x \cdot 180}{\pi}$$

$$\text{נוכל להסיק כי רדיאן אחד שווה ל- } \frac{180^{\circ}}{\pi} \cong 57.3^{\circ} \text{ . מעלה אחת שווה ל- } \frac{\pi}{180} \cong 0.01745_{rad}$$

באיור 4 מוצגות זוויות שונות במישור ומידותיהן במעלות וברדיאנים.



איור 4

שימוש בכפולות של π לציון מידת זווית ברדיאנים

כיוון שהמידה של זווית שלמה ברדיאנים היא 2π , מספר אי-רציונלי, גם מידותיהן ברדיאנים של זווית ישרה, זווית של משולש שווה-צלעות וזווית שימושיות אחרות אינן מספרים רציונליים. מבחינה זו שימוש ברדיאנים לציון מידות של זוויות יכול להיות מסורבל. אחת הדרכים להתגבר על כך היא לציון את מידות הזוויות באמצעות כפולות של π . בפרט, נוח להביע את מידת הזווית ברדיאנים בעזרת π , כאשר מידת הזווית במעלות היא מחלק של המספר 180 או כפולה שלו.

טבלה 1 מציגה דוגמאות לכתיבת מידת הזווית ברדיאנים בעזרת π .

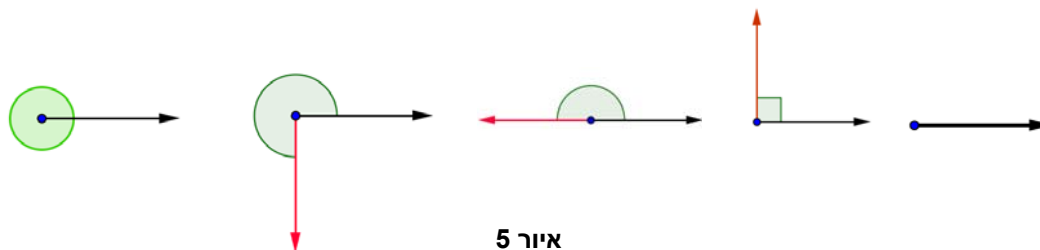
מידה במעלות	1000	600	315	210	120	60	30	45	90	180
מידה ברדיאנים	$5\frac{5}{9}\pi$	$3\frac{1}{3}\pi$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π

טבלה 1

זוויות סיבוב במישור

בהגדרת זווית כצורה גאומטרית, גודל זווית במישור יכול להשתנות מ-0 עד 360 מעלות, או מ-0 עד 2π רדיאנים. נוכל להרחיב תחום זה ל- $(-\infty, \infty)$ אם נגדיר זווית במישור כזווית סיבוב. כלומר, תהינה OA, OB שתי קרניים במישור בעלות קדקוד משותף O . תהי קרן OB קבועה (לא נעה), והקרן OA נמצאת בסיבוב רציף סביב הנקודה O , החל מהקרן OB , בכיוון מסוים.

במצב התחלתי שתי הקרניים מתלכדות זו עם זו. הקרן הנעה יכולה לנוע בשני כיוונים: נגד מחוגי השעון – 'כיוון חיובי' ועם מחוגי השעון – 'כיוון שלילי'. כאשר הקרן הנעה עוברת רבע סיבוב בכיוון חיובי, הקרניים מאונכות זו לזו, הן יוצרות זווית ישרה. כאשר הקרן הנעה עוצרת בחצי סיבוב, הקרניים יוצרות קו ישר, כלומר, נוצרת זווית שטוחה. כאשר הקרן הנעה משלימה את הסיבוב, הקרניים עוד הפעם מתלכדות, נוצרת זווית שלמה.



זווית שמידתה בין 0° לבין 90° נקראת **זווית חדה**. זווית שמידתה בין 90° לבין 180° נקראת **זווית קהה**. זווית שמידתה בין 180° לבין 360° נקראת **זווית נישאה**.

נניח כי התנועה מתבצעת כנגד כיוון השעון (הכיוון החיובי). עד שהקרן המסתובבת תגיע למצב ההתחלתי (תתלכד שוב עם הקרן OB), כלומר, עד שהיא תבצע סיבוב שלם, זווית הסיבוב שלה תיראה כזווית גאומטרית עם שוקיים OB ו- OA המשתנה ברציפות מ-0 מעלות (0 רדיאנים) עד 360 מעלות (2π רדיאנים). במהלך הסיבוב השני של הקרן OA , מידת זווית הסיבוב שלה משתנה מ-360 מעלות (2π רדיאנים) עד 720 מעלות (4π רדיאנים) וכך הלאה. היות ומספר הסיבובים השלמים אינו מוגבל, מידת זווית הסיבוב בכיוון חיובי משתנה

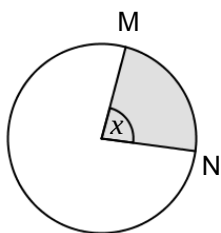
מ-0 עד ∞ . בדומה, אם לזוויות הסיבוב בכיוון השעון נשייך סימן שלילי, אז בסיבוב רציף של הקרן OA בכיוון השעון, זווית הסיבוב תקבל כל ערך שלילי בין $(-\infty)$ ו-0. זוויות הסיבוב בשני הכיוונים, הנמדדות במעלות או ברדיאנים, מקבלות כל ערך בתחום $(-\infty, \infty)$.

אורך קשת ושטח גזרה

אורך קשת של מעגל

מהגדרת הרדיאן מקבלים מיד נוסחה לחישוב אורך קשת של מעגל.

אם x מידת זווית ברדיאנים, ו- R רדיוס המעגל, אז **אורך הקשת** המתאימה לזווית x הוא $l = Rx$.



איור 6

שטח גזרת המעגל

גזרה של מעגל היא צורה הכלואה בין שני רדיוסים לבין קשת (איור 6). שטח הגזרה S הוא חלק משטח העיגול כולו, שהוא πR^2 . מידת הזווית $\angle MON$ ברדיאנים היא x , ומידת זווית שלמה 2π רדיאן.

כיוון שהחלק היחסי של הגזרה מן העיגול, שווה לחלק היחסי של זווית הגזרה מתוך המעגל השלם מתקיימת הפרופורציה:

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{S}{\pi R^2}$$

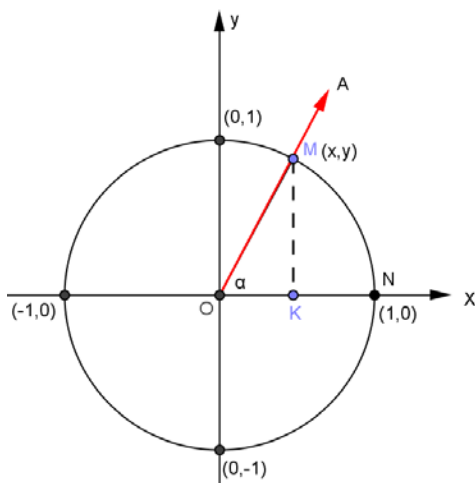
מכאן:

אם x מידת זווית ברדיאנים, ו- R רדיוס המעגל, אז **שטח הגזרה** המתאימה לזווית x הוא $S = \frac{R^2 \cdot x}{2}$.

אם נציב $l = R \cdot x$, כאשר l אורך הקשת המתאימה לגזרה. נקבל את הקשר $S = \frac{R \cdot l}{2}$.

מעגל היחידה

מעגל שמחוגו יחידה אחת ומרכזו בראשית הצירים נקרא **מעגל היחידה** (איור 7).



איור 7

נסמן את ראשית הצירים ב- O , ונקבע בו קרן נחה שמתלכדת עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , וקרן נעה OA שמוצאה במרכז המעגל. הנקודה $N(1,0)$ היא נקודת החיתוך של מעגל היחידה עם חלקו החיובי של ציר ה- x . הנקודה M היא נקודת החיתוך של הקרן הנעה, המתאימה לזווית כלשהי α , עם המעגל. כמו לכל נקודה במערכת הצירים, יש לה שני שיעורים: x_M ו- y_M .

קיימת התאמה חד-ערכית בין הזוויות שהקרן הנעה שלהן היא OM , לבין הנקודות M על מעגל היחידה. ההתאמה איננה חד-חד-ערכית:

לכל זווית מתאימה נקודה אחת על מעגל היחידה. לכל נקודה M אפשר להתאים אינסוף זוויות (איור 7).

הגדרת פונקציות טריגונומטריות

נעסוק בפרק זה בארבע פונקציות טריגונומטריות יסודיות: סינוס, קוסינוס, טנגנס וקוטנגנס.

נגדיר תחילה את הפונקציות סינוס וקוסינוס, בתוך מעגל היחידה.

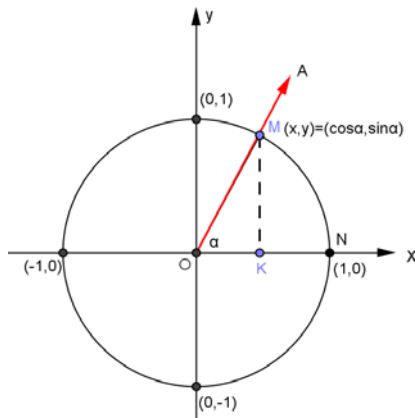
הגדרת הפונקציות סינוס וקוסינוס

הגדרות

תהא α זווית כלשהי שהקרן הנחה שלה מתלכדת עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . תהא M נקודת החיתוך של הקרן הנעה המתאימה לזווית α עם מעגל היחידה.

סינוס הזווית α הוא שיעור ה- y של הנקודה M , כלומר, $\sin \alpha = y_M$.

קוסינוס הזווית α הוא שיעור ה- x של הנקודה M , כלומר, $\cos \alpha = x_M$.



איור 8

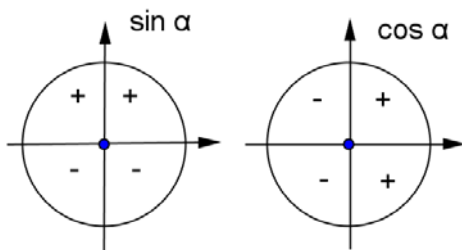
מההגדרה נובע שכל נקודה שנמצאת על מעגל היחידה שיעוריה הם: $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ (איור 8).

תכונות של הפונקציות סינוס וקוסינוס

כדי לבסס את ההבנה של תכונות הפונקציות סינוס וקוסינוס על משפטים מגאומטריית המישור, נתייחס תחילה אל גודל הזווית כנתון במעלות. בהמשך (עמוד 365), נעמוד על ההבדל המהותי בין פונקציות טריגונומטריות שבהן המשתנה הוא זווית, אשר יכולה להיות נתונה במעלות או ברדיאנים, לבין פונקציות טריגונומטריות שבהן המשתנה הוא מספר ממשי ללא כינוי.

אילו תכונות של הפונקציות ניתן לראות מתוך המעגל הטריגונומטרי?

- הפונקציות סינוס וקוסינוס מוגדרות לכל זווית α .
- ערכי הפונקציות סינוס וקוסינוס הם מספרים ממשיים.
- הפונקציות חסומות: $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ וגם $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.



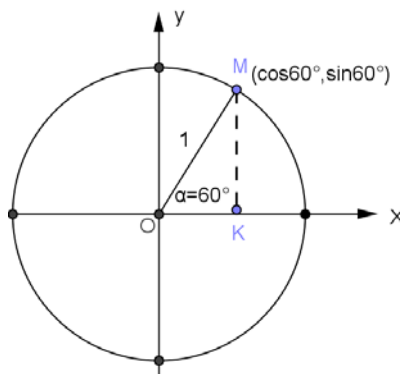
איור 9

סימני הפונקציות סינוס וקוסינוס ברביעים השונים

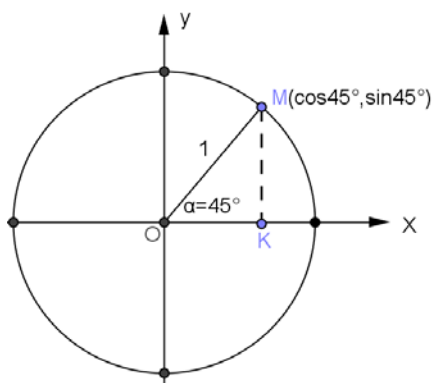
מהגדרות הפונקציות, הסימנים של שיעורי ה- x וה- y בארבעת הרביעים מקבלים את הסימנים הבאים (איור 9).

פונקציית הסינוס מקבלת ערכים חיוביים עבור כל הזוויות אשר מיוצגות על-ידי נקודות ברביעים הראשון והשני, וערכים שליליים עבור הזוויות המיוצגות על-ידי נקודות ברביע השלישי והרביעי.

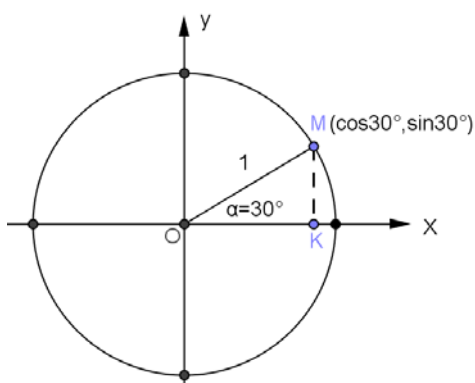
פונקציית הקוסינוס מקבלת ערכים חיוביים עבור כל הזוויות אשר מיוצגות על-ידי נקודות ברביעים הראשון והרביעי, וערכים שליליים עבור הזוויות המיוצגות על-ידי נקודות ברביעים השני והשלישי.



איור 10



איור 11



איור 12

ערכי הפונקציות סינוס וקוסינוס של זוויות מיוחדות

א. זווית בת 0° מיוצגת על-ידי הנקודה $N(1, 0)$, לכן: $\sin 0^\circ = 0$ ו- $\cos 0^\circ = 1$.

ב. זווית בת 90° מיוצגת על-ידי הנקודה $(0, 1)$, לכן: $\sin 90^\circ = 1$ ו- $\cos 90^\circ = 0$.

ג. באופן דומה:

$$\sin 180^\circ = 0; \cos 180^\circ = -1; \sin 270^\circ = -1; \cos 270^\circ = 0; \sin 360^\circ = 0; \cos 360^\circ = 1.$$

ד. זווית בת 45°

נמצא את שיעורי הנקודה M המתאימה לזווית בת 45° (איור 11). לשם כך נתבונן במשולש ישר-זווית $\triangle OKM$. היתר: $OM = 1$. הזוויות החדות בנות 45° ולכן המשולש שווה-שוקיים. נסמן ב- x את אורכי הניצבים. על-פי משפט פיתגורס:

$$x^2 + x^2 = 1 \\ 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

מכאן:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ה. זווית בת 30°

נמצא את שיעורי הנקודה M המתאימה לזווית בת 30° (איור 12). המשולש $\triangle OKM$ הוא משולש ישר-זווית עם זווית חדה בת 30° . מכאן $MK = \frac{1}{2}$.

בעזרת משפט פיתגורס נקבל כי על-פי משפט פיתגורס:

$$OK = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

קיבלנו:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ו. זווית בת 60°

בצורה דומה ניתן למצוא את שיעורי הנקודה M כאשר $\alpha = 60^\circ$ ולקבל:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

טבלה 2

קשרים בין הסינוס והקוסינוס של זווית

הפונקציות סינוס וקוסינוס קשורות זו בזו בזהות יסודית טריגונומטרית:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

הקשר נובע ישירות ממשפט פיתגורס: במשולש ישר-זווית $\triangle OKM$ מתקיים:

$$(OK)^2 + (KM)^2 = (OM)^2 \Rightarrow (x_M)^2 + (y_M)^2 = 1$$

ניתן לראות בקלות שהקשר מתקיים בכל הרביעים.

אם מתוך הזהות היסודית הטריגונומטרית נביע פונקציה אחת בעזרת השנייה, נקבל:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \text{ו-} \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

קשר נוסף בין הפונקציות סינוס וקוסינוס הוא

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \text{ו-} \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

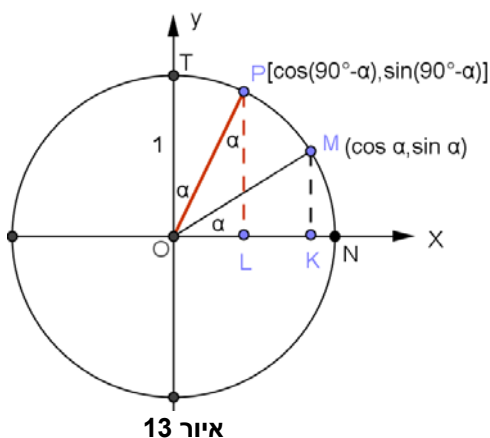
הקשר נובע מחפיפת המשולשים: $\triangle OKM$ ו- $\triangle OLP$ (איור 13),

כאשר הנקודה M מתאימה לזווית α , הנקודה P מתאימה

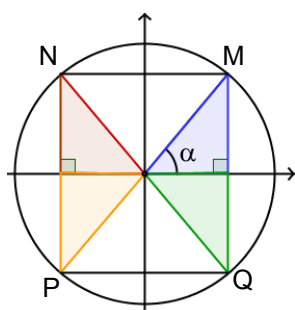
לזווית $(90^\circ - \alpha)$, ושיעוריהן בהתאם: $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$

ו- $P[\cos(90^\circ - \alpha), \sin(90^\circ - \alpha)]$.

בהמשך נראה כי קשר זה מתקיים גם עבור זוויות שאינן ברביע הראשון.



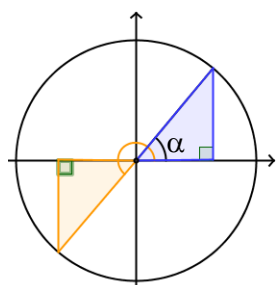
פעילות 2: זהויות טריגונומטריות מתוך מעגל היחידה



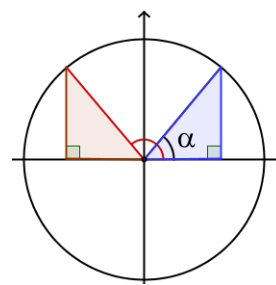
איור 14

לכל זווית מתאימה נקודה M על מעגל היחידה. נסרטט במעגל היחידה מלבן $MNPQ$ שצלעותיו מקבילות לצירים. הנקודה M מתאימה לזווית α . נסרטט את אלכסוני המלבן ונתבונן בארבעת המשולשים החופפים המודגשים (איור 14).

לכל אחד מן האיורים 15 ו-16 רשמו זהות שמקשרת בין הסינוסים של שתי זוויות וזהות שמקשרת בין הקוסינוסים של שתי זוויות. הדגימו כל זהות באמצעות שתי זוויות (ראו דוגמה מתחת לכל איור).



איור 15



איור 16

זהות: $\sin(\text{---}) = \text{---}$

דוגמה 1: $\sin 220^\circ = \text{---}$

דוגמה 2: ---

זהות: $\cos(\text{---}) = \text{---}$

דוגמה 1: $\sin 220^\circ = \text{---}$

דוגמה 2: ---

זהות: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

דוגמה 1: $\sin 160^\circ = \sin \text{---}$

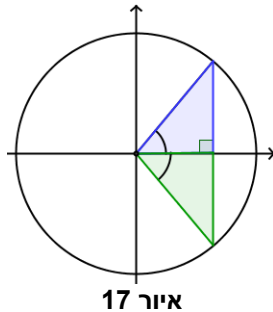
דוגמה 2: ---

זהות: $\cos(180^\circ - \alpha) = \text{---}$

דוגמה 1: $\cos 160^\circ = \text{---}$

דוגמה 2: ---

רשמו על-פי איור 17 שתי זוויות המקשרות בין סינוסים של זוויות, ושתי זוויות המקשרות בין קוסינוסים של זוויות. רשמו שתי דוגמאות לכל זהות.



איור 17

זהות: $\sin(__) = __$

דוגמה: $\sin(-20^\circ) = -\sin(20^\circ)$

דוגמה: _____

זהות: $\cos(__) = __$

דוגמה: $\cos(-20^\circ) = __$

דוגמה: _____

זהות: $\sin(360^\circ - \alpha) = __$

דוגמה: $\sin 340^\circ = __$

דוגמה: _____

זהות: $\cos(360^\circ - \alpha) = __$

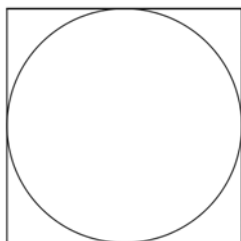
דוגמה: $\cos 340^\circ = __$

דוגמה: _____

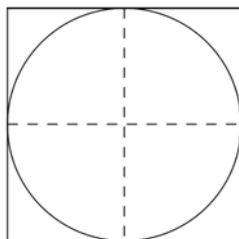
לזהויות נוספות שניתן לראות במעגל היחידה נתייחס בעמוד 368.

המחשת ערכי הפונקציות סינוס וקוסינוס באמצעות קיפולי נייר³

לאחר הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות במעגל היחידה, ניתן לשלב פעילות באמצעות קיפולי נייר להוראת חישוב ערכי הפונקציות של זוויות מיוחדות.



איור 18



איור 19

מעגל היחידה

1. כל תלמיד מקבל ריבוע נייר שצלעו 2 יחידות אורך.

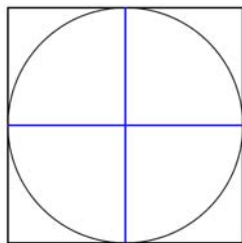
בתוך הריבוע חסום מעגל (איור 18).

מהו רדיוס המעגל?

נקפל את הריבוע לחצי ועוד פעם לחצי, כבאיור 19.

³ מעובד מתוך סבר (2010).

2. נפתח את הריבוע ונדגיש את קווי הקיפול.
התקבל מעגל היחידה במערכת צירים (איור 20).

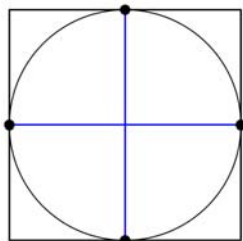


איור 20

ערכי פונקציית סינוס של הזוויות $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

נסמן ארבע נקודות חיתוך של מעגל היחידה עם צירי המערכת (איור 21).
לאילו זוויות מתאימות הנקודות? מהו שיעור ה- y בכל אחת מהנקודות?
על-פי ההגדרה של פונקציית הסינוס נרשום:

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1, \quad \sin 180^\circ = 0, \quad \sin 270^\circ = -1$$



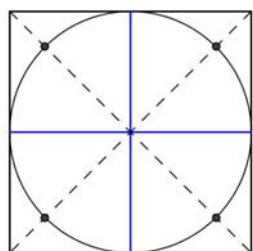
איור 21

ערכי פונקציית סינוס של הזוויות $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$

1. נתחיל במעגל היחידה שבאיור 21.

2. נקפל את הריבוע על-פי שני האלכסונים, נפתח ונדגיש את הקווים.

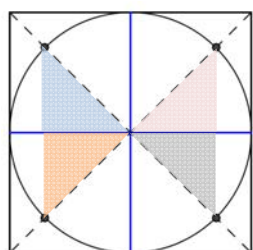
3. נסמן את נקודות החיתוך של האלכסונים עם מעגל היחידה (איור 22).
לאיזו זווית מתאימה הנקודה שנמצאת ברביע הראשון?
חשבו את $\sin 45^\circ$ (היעזרו במשולש המסומן באיור 24).



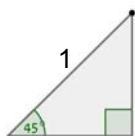
איור 22

4. לאילו זוויות מתאימות שלוש הנקודות האחרות?
מהו שיעור ה- y בכל אחת מהן?

היעזרו בחפיפת משולשים או בשיקולי סימטריה (איור 23).



איור 23



איור 24

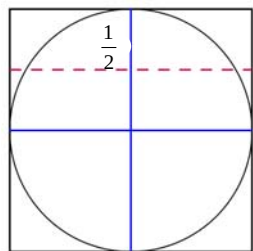
5. נסכם: $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ערכי פונקציית סינוס של הזוויות $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$

1. נתחיל במעגל היחידה שבאיור 25.

2. נצמיד את הצלע העליונה של הריבוע אל ציר ה- x .

קו הקיפול חוצה את הקטע החיובי של ציר ה- y (איור 25).



איור 25

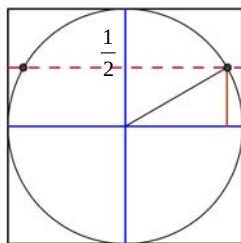
3. נפתח את הריבוע, נדגיש את קו הקיפול,

נסמן את נקודת החיתוך של קו הקיפול עם מעגל היחידה
ברביע הראשון, ונחבר את הנקודה עם ראשית הצירים.

על-ידי קיפול נוסף נוריד אנך מהנקודה שסימנו אל ציר ה- x (איור 26).
מהו שיעור ה- y של הנקודה שברביע הראשון?

לאיזו זווית מתאימה הנקודה? (נמקו).

היעזרו במשפט על משולש ישר-זווית עם ניצב השווה למחצית היתר.



איור 26

4. נסמן את שתי נקודות החיתוך שבחצי המישור העליון. שתי הנקודות סימטריות ביחס לציר ה- y .

לאילו זוויות מתאימות הנקודות?

נמצא את שיעור ה- y של כל הנקודות (איור 26).

5. נסכם: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$, $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$

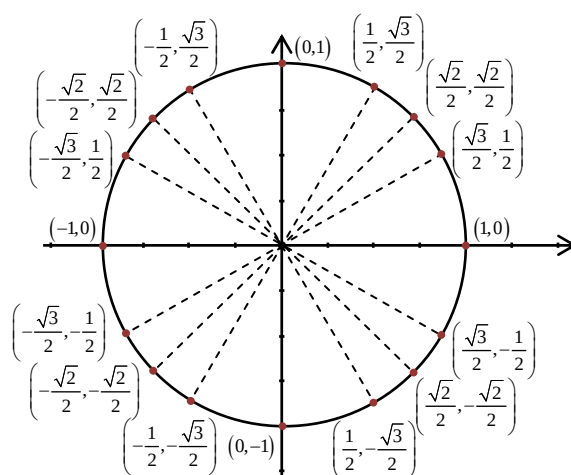
באופן דומה אפשר לסמן באמצעות קיפולי נייר, על מעגל היחידה הנקודה המתאימה לזווית בת 60° :

(חוצים את הקטע החיובי של ציר ה- x). כך נקבל את הערכים הבאים:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

כמו-כן, ניתן לרשום את ערכי פונקציית קוסינוס עבור כל הזוויות שלעיל.

לסיום, נסמן על מעגל היחידה את הנקודות המתאימות לזוויות המיוחדות שהוצגו קודם. שיעורי הנקודות הם ערכי הקוסינוס והסינוס של הזוויות הללו (איור 27):

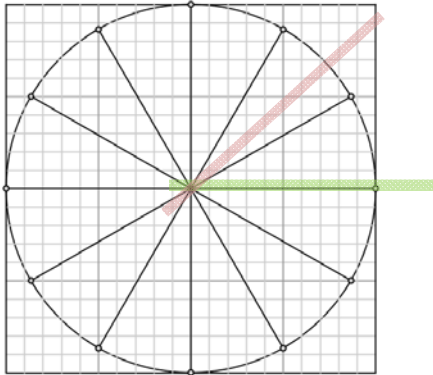


איור 27

מודל של מעגל היחידה על נייר מילימטרי- ערכה לתלמיד

ניתן לבנות יחד עם התלמידים מודל למעגל היחידה. המודל נשאר בידי התלמידים ויכול לשמש להמחשת זהויות טריגונומטריות ועוד.

הציוד הדרוש:



- נייר משובץ או נייר מילימטרי,
- שני מחוגים, עשויים מרצועות שקף, שעל כל אחת מהן מסורטט בטוש צבעוני פס אחד, על כל רצועה פס בצבע שונה,
- בסיס מנייר בריסטול או מקלקר,
- סיכות מתפצלות להידוק הערכה אל הבריסטול או לקלקר,
- מד-זווית שקוף או מודפס על שקף.

הכנת הערכה



איור 28

1. מסרטטים על נייר מילימטרי מעגל שמרכזו בפינה של משבצת ומחוגו דצימטר אחד. נתייחס אל דצימטר כאל יחידה.

2. מעבירים על המעגל שני קטרים המונחים על קווי המשבצות. אל הקטרים האלה נתייחס כאל צירי מערכת.

3. מסרטטים את הריבוע שנוצר על-ידי המשיקים למעגל בנקודות החיתוך שלו עם הצירים.

4. מעבירים עוד 4 קטרים, כך שהמעגל יהיה מחולק ל- 12 גזרות שוות.

5. גוזרים את הריבוע.

6. להקשחת הריבוע מצמידים אותו אל נייר בריסטול או לוח קלקר.

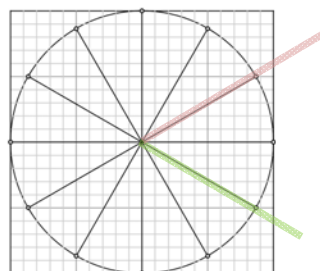
7. מצמידים לראשית הצירים שני מחוגים צבעוניים ביחד, באמצעות סיכה מפצלת. מחוגים אלה ניתנים לסיבוב סביב ראשית הצירים.

8. מצרפים למודל מד-זווית שקוף.

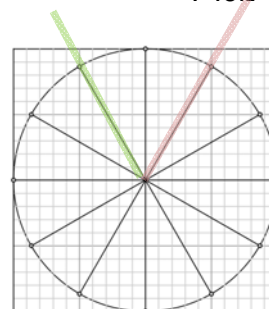
ערכה זו יכולה ללוות את התלמידים במהלך כל השיעורים המוקדשים לפונקציות הטריגונומטריות.

ערכה זו מאפשרת לתלמידים לראות באופן מוחשי ודינמי את הקשר בין זווית הסיבוב של המחוג לבין ערכי הפונקציות הטריגונומטריות, ולהמחיש זהויות טריגונומטריות המתקבלות מתוך הגדרת הפונקציות.

כדאי שהתלמידים יהיו שותפים בהכנת הערכה, אך ניתן כמובן לקצר את התהליך ולהביא לתלמידים צילום של מעגל יחידה על נייר מילימטרי.

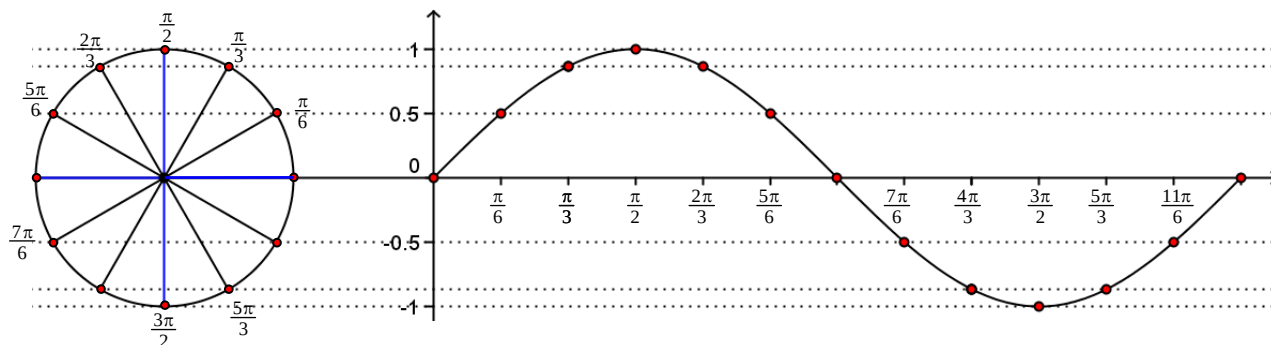


איור 29



הגרפים של הפונקציות סינוס וקוסינוס

סרטוט גרף הפונקציה סינוס מתוך מעגל היחידה.
 באיור 30 מופיע מעגל יחידה מחולק ל-12 גזרות שוות. על המעגל מסומנות המידות ברדיאנים של זוויות הסיבוב (בסיבוב הראשון) המתאימות לכל נקודת חלוקה.
 כדי לסרטט את גרף הסינוס נסמן על ציר ה- x את הנקודות המתאימות למידות הזוויות שסימנו על המעגל.
 כלומר, יחידת האורך על ציר ה- x היא רדיאן אחד. אם ברצוננו לקבל מערכת צירים הומוגנית נבחר גם על ציר ה- y יחידה השווה באורכה לרדיוס המעגל.
 נסרטט במערכת צירים זו קטע מגרף של פונקציית הסינוס, המתאים למעגל שלם אחד (איור 30).

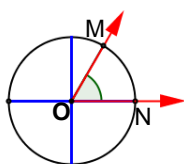


איור 30

באופן דומה יכולנו לציין את הזוויות המרכזיות במעלות ולקבל גרף דומה שבו המשתנה שעל ציר ה- x מייצג זווית במעלות. אם כך, מהו הטעם להכניס מידת זווית נוספת, זרה ובלתי מוכרת, שמחייבת שימוש בכפולות של פאי אפילו כדי לציין את מידתן של זוויות מוכרות כמו זווית ישרה וזווית שטוחה? הפעילות הבאה מדגישה את ההבדלים בין שתי ההגדרות השונות של הפונקציות.



פעילות 3: מה בין פונקציית הסינוס המוגדרת ברדיאנים לבין הפונקציה המוגדרת במעלות?



איור 31

איור 31 מציג מעגל יחידה שעליו קרן קבועה ON וקרן מסתובבת OM . M ו- N הן נקודות על המעגל. הקרן OM מתחילה להסתובב החל מהמצב בו היא מתלכדת עם הקרן ON ומשלימה סיבוב אחד.

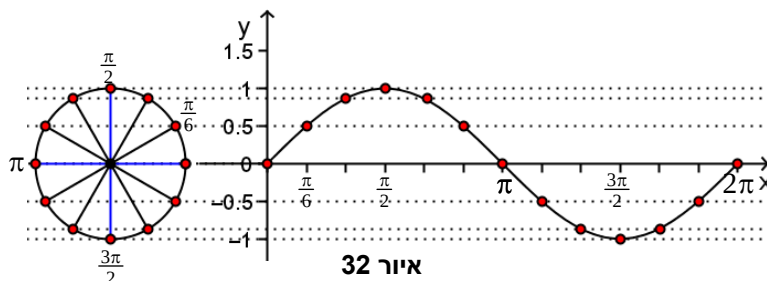
הפונקציה f מתאימה למידת הסיבוב במעלות של הקרן OM , את שיעור ה- y של הנקודה M .

הפונקציה g מתאימה למידת הסיבוב ברדיאנים של הקרן OM , את שיעור ה- y של הנקודה M .
 הפונקציה h מתאימה לאורך הקשת NM את שיעור ה- y של הנקודה M .

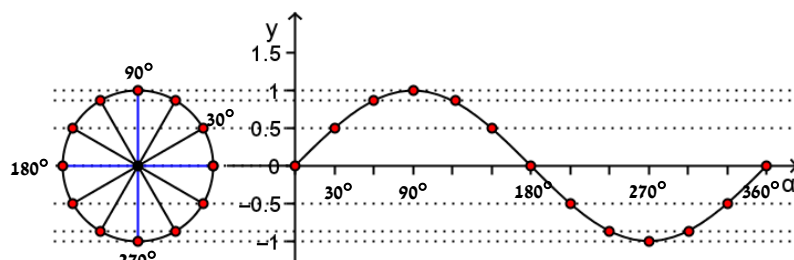
א. זהו איזה מן הגרפים שבאיורים 32 ו-33 מתאים לכל אחת מן הפונקציות.

ב. הניחו על הגרף שבאיור 32 סרגל בראשית הצירים כך ששיק לגרף. מהו בערך שיפוע המשיק?

ג. הניחו על הגרף שבאיור 33 סרגל בראשית הצירים כך ששיק לגרף. מהו בערך שיפוע המשיק?



איור 32

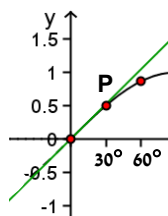


איור 33

תשובות

א. מן היחידות שעל ציר ה- x ברור כי לפונקציה g מתאים הגרף 32. ולפונקציה f מתאים הגרף 33. כיוון שמידת זווית ברדיאנים שווה לאורך הקשת המתאימה לה על מעגל היחידה, הפונקציות g ו- h הן פונקציות זהות. לכן גם לפונקציה h מתאים הגרף 32. פונקציה זו היא פונקציית הסינוס ברדיאנים, המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$. הפונקציה f היא פונקציית הסינוס במעלות, המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 360^\circ$.

ב. שיפוע הגרף של הפונקציה g בראשית הצירים הוא 1. נוכל לחשב שיפוע זה בקירוב באמצעות מנת הפרשים. נוכל גם לאמת את הערכתנו באמצעות הנגזרת. שיפוע הגרף בראשית הצירים שווה לנגזרת הפונקציה סינוס כאשר $x=0$, ואכן $\cos 0 = 1$.



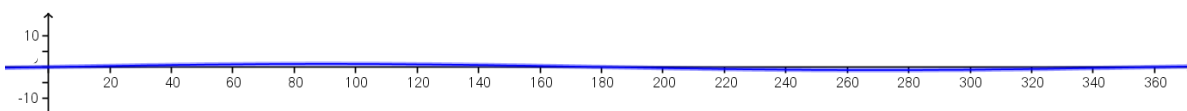
איור 34

ג. למרות שהגרפים נראים זהים, שיפוע גרף הפונקציה f בראשית הצירים לא שווה ל-1. באיור 34 מערכת הצירים אינה הומוגנית (היחידות על הצירים אינן שוות), ולכן לא נוכל להעריך את השיפוע באופן גאומטרי על-פי מראה עיניים, וגם לא נוכל לחשב אותו באמצעות טנגנס הזווית בין המשיק לציר ה- x . נוכל לקחת שתי נקודות על המשיק ולאמוד את השיפוע באמצעות מנת הפרשים ביניהן.

נוכל לקבל הערכה לשיפוע המשיק על-ידי חישוב מנת הפרשים בין הנקודה $P(30, 0.5)$ לבין ראשית הצירים: $m = \frac{0.5-0}{30-0} \approx \frac{1}{60}$. הערכה זו קרובה למדי לשיפוע המשיק שהוא $\frac{\pi}{180}$.

האם נוכל לסרטט את גרף הסינוס במעלות במערכת הומוגנית? הסרטוט הוא אפשרי אם כי לא נוח לביצוע. אם ננסה לסרטט את גרף הפונקציה f במערכת הומוגנית נקבל

גרף שונה, שטוח מאוד (שחופף לגרף הפונקציה $\sin \frac{\pi}{180} x$ המוגדרת ברדיאנים). איור 35 מציג גרף זה.



איור 35

הערות לפעילות

הפעילות מדגישה שפונקציית הסינוס המוגדרת במעלות ופונקציית הסינוס המוגדרת ברדיאנים אינן שוות.

את פונקציית הסינוס המוגדרת במעלות קשה לסרטט במערכת צירים הומוגנית.

פונקציית הסינוס המוגדרת ברדיאנים לא רק מתאימה למידת הזווית ברדיאנים את שיעור ה- y של נקודה במעגל היחידה. ניתן לפרש אותה גם כפונקציה המתאימה לאורך הקשת עד נקודה נתונה את מרחקה של נקודה זו מציר ה- x . לפירוש זה שימושים מעשיים חשובים.

בהמשך הפרק נראה שהנגזרת המוכרת $(\sin x)' = \cos x$ מתאימה רק לפונקציה המוגדרת ברדיאנים.

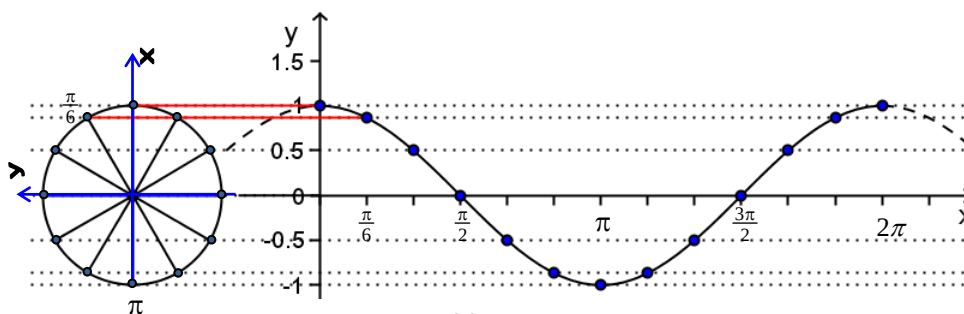
לצד היתרונות של הפונקציה המוגדרת ברדיאנים יש יתרונות דידקטיים לשימוש במעלות בשלבים מוקדמים של הלמידה - שימוש בשפה שהיא מוכרת לתלמידים. נוח להציג את תכונות הסינוס והקוסינוס תחילה במעלות ואחר כך ברדיאנים, כשבהדרגה עוברים לעסוק בפונקציות הטריגונומטריות ברדיאנים. אחד המקומות הנוחים למעבר הוא בעת הטיפול בגרפים של הפונקציות.

כשעוברים לחשבון דיפרנציאלי עוסקים בפונקציות טריגונומטריות ממשיות, שבהן המשתנים הם מספרים ממשיים. פונקציות אלה **מוגדרות** בעזרת רדיאנים (עמוד 371).

מכאן ואילך, בכל מקום שבו לא צוין במפורש אחרת, נעסוק בספר זה בפונקציות הטריגונומטריות כשהן מוגדרות ברדיאנים.

סרטוט גרף הפונקציה $y = \cos x$ מתוך מעגל היחידה

על מנת לסרטט את גרף הפונקציה $y = \cos x$ מתוך מעגל היחידה, נסובב את מעגל היחידה ברבע סיבוב שמאלה, כך שהמצב ההתחלתי של הקרן הנעה יהיה במצב מאונך לציר ה- x במערכת הצירים בה מסורטט הגרף (איור 36). באופן זה נוכל "להטיל" את ערכי הקוסינוס של הזוויות מציר ה- x של מעגל היחידה אל ציר ה- y של הגרף.



איור 36

מדרך בניית הגרף ניתן להבחין כי הקוסינוס של כל זווית שווה לסינוס של הזווית הגדולה ממנה ב- $\frac{\pi}{2}$. כך, למשל,

$$\cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{7\pi}{6}.$$

נבטא את הקשר בין הסינוס והקוסינוס במעלות וברדיאנים: $\cos \alpha^\circ = \sin(\alpha^\circ + 90^\circ)$; $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

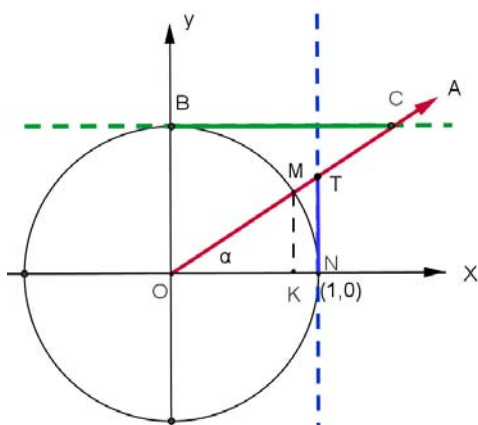
פעילות 4: תכונות הפונקציות סינוס וקוסינוס כפי שהן משתקפות בגרף הפונקציה

ההתבוננות בגרף הפונקציה מאפשרת לקשר בין תכונות הפונקציה המשתקפות בגרף לבין מעגל היחידה, ולהראות שהזהויות אותן הסברנו במקרה של זווית α חדה מתקיימות לכל α . טבלה 3 מציגה תכונות של הפונקציות ומציעה הסבר ויזואלי לכל תכונה.

הסבר ויזואלי מתוך מעגל היחידה	$y = \cos x$		$y = \sin x$	
	ייצוג גרפי	תכונה	ייצוג גרפי	תכונה
		מחזוריות: $\cos x = \cos(x + 2\pi k)$ לכל k שלם		מחזוריות: $\sin x = \sin(x + 2\pi k)$ לכל k שלם
		חסימות: $1 \leq \cos x \leq 1$		חסימות: $1 \leq \sin x \leq 1$
		זוגיות לכל x : $\cos(-x) = \cos x$		אי-זוגיות לכל x : $\sin(-x) = -\sin x$
		סימטריה ביחס לנקודה $(\frac{\pi}{2}, 0)$: $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} + x)$		סימטריה ביחס לישר $x = \frac{\pi}{2}$: $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$
		סימטריה ביחס לישר $x = \pi$: $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$		סימטריה ביחס לנקודה $(\pi, 0)$: $\sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x)$
		חפיפה של "חצי גל עליון" ל"חצי גל תחתון": $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$		חפיפה של "חצי גל עליון" ל"חצי גל תחתון": $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
		עלייה בתחומים: $-\pi + 2\pi k < x < 2\pi k$ וירידה בתחומים: $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$		עלייה בתחומים: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ וירידה בתחומים: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$
		חיוביות בתחומים: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ שליליות בתחומים: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$		חיוביות בתחומים: $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$ שליליות בתחומים: $\pi + 2\pi k \leq x \leq 2\pi + 2\pi k$

טבלה 3

הגדרת הפונקציות טנגנס וקוטנגנס



איור 37

נסמן במעגל טריגונומטרי זווית מרכזית חדה α (איור 37). הקרן OA היא הקרן הנעה של זווית α , הנקודה M היא נקודת החיתוך של הקרן עם המעגל. שיעוריה של הנקודה M הם: $x_M = \cos \alpha$, $y_M = \sin \alpha$.

נעביר שני משיקים למעגל בנקודות החיתוך שלו עם צירי המערכת, בנקודות N ו- B . המשיקים חותכים את הקרן OA (או את המשכה) בנקודות T ו- C .

השיעור השני של נקודה T נקרא **טנגנס** α , כלומר, $y_T = \tan \alpha$. השיעור הראשון של הנקודה C נקרא **קוטנגנס** α , כלומר, $x_C = \cot \alpha$.

הקשרים בין טנגנס וקוטנגנס לבין סינוס וקוסינוס

נתבונן במשולשים $\triangle ONT$ ו- $\triangle OKM$ (איור 37). שני המשולשים ישרי-זווית ולשניהם זווית משותפת α . מדמיון

$$\text{המשולשים נקבל: } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

א. הראו שהקשר $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ מתקיים גם ברביע השני.

ב. חפשו זוג נוסף של משולשים ישרי-זווית דומים, והראו את הקשר: $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

ניתן לראות את הקשר האלגברי בין שתי הפונקציות: $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ או $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$.

וכיצד ניתן להסביר את אותו הקשר: $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ מתוך מעגל היחידה (איור 37)?

רמז: $\triangle OBC$ ו- $\triangle TNO$ דומים.

הערה: כל הזהויות מתקיימות כאשר הביטויים בשני האגפים מוגדרים (ראו בהמשך).

תכונות הפונקציות טנגנס וקוטנגנס

■ על-פי ההגדרה ועל-פי הקשרים: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ו- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, ניתן להבין כי טנגנס וקוטנגנס אינם מוגדרים לכל זווית α .

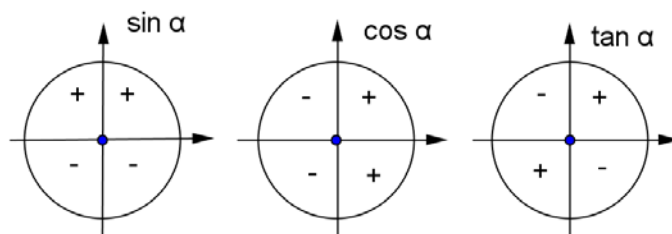
■ $\tan \alpha$ מוגדר עבור זוויות בהן $\cos \alpha \neq 0$, כלומר, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, k מספר שלם.

■ ו- $\cot \alpha$ מוגדר עבור זוויות בהן $\sin \alpha \neq 0$, כלומר, $\alpha \neq \pi k$, k מספר שלם.

■ הפונקציות טנגנס וקוטנגנס אינן חסומות.

■ ערכי הפונקציות טנגנס וקוטנגנס חיוביים ברביע הראשון וברביע השלישי, ושליילים ברביע השני וברביע הרביעי.

- מתכונות הסינוס והקוסינוס נוכל להסיק כי עבור $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ (k מספר שלם) מתקיים $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ ו- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$.



איור 38

קשרים בין סינוס וקוסינוס לבין טנגנס וקוטנגנס

אם נצא מהזהות היסודית $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, ונחלק את שני האגפים ב- $\cos^2 \alpha$ נקבל את הקשר

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

באופן דומה ניתן לחלק את שני האגפים ב- $\sin^2 \alpha$ ולקבל את הקשר

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

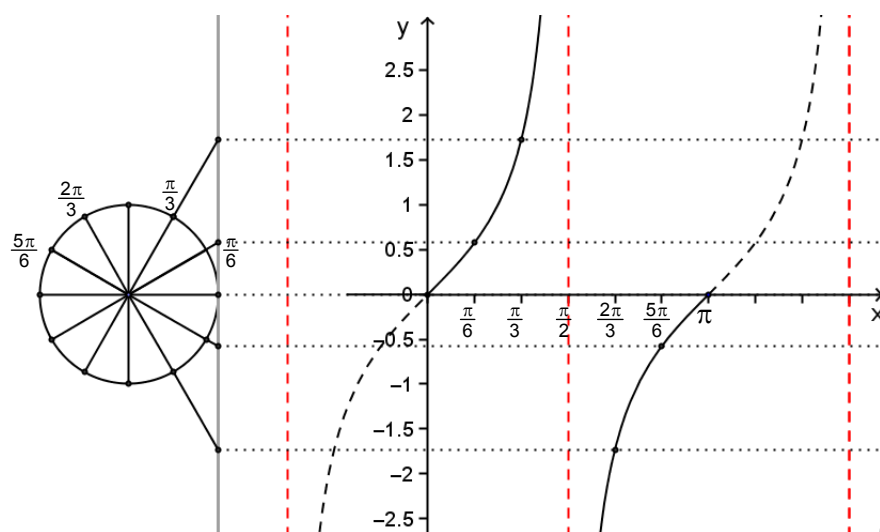
שני הקשרים תקפים כאשר שני האגפים מוגדרים.

ניתן להוכיח קשרים אלה גם ישירות מתוך המעגל הטריגונומטרי שבאיור 37.

לשם כך יש להראות שאורכי הקטעים OT ו- OC הם: $OT = \frac{1}{\cos \alpha}$ ו- $OC = \frac{1}{\sin \alpha}$.

נשאיר את ההוכחה לקוראים.

פעילות 5: הגרפים של הפונקציות טנגנס וקוטנגנס



איור 39

סרטוט גרף הפונקציה $y = \tan x$ מתוך מעגל היחידה

באיור 39 מייצג זווית ברדיאנים. ערך הפונקציה y מוגדר כאורך הקטע שהקרן המסתובבת (או המשכה), מקצה על המשיק למעגל היחידה בנקודה $(1,0)$.

סרטוט גרף הפונקציה $y = \cot x$ בדרכים אחדות

א. בעזרת הקשר בין הפונקציות $y = \cot x$ ו- $y = \tan x$.

נזכור:

- לכל x עבורו מוגדרות גם הפונקציה $y = \cot x$ וגם הפונקציה $y = \tan x$ מתקיים הקשר: $\cot x = \frac{1}{\tan x}$.
- ערכי x עבורם הפונקציה $y = \tan x$ אינה מוגדרת הם $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, לכל k שלם. בנקודות אלו $\cot x = 0$.
- העתיקו את גרף הפונקציה $y = \tan x$ וסרטטו באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $y = \cot x$.
- ב. הוכיחו את הקשר $\cot x = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, וסרטטו את גרף הפונקציה $y = \cot x$ לצד גרף הפונקציה $y = \tan x$ בעזרת קשר זה.

ג. ניתן לסרטט את גרף הפונקציה $y = \cot x$ באופן ישיר מתוך מעגל היחידה, אם מסובבים את מעגל היחידה רבע סיבוב נגד כיוון השעון, באופן דומה לדרך בה סרטטנו את גרף הפונקציה $y = \cos x$.

פונקציות טריגונומטריות ממשיות

הפונקציות בהן אנו עוסקים באנליזה הן פונקציות ממשיות, כלומר, פונקציות בהן הארגומנט (המשתנה הבלתי תלוי) וערך הפונקציה (המשתנה התלוי) שניהם מספרים ממשיים מופשטים. מספר ממשי מופשט הוא מספר טהור, ללא שם, אשר אינו כרוך בספירה או מדידה של עצמים קונקרטיים. לעומת זאת, מספר ממשי קונקרטי נושא את שם העצמים שנספרו או את שם יחידת המידה על פיה נערכה המדידה (5 תפוחים, 5 מטרים).

פונקציות המוגדרות באמצעות פעולות בין מספרים ממשיים מופשטים (פונקציות חזקה, פונקציות רציונליות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות), הן פונקציות ממשיות מעצם הגדרתן. בפונקציות הטריונומטריות, כפי שהן מוגדרות במעגל היחידה, המשתנה הבלתי תלוי הוא זווית או גודל הזווית, ולא מספר ממשי מופשט, בניגוד להגדרת פונקציות ממשיות. הסעיף הנוכחי דן בהגדרתן של הפונקציות הטריונומטריות **כפונקציות ממשיות**. הגדרה זו מאפשרת לשלב פונקציות טריגונומטריות עם פונקציות ממשיות אחרות בפעולות חשבון, למשל: לחשב את $f(x) = 2^x + \sin x$, ולחשב את הנגזרת $f'(x) = (2^x + \sin x)' = (2^x)' + (\sin x)'$.

מספר בעל שם ומספר בעל ממד

ברור כי גודל הזווית הוא מספר בעל שם (מעלות או רדיאנים). למספר אשר נוצר כתוצאה מדידה מסוימת יש שני אפיונים: ממד ושם. השם של תוצאת המדידה מקורו בשם של יחידת המידה (מעלה או רדיאן). המושג של ממד הוא מושג פיזיקלי שאינו זהה למושג השם. לא נביא כאן את הגדרתו המדויקת אלא רק נציין כי אם גודל מסוים **בעל שם** יכול להיחשב כיחס של שני אורכים שנמדדו בעזרת יחידות אורך כלשהן, אזי גודל זה נחשב **חסר ממד**. לפי ההגדרה, גודל ברדיאנים של זווית מרכזית במעגל שווה ליחס בין היקף (אורך) הקשת עליה היא נשענת, ואורך הרדיוס של המעגל, ולכן לפי הנ"ל גודל הזווית ברדיאנים חסר ממד. את הגודל במעלות של זווית מרכזית במעגל ניתן להציג כיחס בין אורך הקשת עליה הזווית נשענת, לבין האורך של החלק $\frac{1}{360}$ של המעגל. לכן גודל זווית במעלות אף הוא חסר ממד, כמו גודל זווית ברדיאנים. ניתן להבין טענה זו בדרך נוספת: גודל זווית במעלות נמצא ביחס ישר לגודלה ברדיאנים, כלומר: $\alpha^\circ = k \cdot \alpha_{rad}$. היות ו- α_{rad} חסר ממד, גם α° חסר ממד.

לסיכום: גודל של זווית הן ברדיאנים והן במעלות הוא מספר בעל שם, אבל הוא חסר ממד. לפי הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות במעגל היחידה, ערכי הפונקציות הטריגונומטריות הם מספרים ממשיים טהורים, חסרי ממד ושם, בעוד שהמשתנה הבלתי תלוי שלהן הוא זווית סיבוב (לא מספר) או גודל של זווית סיבוב ברדיאנים או במעלות (מספר חסר ממד אבל בעל שם). פונקציות מסוג זה אינן פונקציות ממשיות. בפונקציות ממשיות המשתנה וערך הפונקציה חייבים להיות שניהם מספרים ממשיים טהורים (חסרי ממד וחסרי שם).

נתבונן בביטוי $x + \sin x$. אם x הוא לא מספר ממשי טהור אלא מספר בעל שם, למשל $x = 2_{rad}$, הסכום הזה חסר משמעות כי אי-אפשר לחבר מספר בעל שם ומספר ללא שם. חיבור של שני מחוברים אפשרי רק כאשר שניהם מספרים ממשיים טהורים או מספרים בעלי אותו שם או בעלי שמות המרשים מעבר מאחד לשני, כמו, שקלים ואגורות או קילוגרמים וגרמים. ובכן, כדי שפונקציות טריגונומטריות תהיינה מתאימות לשימוש באנליזה, יש להגדיר אותן על קבוצת מספרים ממשיים טהורים, כלומר. מספרים מופשטים. במילים אחרות, עלינו לדעת מהו $\sin 2$ כאשר 2 הוא מספר שני בסדרת מספרים טבעיים, ולא 2 רדיאנים או 2 מעלות.

כדי להגיע להגדרת פונקציות טריגונומטריות ממשיות, מספיק בהגדרה לעיל לעבור מארגומנט שהוא מספר ממשי בעל שם לארגומנט שהוא מספר ממשי טהור, כפי שנעשה בהגדרה להלן.

פונקציות טריגונומטריות ממשיות - הגדרה

יהי x מספר ממשי כלשהו בתחום המספרים הממשיים: $x \in \mathbb{R}$. נגדיר:

$$\sin x = \sin x_{rad}, \cos x = \cos x_{rad}, \tan x = \tan x_{rad}, \cot x = \cot x_{rad}$$

כאשר סינוס/קוסינוס/טנגנס/קוטנגנס של x_{rad} מתפרש כ- סינוס/קוסינוס/טנגנס/קוטנגנס של זווית סיבוב במעגל היחידה אשר גודלה הוא x רדיאנים.

$$\sin 2 = \sin 2_{rad} = \sin\left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ} = \sin 114.59^{\circ} = 0.997 \quad \text{לפי הגדרה זו}$$

הערה

חשוב להימנע מדעה מוטעית נפוצה על פיה מספר רדיאנים, בהיותו מספר חסר ממד, הוא מספר ממשי טהור, ולכן ניתן להשתמש בו ללא שם. מספר בעל שם אינו מספר ממשי טהור, אף אם הוא חסר ממד, ולא ניתן להוריד את שמו "סתם" אלא רק במסגרת של הגדרה, כפי שנעשה בהגדרה לעיל.

מדוע הגדרת פונקציות טריגונומטריות ממשיות מתבססת על מידת הזוויות ברדיאנים ולא במעלות?

נציע שתי סיבות:

א. קבלת נוסחאות יותר פשוטות

הגדרה אשר מתבססת על רדיאנים מקלה על תיאור תכונות של פונקציות טריגונומטריות ממשיות, ועל צורת נוסחאות גזירה עבורן. למשל, אילו היו מגדירים פונקציות טריגונומטריות ממשיות על בסיס מדידת זוויות במעלות, המחזור שלהן היה מספר ממשי ענק $T = 360$ ולא מספר קטן יחסית $T = 2\pi$, וכתוצאה מכך לא הייתה אפשרות להציג את הגרפים של פונקציות טריגונומטריות ממשיות במערכת צירים קרטזית עם אותה יחידה על הצירים. כמו כן, אילו הגדרתן של פונקציות טריגונומטריות ממשיות הייתה מתבססת על מידת זוויות

במעלות, הנוסחאות עבור נגזרותיהן היו יותר מסובכות. למשל, אילו במקום $\sin x = \sin x_{rad}$ היה מוגדר

$$\sin x = \sin x^\circ, \text{ אזי במקום } (\sin x)' = \cos x \text{ היה } (\sin x)' = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{180} x.$$

ב. שקילות להגדרה שאינה כרוכה בזוויות

ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות על בסיס מידת זוויות ברדיאנים שקולה להגדרת פונקציות טריגונומטריות ללא שימוש בזוויות כלל. כלומר, אם $0 < x < 2\pi$, נציין על מעגל היחידה נקודה A כך ש- $\widehat{AN} = x$ (איור 8), ואז נגדיר:

$$\sin x = y_A, \cos x = x_A, \tan x = \frac{y_A}{x_A}, \cot x = \frac{x_A}{y_A}.$$

לכל x ממשי מחוץ לקטע $0 < x < 2\pi$ נגדיר פונקציות טריגונומטריות על-פי תכונת המחזוריות במחזור 2π . הגדרה זו מביאה מידית לפונקציות ממשיות, כלומר, פונקציות בהן המשתנה הבלתי תלוי וערך הפונקציה שניהם מספרים ממשיים טהורים. היות ואורך הקשת $\widehat{AB}$ במעגל היחידה, שווה למידת הזווית הנשענת על קשת זו ברדיאנים, מסיקים כי הגדרה של פונקציות טריגונומטריות על בסיס אורך הקשת, שקולה להגדרתן על מידת הזווית ברדיאנים.

פונקציות טריגונומטריות רגע לפני הנגזרת

פעולות ליניאריות בפונקציות טריגונומטריות

$$\text{נתבונן בפונקציות: } y = 3\sin(x), y = \cos(2x) + 1, y = 3\cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right), y = 3\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$g(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 4.$$

כל אחת מן הפונקציות לעיל התקבלה מאחת מהפונקציות הטריגונומטריות $\sin x, \cos x, \tan x$ או $\cot x$ על-ידי פעולה ליניארית⁴.

ההיכרות עם תכונותיהן של פונקציות המתקבלות כתוצאה מהפעלה של פעולה ליניארית על פונקציה טריגונומטרית, מאפשרת לתאר ולסרטט ללא שימוש בנגזרת את הגרפים של פונקציות מהצורה $y = Af(ax + b) + B$, כאשר $f(x)$ אחת מן הפונקציות הטריגונומטריות היסודיות $\sin x, \cos x, \tan x$ או $\cot x$. לגרפים של פונקציות טריגונומטריות יש תכונות ויזואליות בולטות המבליטות את השינויים החלים בגרף הפונקציה בעקבות הפעולה הליניארית, ולכן עיסוק בפעולות ליניאריות בהקשר של פונקציות טריגונומטריות תורם להבנה של הפעולות הליניאריות.

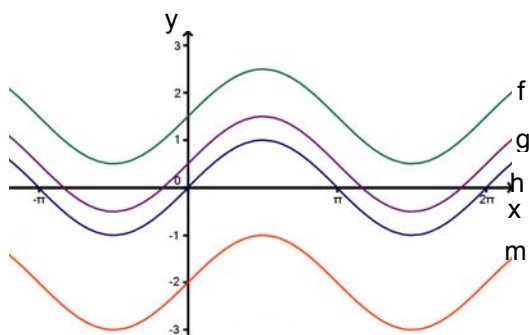
בפרק זה נביא מגוון פעילויות המדגימות סוגים מגוונים של משימות המתאימות לדין בפעולות ליניאריות, כגון: העלאת השערות מתוך התבוננות, מתן הסברים, זיהוי פונקציות על-פי הגרפים, מציאת פונקציות על-פי תכונותיהן.

ההסברים הדרושים יוצגו כחלק מהתשובות לפעילות.

⁴ הנושא "פעולות ליניאריות בפונקציות" טופל בהרחבה בפרק "פונקציות ממשיות" (עמוד 37)

פעילות 6: מגרף הפונקציה $y = \sin x$ אל משפחות של פונקציות

1.



איור 40

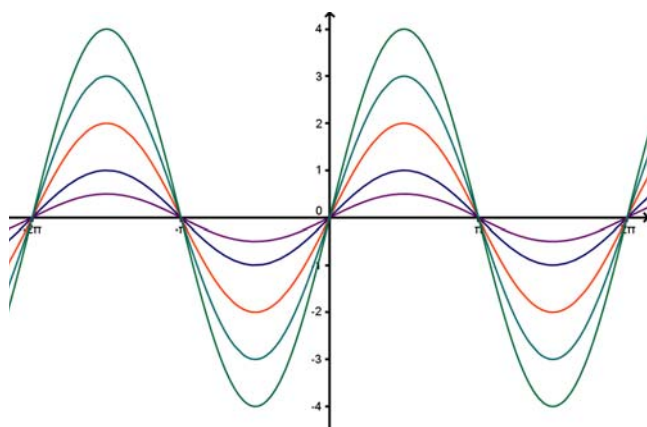
א. סרטטו במחשב את הגרפים של הפונקציות הבאות:
 (1) $y = \sin x$ (2) $y = \sin x + 2$ (3) $y = \sin x - 4$

ב. הפונקציות שסרטטתם הן מהמשפחה $y = \sin x + B$.
 תארו את השפעת הפרמטר B על:
 (1) מחזור הפונקציה, (2) קבוצת ערכי הפונקציה,
 (3) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

ג. לפניכם (איור 40) גרפים של פונקציות מהמשפחה $y = \sin x + B$. זהו את הפרמטר B .

ד. הביאו, אם ניתן, דוגמאות לפונקציות מהמשפחה $y = \sin x + B$ עם התכונות הבאות (אם לא קיימת דוגמה – הסבירו מדוע. אם ניתן להביא יותר מדוגמה אחת – הביאו דוגמאות אחדות). (1) הערך המקסימלי של הפונקציה הוא 3. (2) לפונקציה אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x . (3) מחזור הפונקציה הוא π .

2.



איור 41

א. סרטטו במחשב את הגרפים של הפונקציות הבאות:

$$(1) y = \sin x \quad (2) y = 2 \sin x$$

$$(3) y = 0.5 \sin x \quad (4) y = 4 \sin x$$

ב. הפונקציות שסרטטתם הן מהמשפחה $y = |A| \sin x$. תארו את השפעת הפרמטר A על:
 מחזור הפונקציה, קבוצת ערכי הפונקציה, ונקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. לפניכם (איור 41) גרפים של פונקציות מהמשפחה $y = |A| \sin x$.

זהו את הפרמטר A .

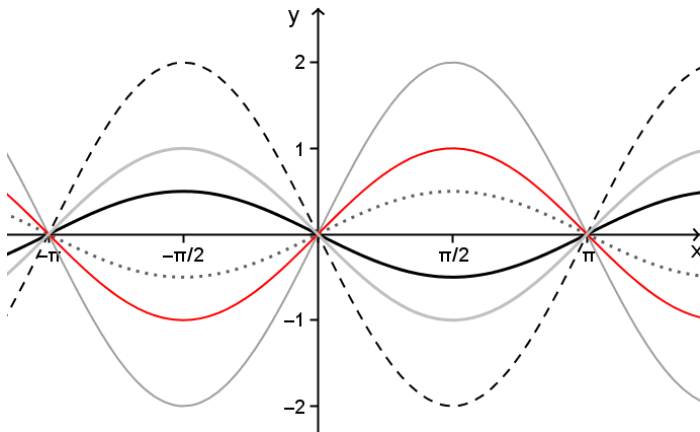
ד. הביאו, אם ניתן, דוגמאות לפונקציות מהמשפחה $y = |A| \sin x$ עם התכונות המצוינות ברשימה הבאה (אם לא קיימת דוגמה – הסבירו מדוע. אם ניתן להביא יותר מדוגמה אחת – הביאו דוגמאות אחדות). בדקו את תשובותיכם במחשב.

(1) גרף הפונקציה עובר בנקודה $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; (2) הערך המקסימלי של הפונקציה הוא 3;

(3) לפונקציה אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x ; (4) מחזור הפונקציה הוא π .

3.

א. סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות (1) $y = 2 \sin x$ (2) $y = -2 \sin x$.



איור 42

ב. תארו קשרים בין הגרפים של שתי הפונקציות והסבירו אותם.

ג. סרטטו במערכת צירים אחת גרפים של 3 פונקציות מהמשפחה $y = -|A| \sin x$. רשמו כמה שיותר תכונות משותפות של הפונקציות.

ד. לפניכם גרפים של פונקציות מהמשפחה $y = A \sin x$ (איור 42). זהו את הפרמטר A .

4. לפניכם גרף הפונקציה $y = \sin x$.

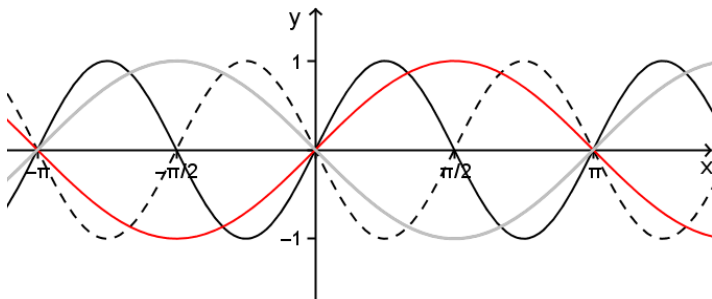
א. מבלי לסרטט את גרף הפונקציה במחשב, שערו כיצד נראה גרף הפונקציה $y = \sin(2x)$, וסרטטו גרף משוער של הפונקציה. בדקו את השערתכם במחשב.

ב. רשמו תכונות של הפונקציה $y = \sin(2x)$: מהו מחזור הפונקציה? מהי קבוצת ערכי הפונקציה? מהן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים?

ג. מבלי לסרטט את גרף הפונקציה במחשב, שערו כיצד נראה גרף הפונקציה $y = \sin(-x)$ וסרטטו גרף משוער של הפונקציה. בדקו את השערתכם במחשב.

ד. סרטטו במחשב את הגרפים של הפונקציות הבאות: (1) $y = \sin x$; (2) $y = \sin(2x)$; (3) $y = \sin(0.5x)$; (4) $y = \sin(-x)$; (5) $y = \sin(-2x)$.

ה. הפונקציות שסרטטתם הן מהמשפחה $y = \sin(ax)$. תארו את השפעת הפרמטר a על: מחזור הפונקציה,



איור 43

קבוצת ערכי הפונקציה, נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, ואת השפעת הסימן של a על הגרף.

ו. לפניכם (איור 43) בו גרפים של פונקציות מהמשפחה $y = \sin(ax)$. זהו את הפרמטר a .

ז. הביאו, אם ניתן, דוגמאות לפונקציות מהמשפחה $y = \sin(ax)$ עם התכונות

הבאות ברשימה הבאה (אם לא קיימת דוגמה – הסבירו מדוע. אם ניתן להביא יותר מדוגמה אחת – הביאו דוגמאות אחדות). בדקו את תשובותיכם במחשב.

(1) גרף הפונקציה עובר בנקודה $(0, \frac{1}{2})$; (2) הערך המקסימלי של הפונקציה הוא 3; (3) לפונקציה אין

נקודות חיתוך עם ציר ה- x ; (4) מחזור הפונקציה הוא π ; (5) גרף הפונקציה עובר בנקודה $(\pi, 0)$.

5.

א. מבלי לסרטט את גרף הפונקציה במחשב, שערך כיצד נראה גרף הפונקציה $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, וסרטטו גרף משוער של הפונקציה. בדקו את השערתכם במחשב.

ב. הוסיפו גם את גרף הפונקציה $y = \sin x$. מה הקשר בין גרף הפונקציה $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ לגרף הפונקציה $y = \sin x$?

ג. כדי להבין את הקשר בין הגרפים של שתי הפונקציות נבנה טבלת ערכים. השלימו את הערכים החסרים בטבלה הבאה.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$
$y = \sin x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0				

טבלה 4

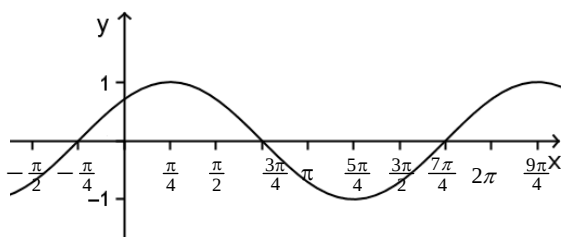
ניתן לראות שהפונקציה $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ מקבלת כל אחד מן הערכים של הפונקציה $y = \sin x$ עמודה אחת ימינה לזו שהפונקציה $y = \sin x$ קיבלה את אותו הערך. גרף הפונקציה $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ מתקבל

כהזזה של גרף הפונקציה $y = \sin x$ ימינה ב- $\frac{\pi}{4}$ יחידות.

ד. סרטטו במחשב את הגרפים של הפונקציות: (1) $y = \sin x$ (2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (3) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ (4) $y = \sin(x + 2\pi)$.

ה. על צג המחשב מסורטטים עתה 3 גרפים בלבד. מדוע?

ו. הפונקציות שסרטטתם הן מהמשפחה $y = \sin(x + b)$. מהי השפעת הפרמטר b על: מחזור הפונקציה, קבוצת ערכי הפונקציה, נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ?



איור 44

ז. הגרף המוצג באיור 44 הוא של פונקציה מהמשפחה $y = \sin(x + b)$. הציעו ערך אפשרי לפרמטר b . האם קיימת אפשרות נוספת? הסבירו.

פעילות 7: גרף הפונקציה $y = A \cos(ax + b) + B$

נתונה הפונקציה $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

1. לפני שאתם מסרטטים את גרף הפונקציה במחשב, נסו לתאר את:

א. מחזור הפונקציה ב. קבוצת ערכי הפונקציה ג. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
בדקו את תשובתכם במחשב.

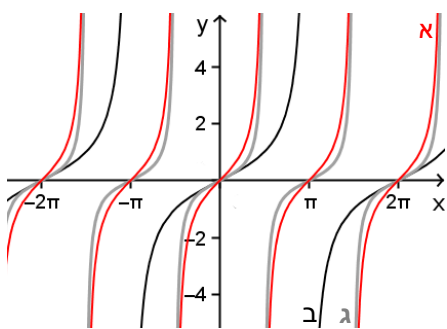
2. הוסיפו לסרטוט את גרף הפונקציה $y = \cos 2x$.

3. האם נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ עם ציר ה- x זהו ב- $\frac{\pi}{3}$ יחידות, לעומת נקודות החיתוך עם ציר ה- x של גרף הפונקציה $y = \cos 2x$? הסבירו מדוע או מדוע לא. נסו למצוא יותר מאשר הסבר אחד.

4. הסבירו מדוע גרף הפונקציה $y = 4 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ מתקבל כהזזה אופקית ב- $\frac{\pi}{6}$ יחידות ימינה של גרף הפונקציה $y = 4 \cos(3x)$.

5. סרטטו על דף את גרף הפונקציה $y = 0.5 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$, ובדקו את תשובתכם במחשב.

פעילות 8: מתיחות של הפונקציה $y = \tan x$



איור 45

1. באיור 45 מוצגים הגרפים של הפונקציות $y = \tan x$, $y = 0.5 \tan x$, ו- $y = \tan(0.5x)$. זהו את הגרף המתאים לכל פונקציה.

2. הוסיפו את גרף הפונקציה $y = \tan(-0.5x)$ ואת גרף הפונקציה $y = -0.5 \tan x$. הסבירו את התופעה.

3. כיצד משפיע הפרמטר a על תכונות הפונקציות במשפחה $y = \tan(ax)$?

4. כיצד משפיע הפרמטר A על תכונות הפונקציות במשפחה $y = A \tan x$?

פעילות 9: שימוש בטרנספורמציות של הפונקציות הטריגונומטריות עם דגש על תכונות הפונקציות

1. א. סרטטו במחשב את הפונקציות: א. $y = \cos x$ ב. $y = \cos(-x)$.

ב. על צג המחשב מופיע גרף אחד. הסבירו מדוע.

ג. רשמו פונקציה נוספת ששווה לפונקציות שמופיעות בסעיף א. בדקו באמצעות המחשב והסבירו.

2. מצאו בין הפונקציות הבאות קבוצות של פונקציות שוות, והסבירו כל שוויון בדרכים אחדות.

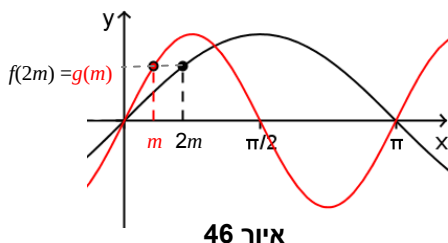
א. $y = \cos x$ ב. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ג. $y = \cos(x + \pi)$ ד. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ה. $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
ו. $y = \cos(\pi - x)$ ז. $y = \sin(-x)$ ח. $y = \cos 2x$ ט. $y = -\sin x$ י. $y = \cos(-2x)$

3. רשמו זוגות נוספים של פונקציות שוות והוכיחו את השוויון.

מבחר פתרונות והארות לפעילויות העוסקות בטרנספורמציות של פונקציות טריגונומטריות (פעילויות 6 – 9)

פעילות 6 - פתרון

- סעיף זה עוסק בהזזות אנכיות. הפונקציות מהמשפחה $y = \sin x + B$ הן הזזות אנכיות של הפונקציה $y = \sin x$. כאשר B חיובי ההזזה היא כלפי מעלה, וכאשר B שלילי ההזזה היא כלפי מטה. מבחר פתרונות: ב. (1) אין השפעה (2) קבוצת ערכי הפונקציה: $B - 1 \leq y \leq B + 1$ (3) $(0, B)$. ג. $f(x) = \sin x + 1.5$, $g(x) = \sin x + 0.5$, $h(x) = \sin x$, $m(x) = \sin x - 2$. ד. (1) הערך המקסימלי הוא 3 כאשר $B = 2$ ולכן $y = \sin x + 2$ דוגמה יחידה. (2) כל פונקציה מהמשפחה שמקיימת $B > 1$ היא דוגמה מתאימה. (3) ההזזה האנכית אינה משפיעה על המחזור ולכן לא קיימת דוגמה.
- סעיף זה עוסק במתיחות וכיווצים אנכיים, והבנתו היא אינטואיטיבית. הפונקציות מהמשפחה $y = A \sin x$, הן עם מתיחות אנכיות של הפונקציה $y = \sin x$ עבור $1 < A$, וכיווצים אנכיים עבור $0 < A < 1$. המשפחה $y = |A| \sin x$ כוללת גם את הפונקציה $y = \sin x$ עצמה ואת המקרה המנוון $y = 0$. מבחר פתרונות: ב. אין השפעה על מחזור הפונקציה ועל נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים. ד. (1) אין דוגמה מתאימה כי כל הגרפים מהמשפחה עוברים בראשית הצירים. (2) $y = 3 \sin x$. (4) אין דוגמאות מתאימות. מתיחות וכיווצים אנכיים אינם משפיעים על המחזור ואינם משפיעים על נקודות החיתוך עם ציר ה- x .
- סעיף זה עוסק בפונקציות המתקבלות זו מזו על-ידי שיקוף בציר ה- x , ומרחיב את המשפחה $y = A \sin x$ לכל פרמטר ממשי A .
- סעיף זה עוסק במשפחת הפונקציות $y = \sin(ax)$. הגרפים של הפונקציות מהמשפחה $y = \sin(ax)$ הם כיווצים אופקיים של גרף הפונקציה $y = \sin x$ כאשר $1 < a$, ומתיחות אופקיות של גרף הפונקציה $y = \sin x$ כאשר $0 < a < 1$. פעולות אלו נחשבות נגודות את האינטואיציה. לכל a , גרף הפונקציה $y = \sin(-ax)$ הוא שיקוף ביחס לציר ה- y של גרף הפונקציה $y = \sin(ax)$. כדי להבין מדוע הגרף "מתכווץ אופקית" כאשר כופלים את המשתנה x בפרמטר $1 < a$, נחשוב על הפונקציות $f(x) = \sin x$ ו- $g(x) = \sin(2x)$ (איור 46). לכל m : $g(m) = \sin(2m) = f(x)$. כל ערך שהפונקציה $f(x) = \sin x$ מקבלת עבור $x = m$ הפונקציה $g(x) = \sin(2x)$ מקבלת "כבר בחצי הדרך". בפרט: $g(\frac{\pi}{2}) = \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = f(\pi)$. $g(\pi) = \sin(2 \cdot \pi) = f(2\pi)$. מבחר תשובות לסעיף 4: ב. הפונקציה "התכווצה" אופקית פי 2 ולכן המחזור שלה π . ג. גרף הפונקציה $y = \sin(-x)$ הוא שיקוף ביחס לציר ה- y של גרף הפונקציה $y = \sin(x)$. בגלל האי-זוגיות של הפונקציה $y = \sin(x)$, הפונקציות $y = \sin(-x)$ ו- $y = -\sin(x)$ שוות.



איור 46

ה. מחזור הפונקציה $y = \sin(ax)$ ($a \neq 0$) הוא $\frac{2\pi}{|a|}$. כל הגרפים מהמשפחה עוברים בראשית. נקודות החיתוך עם ציר ה- x הן $\left(\frac{\pi k}{|a|}, 0\right)$, כאשר k שלם, ו- $a \neq 0$. לכיוון האופקי אין השפעה על קבוצת הערכים של הפונקציה.

ז. (1) לא קיימת דוגמה. (2) לא קיימת דוגמה. (3) לא קיימת דוגמה. (4) $y = \sin(2x)$; $y = \sin(-2x)$. (5) קיימות דוגמאות רבות, למשל, $y = \sin(70x)$. כל פונקציה $y = \sin(ax)$ עם a זוגי היא דוגמה מתאימה.

5. סעיף זה עוסק בהזזות אופקיות. כאשר $0 < b$ גרף הפונקציה $y = \sin(x+b)$ הוא הזזה אופקית ב- b יחידות שמאלה, וכאשר $b < 0$ גרף הפונקציה $y = \sin(x+b)$ הוא הזזה אופקית ב- $|b|$ יחידות ימינה. כיוון ההזזה נחשב נוגד את האינטואיציה. סעיף ג עוסק בהסבר התופעה באמצעות טבלת ערכים.

פעילות 7 - פתרון

פעילות זו עוסקת בשילוב של פעולות ליניאריות.

3. גרף הפונקציה $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ הוא הזזה של גרף הפונקציה $y = \cos(2x)$ ב- $\frac{\pi}{6}$ יחידות שמאלה. כתיבת הפונקציה כ- $y = \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$ מבליטה את גודל ההזזה.

4. נרשום את הפונקציה כ- $g(x) = 4\cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$. הצבת $x = m$ בפונקציה $g(x) = 4\cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$ כמוה כהצבת $x = m - \frac{\pi}{6}$ בפונקציה $f(x) = 4\cos(3x)$.

פעילות 8 - פתרון

1. א. $y = \tan x$ ב. $y = \tan(0.5x)$ ג. $y = 0.5 \tan x$.

2. מתכונת האי-זוגיות של הפונקציה $y = \tan x$ מקבלים $\tan(-0.5x) = -\tan(0.5x)$, ולכן הגרפים של הפונקציות $y = \tan(-0.5x)$ ו- $y = -0.5 \tan x$ מתלכדים.

3. כאשר $0 < a < 1$, גרף הפונקציה $y = \tan(ax)$ הוא מתיחה אופקית פי a של גרף הפונקציה $y = \tan x$. כאשר $a > 1$, גרף הפונקציה $y = \tan(ax)$ הוא כיווץ אופקי פי $\frac{1}{a}$ של גרף הפונקציה $y = \tan x$. מחזור הפונקציה גדל או קטן בהתאם למתיחה או לכיווץ ואתו גדל או קטן המרחק בין האסימפטוטות. כאשר $a = 1$ גרף הפונקציה נותר ללא שינוי. כאשר $a = 0$ מתקבלת הפונקציה הקבועה $y = 0$. הגרף של הפונקציה $f(-x)$ הוא שיקוף בציר ה- y של גרף הפונקציה $f(x)$.

4. כאשר $1 < A$ גרף הפונקציה $y = A \tan x$ הוא מתיחה אנכית פי A של גרף הפונקציה $y = \tan x$. כאשר $0 < A < 1$ גרף הפונקציה $y = A \tan x$ הוא כיווץ אנכי פי $\frac{1}{A}$ של גרף הפונקציה $y = \tan x$. כאשר $a = 1$ גרף הפונקציה נותר ללא שינוי. כאשר $a = 0$ מתקבלת פונקציה שתחומה הוא תחום הפונקציה $y = \tan x$, וכל ערכיה שווים לאפס. הפרמטר אינו משפיע על המחזור או על המרחק בין האסימפטוטות, למעט המקרה

$A = 0$ שבו אין לפונקציה אסימפטוטות. גרף של הפונקציה $Af(x) -$ הוא שיקוף בציר ה- x של גרף הפונקציה $Af(x)$.

פעילות 9 - פתרון

1. א. בגלל הזוגיות של הפונקציה $y = \cos x$, הגרפים של הפונקציות $y = \cos x$ ו- $y = \cos(-x)$ מתלכדים.

ב. $\cos(|x|)$.

2. קבוצות של פונקציות שוות:

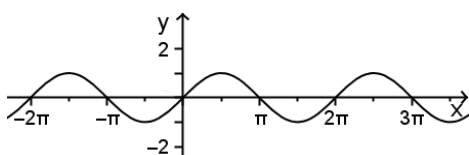
א. $y = \cos x$ ב. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ד. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

ג. $y = \cos(x + \pi)$ ו. $y = \cos(\pi - x)$

ז. $y = \sin(-x)$ ט. $y = -\sin x$

ח. $y = \cos 2x$ י. $y = \cos(-2x)$

פעילות 10: סרטוט גרפים של פונקציות טריגונומטריות מורכבות ללא שימוש בנגזרת



איור 47

איור 47 מציג את גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$.

1. סרטטו באותה מערכת צירים את הגרפים של הפונקציות:

א. $h(x) = \sin^2 x$ ב. $y = \sqrt{\sin x}$ ג. $y = |\sin x|$ ד. $y = \sin|x|$.

2. בדקו את תשובותיכם במחשב.

3. אחת מן הפונקציות שסרטטתם בסעיף הקודם איננה מחזורית. הסבירו מדוע.

תשובות: הפונקציה $y = \sin|x|$ היא היחידה מבין הפונקציות הנתונות שבה הפונקציה $y = \sin x$ איננה הפונקציה הפנימית של הפונקציה המורכבת. כל 4 הפונקציות הן פונקציות מורכבות. בפונקציות $h(x) = \sin^2 x$, $y = \sqrt{\sin x}$ ו- $y = |\sin x|$ הפונקציה $y = \sin x$ היא הפונקציה הפנימית ולכן הפונקציות מחזוריות. הפונקציה $y = \sin|x|$ איננה מחזורית. ניתן לראות, למשל, שלפונקציה יש נקודה אחת בלבד, בראשית הצירים, שבה הפונקציה איננה גזירה.

פעילות 11: מחזור הפונקציה

מקרה א: בפונקציה משולבות פונקציות מחזוריות עם אותו מחזור

האם הפונקציה $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sin x$ מחזורית? אם כן - מהו המחזור?

נענה על השאלה בשתי דרכים.

דרך א: כיוון שהפונקציה $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sin x$ היא סכום של שתי פונקציות שהמחזור שלהן הוא 2π , ניתן

להסיק שגם הפונקציה g מחזורית עם מחזור 2π .

באופן פורמלי נראה זאת כך:

$$g(x + 2\pi) = \sin\left(x + 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x + 2\pi) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x = g(x)$$

נציין כי הראינו שלפונקציה קיים מחזור 2π , אך לא הראינו שזהו המחזור הקטן ביותר של הפונקציה.

דרך ב: על-ידי שימוש בזהות $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ נקבל:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x = 2 \sin \frac{2x + \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

מתוך היכרותנו עם ההשפעה של פעולות לינאריות על פונקציות, ניתן לקבוע כי הפונקציה שהתקבלה היא הזזה שמאלה של הפונקציה $y = \sin x$, ומתיחה אנכית של הגרף פי $\sqrt{2}$. מכאן שהמחזור אינו משתנה ביחס לפונקציה $y = \sin x$ והוא שווה ל- 2π .

מקרה ב: בפונקציה משולבות פונקציות עם מחזורים שונים שיש להם מידה משותפת

נתבונן בפונקציה: $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

הגורם $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ הוא פונקציה מחזורית עם מחזור 4π . הגורם $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ הוא פונקציה מחזורית עם מחזור 6π .

הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של שני המחזורים היא 12π . נראה כי 12π הוא מחזור של הפונקציה

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(x + 12\pi) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x + 12\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + 12\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{3} + 4\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + 6\pi\right) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

הראינו כי 12π הוא מחזור של הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$. לא הראינו שזהו המחזור הקטן ביותר.

מהו מחזור הפונקציה?

לפניכם רשימה של פונקציות.

א. נסו לקבוע ללא שימוש בכלים של החשבון הדיפרנציאלי אילו מהפונקציות ברשימה מחזוריות ואילו אינן מחזוריות. אם לדעתכם פונקציה היא מחזורית – מהו אורך המחזור?

$$j(x) = \sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \quad .3$$

$$l(x) = \cos^3 2x \quad .6$$

$$k(x) = \tan 2x + 4 \quad .9$$

$$t(x) = \sin 3x \cdot \cos 3x \quad .12$$

$$m(x) = \sin x + 2 \cos x \quad .2$$

$$q(x) = \sin 2x + 2 \quad .5$$

$$s(x) = \sin(3x - \pi) + 2 \cos(4x + \pi) \quad .8$$

$$r(x) = \cos^2 x \quad .11$$

$$f(x) = \sin 2x \quad .1$$

$$g(x) = x + \sin x \quad .4$$

$$h(x) = x \cdot \cos 2x \quad .7$$

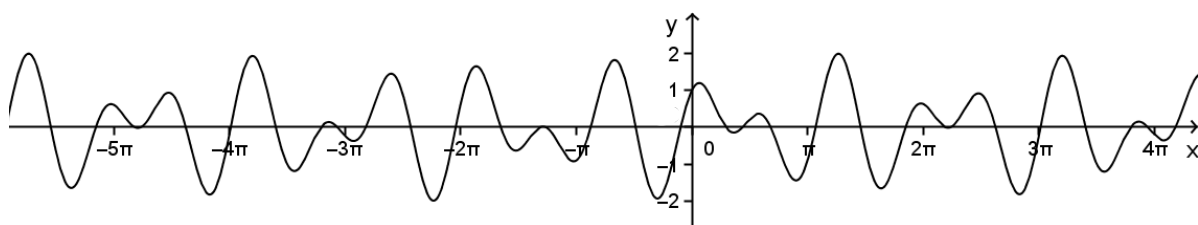
$$t(x) = (\sin 2x + \cos 2x)^2 \quad .10$$

ב. בדקו את תשובותיכם באמצעות מחשב. 

ג. עבור אילו פונקציות היה קשה יותר להחליט לגבי מחזוריותן ועבור אילו היה קשה פחות? מדוע? 

שאלות העמקה וחידוד

- האם סכום של פונקציות מחזוריות הוא תמיד פונקציה מחזורית?
התשובה שלילית. אם למחזורים של שתי הפונקציות אין מידה משותפת אז סכומן אינו פונקציה מחזורית.
לדוגמה, הפונקציה $f(x) = \sin(2x) + \cos(\pi x)$ איננה מחזורית. גרף הפונקציה מוצג באיור 48.
- האם סכום של שתי פונקציות לא מחזוריות יכול להיות פונקציה מחזורית?
התשובה חיובית. לדוגמה, הפונקציות $y = \sin x + x$ ו- $y = \sin x - x$ אינן מחזוריות ואילו סכומן, הפונקציה $y = 2 \sin x$ הוא פונקציה מחזורית.



איור 48

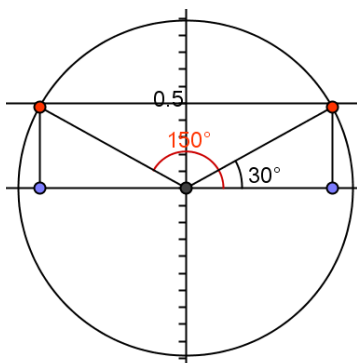
פתרון משוואות טריגונומטריות תוך הבלטת תכונות הפונקציות והקשרים ביניהן

סעיף זה לא נועד למצות את כל דרכי הפתרון של משוואות טריגונומטריות, אלא להדגים שימוש: בזהויות טריגונומטריות המבוססות על תכונות הפונקציות, בקשרים בין הפונקציות, במעגל היחידה, ובגרפים של הפונקציות, במהלך פתרון משוואות טריגונומטריות. כמו כן, נועד סעיף זה להדגיש את התרומה של פתרון משוואות טריגונומטריות לביסוס התכונות של הפונקציות הטריגונומטריות, ולהעמקת ההבנה של הקשרים ביניהן. לסיום, יודגם מצב שבו פתרון של המשוואות בדרכים שונות מוביל לפתרונות שנראים כלפי חוץ שונים, אך כתיבה מפורשת של הפתרונות בתוך מחזור אחד של הפונקציה, מראה שבשתי הדרכים מתקבלת אותה קבוצת פתרונות.

דוגמה א

דוגמה זו מדגימה מציאת פתרונות יסודיים ופתרון כללי באמצעות מעגל היחידה, הצגה מאורגנת של כל הפתרונות בתחום נתון, הצגתם על גרף הפונקציה, ובדיקה אם מספר הפתרונות תואם את הציפיות לאור ההיכרות עם גרף הפונקציה.

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{נתונה המשוואה}$$



איור 49

יש למצוא פתרון כללי של המשוואה ואת כל הפתרונות בתחום $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

בדוגמה זו, בה נתון ערך הסינוס של זווית מוכרת, נמצא פתרון יסודי ראשון, $x = 30^\circ$ מתוך ידע אישי, או באמצעות המחשבון. את הפתרון היסודי השני, $x = 150^\circ$, נמצא, תוך התבוננות במעגל היחידה, באמצעות הזהות $\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$.

הפתרון הכללי של המשוואה הוא אם כך:

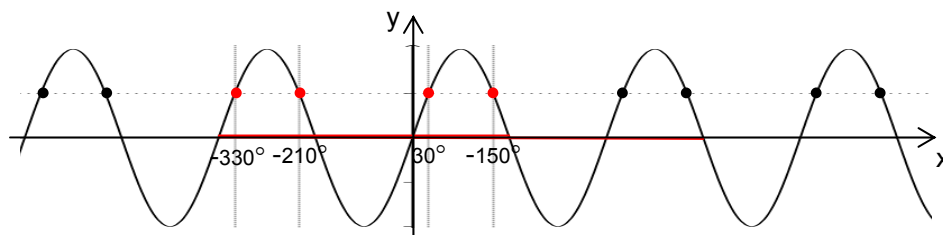
$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \quad x_2 = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \quad k \text{ מספר שלם.}$$

את הפתרונות בתחום $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$ נוז למצוא באמצעות טבלה.

$x_2 = 150^\circ + 360^\circ \cdot k$	$x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k$	k
$150^\circ + 360^\circ \cdot 0 = 150^\circ$	$30^\circ + 360^\circ \cdot 0 = 30^\circ$	0
$150^\circ + 360^\circ \cdot 1 = 510^\circ$ מחוץ לתחום	$30^\circ + 360^\circ \cdot 1 = 390^\circ$ מחוץ לתחום	1
$150^\circ + 360^\circ \cdot (-1) = -210^\circ$	$30^\circ + 360^\circ \cdot (-1) = -330^\circ$	-1
$150^\circ + 360^\circ \cdot (-2) = -670^\circ$ מחוץ לתחום	$30^\circ + 360^\circ \cdot (-2) = -690^\circ$ מחוץ לתחום	-2

טבלה 5

נסמן את הפתרונות על גרף הפונקציה $y = \sin x$.



איור 50

מצאנו 4 פתרונות. זהו אכן מספר הפתרונות שאנחנו מצפים לו בשני מחזורים של הפונקציה.

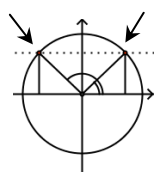
דוגמה ב

נתונה המשוואה: $-\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

נשתמש בזהות $\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$ ונקבל משוואה שקולה: $\sin(-x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

מתוך התבוננות במעגל היחידה ניתן להבחין כי קיימות שתי אפשרויות בהן השוויון האחרון מתקיים.

אפשרות ב



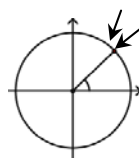
הזוויות בשני אגפי המשוואה מיוצגות על מעגל היחידה על-ידי נקודות סימטריות ביחס לציר ה-y.

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow -x + x + \frac{\pi}{6} &= \pi + 2\pi k \\ \Rightarrow \frac{\pi}{6} &= \pi + 2\pi k \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} k \text{ מספר} \\ \text{שלם} \end{array}$$

לא יכול להתקיים שוויון בין אגפי המשוואה ולכן מצב זה לא מוביל לפתרון.

כלומר, קיבלנו אוסף של אינסוף פתרונות מחזוריים: $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$, k מספר שלם.

אפשרות א



הזוויות מיוצגות על-ידי אותה נקודה על מעגל היחידה.

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow -x &= x + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \Rightarrow -2x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \Rightarrow x &= -\frac{\pi}{12} + \pi k \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} k \text{ מספר} \\ \text{שלם} \end{array}$$

הערות

- שימוש בזהויות טריגונומטריות על מנת להביא את המשוואה לצורה $\sin a = \sin b$ מהווה טכניקה פשוטה לפתרון משוואות, וגם מאפשר לחזור על הזהויות הטריגונומטריות בהקשר משמעותי.
- הדוגמה מדגימה משוואה שבה אחת מקבוצות הפתרון ריקה. חשוב לחשוף את התלמידים למצבים כאלה.
- אחת הטעויות הנפוצות אצל תלמידים היא שהם לפעמים משווים את הזוויות מבלי להתחשב במחזור, ומוסיפים את המחזור רק בסוף התהליך. כתוצאה מכך הם מקבלים פתרון שבו הפתרונות מתקבלים במחזור של 2π גם במקרים שאין הדבר כך. ההדגמה של המצבים האפשריים במעגל היחידה, והדגשת מחזור הפונקציה יכולות לתמוך במניעת הטעות הנפוצה הזאת.

דוגמה ג

נתונה המשוואה: $\cos^2 x + \sin x = 1$.

פתרון: נשתמש בזהות יסודית טריגונומטרית, נציב $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ונקבל

משוואה שקולה: $1 - \sin^2 x + \sin x = 1$.

מכאן נקבל משוואה ריבועית: $-\sin^2 x + \sin x = 0$

נוציא גורם משותף ונקבל: $\sin x \cdot (\sin x - 1) = 0$

$$\sin x = 0$$

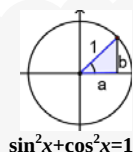
$$\sin x = 1$$

$$x = k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

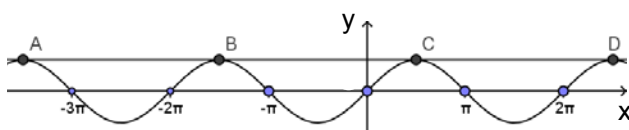
k מספר שלם

k מספר שלם



הערות

העיסוק במשוואה זו מספק הזדמנות לחזור לגרף הפונקציה (איור 51), ולהראות מדוע בקבוצת הפתרונות הראשונה יש רק פתרון אחד בכל מחזור של פונקציית הסינוס. ומדוע בקבוצת הפתרונות השנייה ההפרש בין כל שני פתרונות סמוכים הוא π .



איור 51

דוגמה ד

את המשוואה $2\sin^2 x - 1 = 0$ ניתן לפתור בדרכים אחדות. נציג כאן שתי דרכי פתרון. שתי הדרכים מובילות לפתרונות שהם שונים למראית עין, כיוון שהם מיוצגים באופן שונה. פתרונות שונים למראית עין, או שונים מהפתרון המוצג בספר, עלולים לגרום לתלמידים לחשש שטעו. בחינת הפתרונות במעגל היחידה מראה שהפתרונות שקולים. דיון בתרגילים מסוג זה מכון את התלמידים לחפש את השקילות של פתרונות שהם שונים למראית עין, ובכך חשיבותו.

בכל הפתרונות k מייצג מספר שלם.

דרך א: ניעזר בזהות: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ונפתור משוואה שקולה:

$$\cos(2x) = 0$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \text{ או } x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

דרך ב: על-ידי העברת אגפים נקבל $\left(\sin^2 x = \frac{1}{2}\right)$

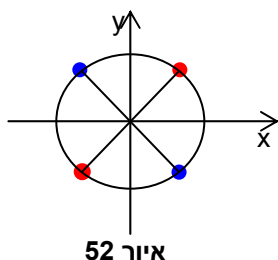
$$\left(\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{או} \quad \left(\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

הפתרונות נראים למראית עין שונים. ייצוג הפתרונות במעגל היחידה מראה שהפתרונות שקולים. בעת סימון הפתרונות במעגל היחידה כדאי לסמן את הפתרונות בצבעים על-פי מקורם.

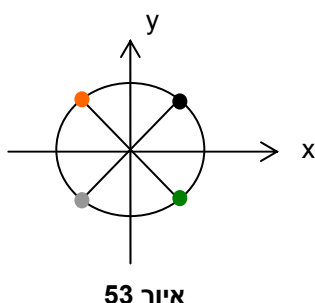
קבוצות הפתרונות המתקבלות בדרך א:



א. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

ב. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

קבוצות הפתרונות המתקבלות בדרך ב:



א. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

ב. $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

ג. $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$

ד. $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

התבוננות בפתרונות אלו כשהם מוצגים במעגל היחידה, מראה שמדובר באותם הפתרונות, מאורגנים במקבצים שונים.

ההתבוננות בפתרונות המוצגים במעגל היחידה מראה כי ניתן לאחד את קבוצות הפתרונות לקבוצה אחת:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \text{ מספר שלם.}$$

שימוש בייצוגים האלגבריים השונים המובילים לאותו ייצוג גרפי זו מיומנות לא קלה עבור התלמידים, ויש לתת על כך את הדעת במהלך ההוראה.

חשוב לשלב בתהליך ההוראה פתרון מגוון של משוואות מסוג זה, תוך התייחסות לשקילות הפתרונות ולמעבר בין הייצוגים, עם הפרשנות הנלווית לפתרון המאחד את כל ההצגות, גם כדרך נוספת לעסוק בקשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות ובייצוגים השונים שלהן, וגם כדי שתלמידים יבינו שקבלת פתרון שונה מהפתרון המוצג בספר הלימוד לעתים לא מעידה על טעות בפתרון.

על המעגל זה קל – הוכח וקח!⁵

משחק התאמה בנושא זהויות טריגונומטריות ופונקציות טריגונומטריות של זוויות מיוחדות

מטרת המשחק: להעמיק את ההבנה המתמטית של זהויות טריגונומטריות, ליצור אצל התלמיד תמונה מנטלית של מעגל היחידה ולחדד את יכולת ההוכחה.

משתתפים: 4 – 6.

תכולה: 24 כרטיסי זהויות טריגונומטריות (איור 55), 24 כרטיסי הוכחה (סרטטים המהווים את הבסיס להוכחה הזויות – איור 56) ו- 8 קלפי בניין (משפטים גיאומטריים שישמשו בהוכחת הזהות – איור 54).

מהלך המשחק:

מפזרים את כרטיסי ההוכחה במרכז כשפניהם כלפי מעלה.
עורמים את כרטיסי הזהויות לקופה כשפניהם כלפי מטה.
מסדרים בקבוצה את קלפי הבניין כשפניהם כלפי מעלה והם זמינים לשימוש.
מתחילים במשחק:
פותחים את כרטיס הזהות העליון בקופה וכל אחד מהשחקנים (אם רוצים ניתן לשחק גם לפי תור) מנסה לאתר את כרטיס ההוכחה המתאים לזהות.
להוכחת הזהות המיוצגת במעגל ניתן להיעזר, במידת הצורך, בכל אחד מהמשפטים הגיאומטריים שעל גבי קלפי הבניין. השחקן הראשון שמצליח להוכיח את הזהות מקבל את הזוג שהתאים.
ממשיכים במשחק עד להתאמת כל הזוגות.
מנצח המשתתף שהתאים את מספר זוגות הכרטיסים הרב ביותר.
ואריאציות: ערכת המשחק מתאימה גם למשחק יחידי, וגם להתמודדות מתמטית בין קבוצות, באופנים שונים.

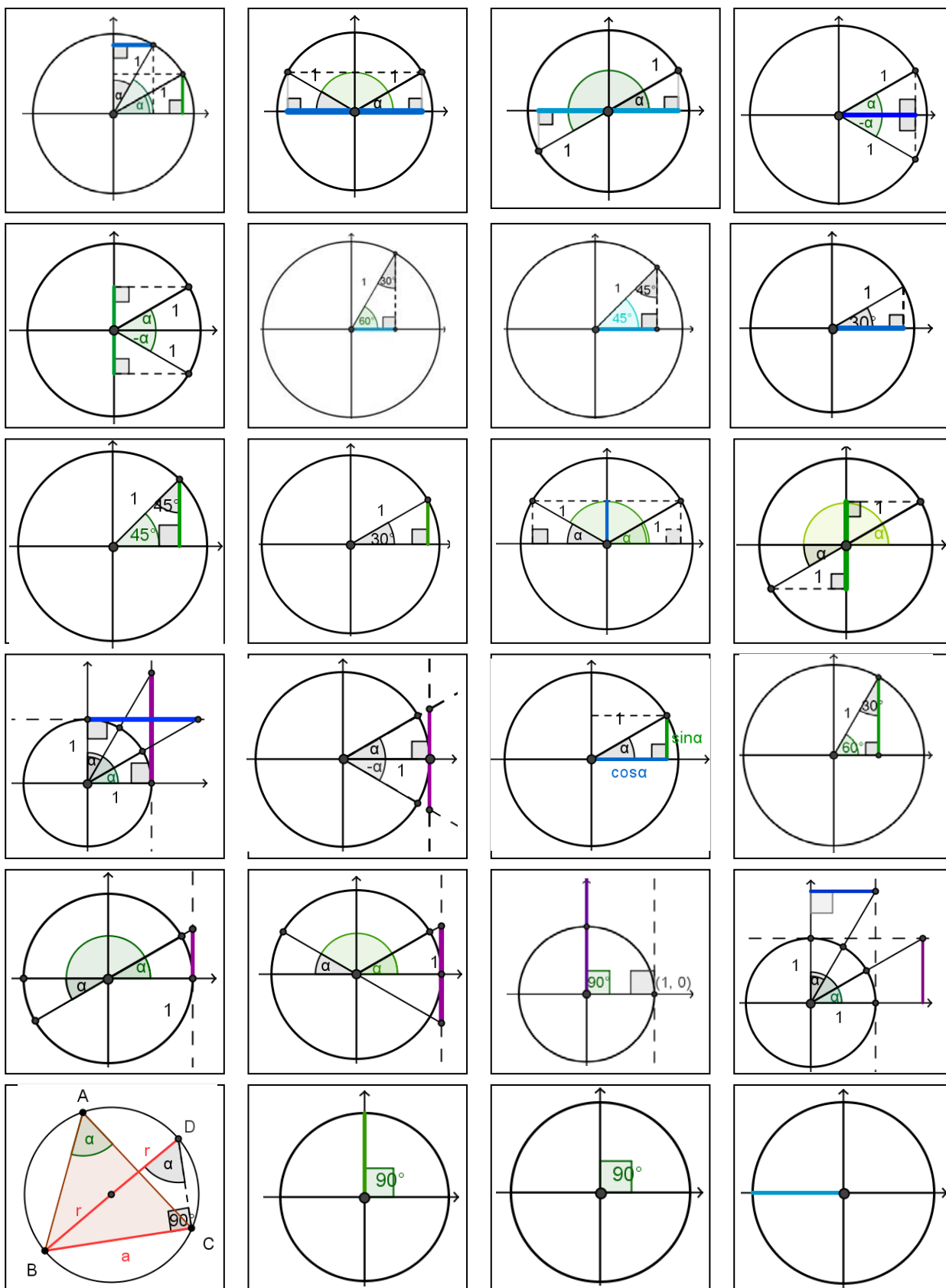
משפט חפיפה צ.ז.צ	משפט חפיפה ז.צ.ז	משפט חפיפה צ.צ.צ	משפט פיתגורס
אם במשולש יש שתי זוויות שוות, אז המשולש שווה-שוקיים.	זווית היקפית שנשענת על קוטר היא זווית ישרה.	במעגל, זוויות היקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד שוות זו לזו.	אם במשולש ישר- זווית יש זווית בת 30° אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.

איור 54: כרטיסי בניין

⁵ המשחק פותח על ידי סיגל הלנר.

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$	$\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
$\tan(90^\circ) = ?$	$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$	$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$
$\cos(180^\circ) = -1$	$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$
משפט הסינוסים $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$	$\sin(90^\circ) = 1$	$\cos(90^\circ) = 0$

איור 55: כרטיסי זהויות

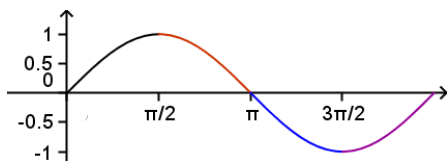


איור 56: כרטיסי הוכחות

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות טריגונומטריות ממשיות

שלוש נקודות מבט על נגזרת הפונקציה $f(x) = \sin x$

רגע לפני הוכחה - תיאור גרף הפונקציה הנגזרת על-פי תכונות הפונקציה המקורית



איור 57

מה ניתן ללמוד מתכונות הפונקציה $f(x) = \sin x$ על תכונות נגזרתה?

ממחזוריות הפונקציה ניתן ללמוד שגם הפונקציה הנגזרת היא פונקציה מחזורית, עם אותו מחזור.

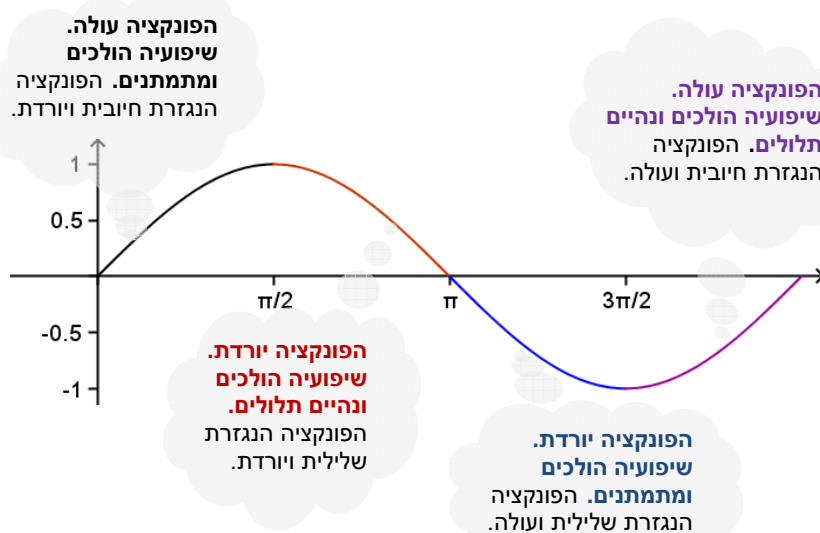
נתבונן בגרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

↪ הנגזרת מתאפסת בנקודות הקיצון של הפונקציה המקורית $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

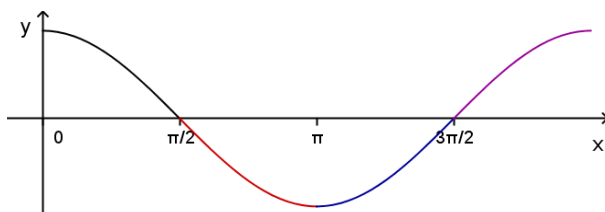
↪ המקסימום של הנגזרת מתקבל כאשר $x = 0$ וכאשר $x = 2\pi$. בנקודות אלה השיפוע החיובי הוא הגדול ביותר.

↪ המינימום של הנגזרת מתקבל כאשר $x = \pi$. בנקודה זו השיפוע השלילי הוא הגדול ביותר בערכו המוחלט.

נתבונן בחלקי הגרף המתאימים לארבעת הרביעים של מעגל היחידה הטריגונומטרי:



איור 58



איור 59

נסרטט גרף סכמתי של הפונקציה הנגזרת בהתאם למסקנות.

האם הגרף מזכיר לנו פונקציה מוכרת?

האם אנחנו בטוחים שהגרף הסכמתי הוא גרף פונקציית הקוסינוס?

ההתבוננות בקשרים בין תכונות הפונקציה

$f(x) = \sin x$ לתכונות נגזרתה הובילה אותנו להשערה $f'(x) = \cos x$. כעת נוכיח את נכונות ההשערה.

פיתוח נוסחה לנגזרת הפונקציה $f(x) = \sin x$ על בסיס הנוסחה להפרש סינוסים

תהי $f(x) = \sin x$. על סמך: הגדרת הנגזרת, נוסחת הפרש סינוסים, הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, ותכונת הרציפות של הפונקציה $\cos x$, מקבלים:

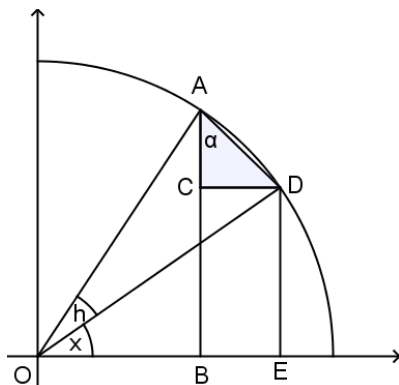
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

בכך הוכח כי $(\sin x)' = \cos x$ לכל x ממשי.

פיתוח נוסחה לנגזרת הפונקציה $f(x) = \sin x$ בעזרת מעגל היחידה הטריגונומטרי⁶

כדי לפתח את הנוסחה עבור $f'(x)$ יותר מוחשי להניח כי המספרים x , h , $x+h$ מציגים מידות רדיאניות של זוויות ברביע הראשון של מעגל היחידה הטריגונומטרי. זוויות אלה וקטעים אחדים המתקשרים אליהן מסומנים באיור 60. כמו כן, מסומנת בו זווית עזר α . נחשב את גודלה:



איור 60

$$\alpha = \angle OAD - \angle OAB = \frac{\pi - h}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - (x+h)\right) = x + \frac{h}{2}$$

חישוב במשולש
השווה-שוקיים
AOD
חישוב במשולש
AOB

נמחיש כעת את הביטוי $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$, במטרה להבין מדוע כאשר $h \rightarrow 0$ ערכו של ביטוי זה שואף ל- $\cos x$.

על-פי האיור $\sin(x+h) = AB$ ו- $\sin x = DE$. לכן $\sin(x+h) - \sin x = AB - DE = AC$.

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{h}. \text{ בהתאם, } \widehat{AD} = h, \text{ ואילו המכנה } h \text{ שווה לאורך הקשת } AD \text{ שנסמנו } \widehat{AD}.$$

אם נרצה להחליף במכנה השבר לעיל את הקשת $\widehat{AD}$ במיתרה, תוך שמירה על דיוק השוויון, נקבל:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{\widehat{AD}} \quad (1)$$

במשולש הישר-זווית ACD : $\cos \alpha = \frac{AC}{AD}$. היות ו- $\cos x$ היא פונקציה רציפה, מתקיים:

$$\cos \alpha = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \rightarrow \cos x \text{ כאשר } h \rightarrow 0. \text{ לכן:}$$

⁶ מבוסס על רימון ופרל (2001).

$$(2) \quad \frac{AC}{AD} \rightarrow \cos x, \text{ כאשר } h \rightarrow 0.$$

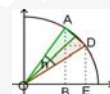
התחושה האינטואיטיבית היא שכאשר $h \rightarrow 0$, אורך המיתר AD מתקרב מאוד לאורך הקשת AD שהוא h . הביטוי המתמטי המדויק לתחושה אינטואיטיבית זו הוא:

$$(3) \quad \frac{AD}{AD} \rightarrow 1, \text{ כאשר } h \rightarrow 0.$$

כדי לוודא כי תנאי זה אכן מתקיים, נשים לב כי במשולש השווה-שוקיים AOD .

$$\text{הבסיס } AD \text{ שווה } 2 \sin \frac{h}{2} \quad \text{כאשר } h \rightarrow 0 \quad \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



מהתנאים (1) – (3) לעיל נובע כי:

$$\text{כאשר } h \rightarrow 0, \quad \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \rightarrow \cos x$$

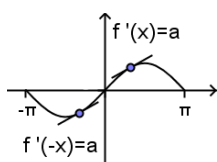
כלומר,

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

פיתוח נוסחה זו הוצג עבור $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ו- $0 < h$. ניתן להרחיב את ההוכחה לכל x ולכל h .

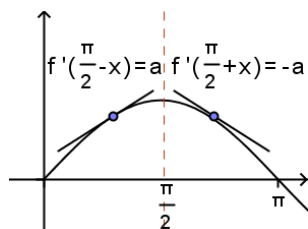
הערות

ניתן להצביע על תכונות נוספות של הפונקציה $f(x) = \sin x$ שגם מהן ניתן ללמוד על תכונות נגזרתה:



איור 61

- מהגדרת הפונקציה $f(x) = \sin x$ במעגל היחידה נובע כי פונקציה זו אי-זוגית, כלומר, $f(-x) = -f(x)$, ולכן גרף הפונקציה סימטרי ביחס לראשית הצירים.
- מהאי-זוגיות של הפונקציה $f(x) = \sin x$ ניתן להסיק שהנגזרת שלה היא פונקציה זוגית: $f'(x) = f'(-x)$.
- בדומה, ניתן להסיק תכונות דומות של $f'(x)$ שנובעות מהסימטריה של גרף הסינוס ביחס לנקודות חיתוכו עם ציר ה- x , למשל, $f'(\pi+x) = f'(\pi-x)$.



איור 62

- מהסימטריה של גרף הסינוס ביחס לישרים המקבילים לציר ה- y העוברים דרך נקודות הקיצון של הפונקציה, ניתן להסיק שהשיפועים בנקודות סימטריות הם מספרים נגדיים. נרשום זאת במונחי הנגזרת עבור שתי נקודות קיצון בקטע $0 \leq x \leq 2\pi$

$$f'\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -f'\left(\frac{3\pi}{2} - x\right), \quad f'\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

- תכונות אלה אכן משתקפות בגרף המשוער של הנגזרת בקטע $0 \leq x \leq 2\pi$ (איור 59 עמוד 390), ובגרף הקוסינוס.

על בסיס הנגזרת $f'(x) = \cos x$ של הפונקציה $f(x) = \sin x$ וחוקי הגזירה, ניתן למצוא את הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות האחרות.

הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \cos x$

נפתח את הנגזרת של $f(x) = \cos x$ על בסיס: הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sin x$, הקשר בין הפונקציות $f(x) = \sin x$ ו- $f(x) = \cos x$ וכלל השרשרת:

$$f(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (-1) = -\sin x$$

אתם מוזמנים לחקור את הקשרים בין תכונות הפונקציה $f(x) = \cos x$ לבין התכונות של נגזרתה, באופן דומה לזה שנעשה לגבי הפונקציה $f(x) = \sin x$.

הנגזרות של הפונקציות $f(x) = \tan x$ ו- $f(x) = \cot x$

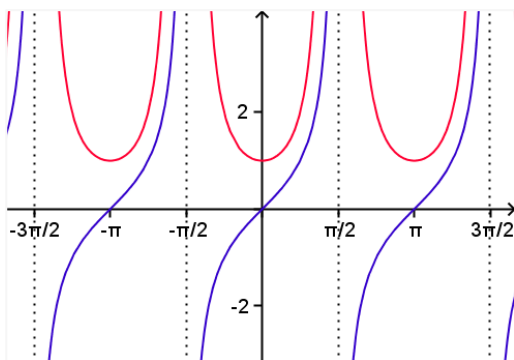
נפתח את הנגזרות על בסיס: הנגזרות של הפונקציות $\sin x$ ו- $\cos x$, הקשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות, וכלל (חוק) הגזירה של מנת שתי פונקציות:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

התבוננות בקשרים שבין הפונקציה $f(x) = \tan x$ לנגזרתה:

סרטטו גרף סכמתי של הפונקציה $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ בעזרת גרף הפונקציה $f(x) = \cos x$, ללא שימוש בנגזרת.



איור 63

איור 63 מציג את הגרפים של הפונקציה $f(x) = \tan x$ ושל נגזרתה, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, במערכת צירים אחת.

ברור מתוך התבניות של הפונקציה והנגזרת שיש להן אותו תחום הגדרה ואותו מחזור. (כיצד ניתן לקבוע את המחזור של הפונקציה $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ללא שימוש בכלים של החשבון הדיפרנציאלי?)

הנגזרת $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ יורדת בקטעים $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < k\pi$

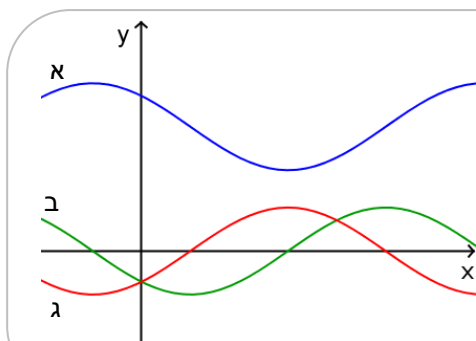
ועולה בקטעים $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ (מספר שלם כלשהו). תכונות אלו קובעות את תחומי הקעירות כלפי מטה/מעלה של הפונקציה $f(x) = \tan x$.

נקודות $x = k\pi$ הן נקודות המינימום המקומי והמוחלט של הפונקציה הנגזרת $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. נקודות אלה הן נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x) = \tan x$ ו- $f'(k\pi) = 1$ (מספר שלם כלשהו). הפונקציה $f(x) = \tan x$ היא דוגמה לפונקציה מוכרת עם נקודות פיתול בהן הנגזרת אינה מתאפסת.

נגזרות של פונקציות טריגונומטריות - הערות דידקטיות

- אפשר להתבונן בקשרים שבין הפונקציה לנגזרתה לפני או אחרי ההוכחה הפורמלית של הנגזרת.
- במקרה של הפונקציה $\sin x$ הנגזרת היא פונקציה מוכרת, ולכן מומלץ המהלך של התבוננות בקשרים בין הפונקציה לנגזרתה וסרטוט גרף סכמתי משוער של הנגזרת, לפני ההוכחה הפורמלית. מהלך זה חשוב גם כדי לעסוק בקשרים אלה בהקשר משמעותי, וגם כדי ליצור מעורבות של התלמידים ולגרות את סקרנותם.
- לאחר שמסרטטים גרף סכמתי משוער של הנגזרת, ניתן לבדוק את ההשערה גם באמצעות המחשב.
- במקרה של הפונקציה $\tan x$ סרטוט גרף סכמתי של הנגזרת, ללא שימוש בכלים של החשבון הדיפרנציאלי, הוא פחות מיידי, ולכן, מומלץ לדון בקשר שבין הפונקציה לנגזרת רק אחרי ההוכחה הפורמלית של הנגזרת, ורק בכיתות שהידע של התלמידים מאפשר דיון זה.

פעילות 12: מי הפונקציה ומי הן נגזרותיה?



איור 64

באיור 64 מופיעים גרפים של פונקציה f , נגזרתה הראשונה f' , ונגזרתה השנייה f'' .

א. זהו מיהו גרף הפונקציה f ומיהו הגרף של כל אחת מן הנגזרות.

ב. נסו לסרטט במחשב שלושה גרפים דומים לגרפים שבאיור 64.

הערות לפעילות

- הסעיף הראשון של הפעילות מבוסס על זיהוי קשרים בין פונקציה לנגזרותה, ואפשר לבצע אותו גם מבלי לזהות את הפונקציות שהגרפים שלהן מוצגים באיור. גרף א וגרף ב סימטריים ביחס לישר המקביל לציר ה- x , ולכן לנקודות הקיצון שלהם אותו שיעור x . מסיבה זו על התלמידים להביא בחשבון תכונות נוספות של הפונקציות, בנוסף על הזיהוי של התאפסות הנגזרת בנקודת קיצון של הפונקציה.
- ביצוע הסעיף השני כרוך במספר שיקולים הדורשים קישור בין נושאים אחדים.
- אחרי שגילינו כי הגרף של f הוא גרף א, וגרף ג הוא הגרף של f'' עלינו למצוא פונקציה ונגזרת שנייה שלה שהגרפים שלהן סימטריים ביחס לישר מקביל לציר ה- x .
- אם נביא בחשבון שהזזה אנכית לא משפיעה על הנגזרת, נוכל לחפש פונקציה ונגזרת שסימטריות ביחס לציר ה- x . אחת האפשרויות היא $f(x) = \sin x$; $f''(x) = -\sin x$.
- להשלמת המשימה יש למצוא טרנספורמציה ליניארית מתאימה של הפונקציה $f(x) = \sin x$.
- השימוש במחשב נותן משוב מהיר לגבי בחירת הפונקציות, ומאפשר לשנות בהדרגה את הבחירה עד לקבלת גרפים דומים לאלה שהוצגו בפעילות.
- הפונקציות באיור 64 הן $f(x) = 0.7 \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + 2$ ונגזרתה.

חקירת פונקציות טריגונומטריות

- חקירת הפונקציות הטריונומטריות מזמנת לתלמידים אתגרים שונים בנוסף לאלו הקיימים בחקירת פונקציות אחרות. אתגרים אלה נובעים מהתכונות הייחודיות של הפונקציות הטריונומטריות, כמו: מחזוריות, הגדרת הפונקציות הטריונומטריות במעגל היחידה, הצורך להישען על זהויות טריגונומטריות ועוד.
- כמו כן, חקירת פונקציות טריגונומטריות נשענת במידה רבה על: הבנה של הפתרון המחזורי של משוואות טריגונומטריות, הבנה של מרחב הפתרונות הכלליים ומרחב הפתרונות הפרטיים בתחום נתון.
- נציג כאן אוסף פעילויות חקירה של פונקציות טריגונומטריות. חלקן עם פתרון מלא, חלקן עם פתרון חלקי. עבור פעילויות אחדות מובאות: מספר דרכי פתרון אפשריות, הצעות להרחבה נוספת, ודגשים לדיון עם תלמידים.
- השאלות במרבית הפעילויות דומות לשאלות שהופיעו בשנים האחרונות בבחינות הבגרות, ולעתים מבוססות על אותן הפונקציות. ההדגשים בפעילויות הם:
- לעתים נוח לפשט תחילה את הפונקציה הנתונה ולקבל פונקציה נוחה לגזירה ולחקירה. כדאי לחפש בשאלות רמזים לפישוט אפשרי.
 - לעתים ניתן לקצר את תהליך החקירה ולחשוף תכונות רבות של הפונקציות ללא שימוש בנגזרת, אם מסבירים את תכונות הפונקציות באמצעות טרנספורמציות ליניאריות.
 - עידוד להעלאת השערות ולפתרון בעיות בדרכים שונות, יכול להפוך גם פעילות תרגול והכנה לבחינות לפעילות מהנה ומפתיעה.

פעילות 13: חקירת פונקציה טריגונומטרית בדרכים שונות

חקירת הפונקציה $f(x) = 3 - 6\sin 2x$

נציג מספר דרכי פתרון לשאלה זו. תחילה נחקור את הפונקציה הטריגונומטרית בכל תחום הגדרתה בעזרת הפונקציה הנגזרת. בחלק ב נתייחס לחקירה בתחום המצומצם $0 \leq x \leq \pi$. בחלק ג נציג גישה איכותית לחקירת הפונקציה באמצעות טרנספורמציות.

1. חקירת הפונקציה $f(x) = 3 - 6\sin 2x$ בכל תחום הגדרתה, $\mathbb{R}$

א. מחזור הפונקציה: π . הוכחה: $f(x + \pi) = 3 - 6\sin 2(x + \pi) = 3 - 6\sin(2x + 2\pi) = 3 - 6\sin 2x = f(x)$. חשוב לציין שבדרך זו הוכחנו ש- π הוא מחזור של הפונקציה, אולם לא הוכחנו ש- π הוא המחזור הקטן ביותר של הפונקציה.

ניתן לדעת ש- π הוא המחזור הקטן ביותר של הפונקציה, כיוון שהמחזור הקטן ביותר של פונקציות

מהמשפחה $f(x) = A\sin(ax + b) + B$ הוא $\frac{2\pi}{a}$, ובמקרה שלנו $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

ב. נקודות החיתוך עם ציר y : נציב $x = 0$ ונקבל $(0, 3)$.

למציאת נקודות חיתוך עם ציר x נמצא את פתרונות המשוואה: $0 = 3 - 6\sin 2x$.

מתוך המשוואה: $\sin 2x = \frac{1}{2}$ נקבל: $2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ או $2x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k$.

מכאן שהפתרונות הכלליים הם: $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$ או $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$.

ג. מציאת נקודות קיצון

הנגזרת הראשונה היא: $f'(x) = -12\cos 2x$.

מפתרון המשוואה: $0 = -12\cos 2x$ נקבל: $2x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow \cos 2x = 0$.

מכאן שהנקודות החשודות לקיצון הן: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ או $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

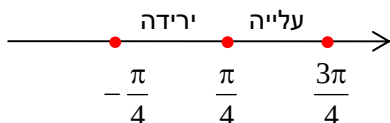
נגזרת שנייה: $f''(x) = 24\sin 2x$.

נציב בנגזרת השנייה נקודות חשודות לקיצון במחזור אחד של הפונקציה, ואת המסקנות נכליל לתחום כולו.

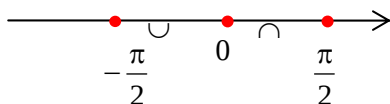
$f''\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, -3\right)$ נקודות מינימום מוחלט.

$f''\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k\right) > 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k, 9\right)$ נקודות מקסימום מוחלט.

כיוון שהפונקציה מחזורית ובכל מחזור יש נקודת מינימום אחת ונקודת מקסימום אחת, יכולנו להסיק שאלו נקודות קיצון מוחלט.



איור 65



איור 66

ד. לאחר שמצאנו את נקודות הקיצון נוכל להסיק את תחומי העלייה והירידה. לשם כך נוח למצוא נקודות מינימום ו/או מקסימום נוספת על אלו שמצאנו בעת פתרון המשוואות (איור 65).

$$\text{תחומי הירידה: } -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

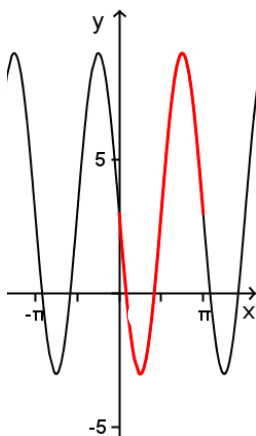
$$\text{תחומי העלייה: } \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

ה. נקודות פיתול ותחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה:

נקודות האפס של הנגזרת השנייה הן $x = \frac{\pi k}{2}$. נקודות אלה חשודות בפיתול

(איור 66).

בסביבת נקודות מינימום הנגזרת השנייה חיובית והפונקציה קעורה כלפי מעלה. בסביבת נקודות מקסימום הנגזרת השנייה שלילית והפונקציה קעורה כלפי מטה. מכאן שהנקודות החשודות לפיתול הן אכן נקודות פיתול.



איור 67

$$\text{תחומי קעירות כלפי מעלה: } -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{k\pi}{2}, \quad k \text{ מספר שלם.}$$

$$\text{תחומי קעירות כלפי מטה: } \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \text{ מספר שלם.}$$

גרף הפונקציה מוצג באיור 67. מחזור אחד של הפונקציה מודגש באדום.

2. סרטוט גרף הפונקציה $f(x) = 3 - 6\sin 2x$ ללא שימוש בכלים של חשבון דיפרנציאלי

ניתן לסרטט את הסקיצה של גרף הפונקציה בגישה 'איכותית', על-פי טרנספורמציות של פונקציות טריגונומטריות. בכך נוכל ליישם את הכלים של טרנספורמציות שהכרנו בדוגמאות של פונקציות פולינומיות על פונקציות טריגונומטריות.

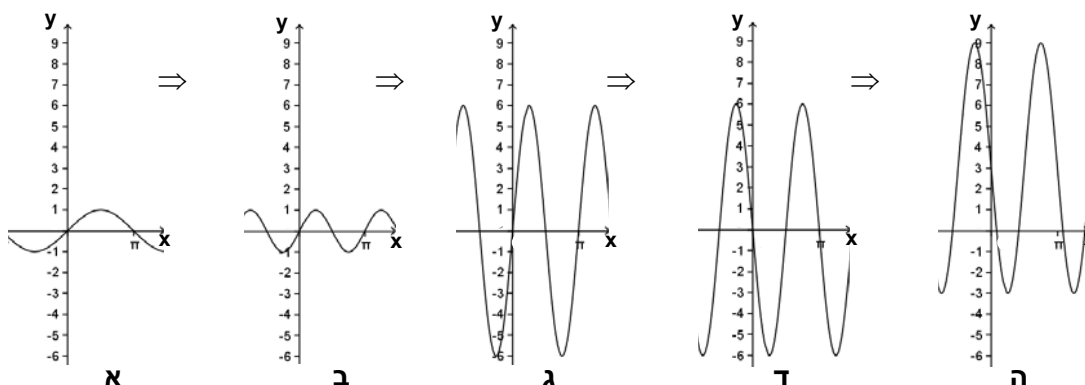
א. תחילה נסרטט את גרף הפונקציה: $y = \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$ (ראו איור 68).

ב. גרף הפונקציה $y = \sin 2x$ מתקבל מגרף הפונקציה $y = \sin x$ על-ידי כיווץ אופקי פי שתיים.

ג. גרף הפונקציה $y = 6\sin 2x$ מתקבל מגרף הפונקציה $y = \sin 2x$ על-ידי מתיחה אנכית פי 6.

ד. גרף הפונקציה $y = -6\sin 2x$ מתקבל מגרף הפונקציה $y = 6\sin 2x$ על-ידי שיקוף בציר ה- x .

ה. גרף הפונקציה $f(x) = 3 - 6\sin 2x$ מתקבל מגרף הפונקציה $y = -6\sin 2x$ על-ידי הזזה אנכית ב-3 יחידות כלפי מעלה.



איור 68

נקודת מבט נוספת על פונקציה זו: ניתן להתייחס לפונקציה $f(x) = 3 - 6\sin 2x$ כאחת מתוך משפחה פרמטרית של פונקציות: $f(x) = A\sin(ax + b) + c$. את צורת הגרף ניתן לקבוע מתוך ההיכרות עם האופן שבו פרמטרים שונים משפיעים על צורת הגרפים של הפונקציות במשפחה.

3. חקירת הפונקציה $f(x) = 3 - 6\sin 2x$ בתחום: $0 \leq x \leq \pi$

בחלק א של השאלה חקרנו את הפונקציה $f(x) = 3 - 6\sin 2x$ בתחום $\mathbb{R}$. כעת נתמקד בתחום $0 \leq x \leq \pi$. כאשר הפונקציה מוגדרת בתחום סגור אנו נדרשים להתייחס גם לקצות התחום. לא נערוך עתה את החקירה מחדש אלא נתבסס על המסקנות אליהן הגענו.

א. נקודות החיתוך עם ציר y , $(0, 3)$, היא אחת מנקודות הקצה של התחום.

נקודות חיתוך עם ציר ה- x בתחום הן: $(\frac{\pi}{12}, 0)$; $(\frac{5\pi}{12}, 0)$.

ב. נקודות קיצון פנימיות שמצאנו: $(\frac{\pi}{4}, -3)$ נקודת מינימום מקומי, $(\frac{3\pi}{4}, 9)$ נקודת מקסימום מקומי.

נקודות הקצה הן נקודות קיצון מקומי. הנקודה $(0, 3)$ היא נקודת מקסימום מקומי, והנקודה $(\pi, 3)$ היא נקודת מינימום מקומי.

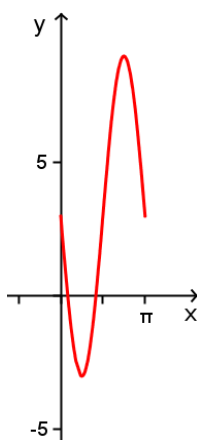
ג. תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ו- $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$.

תחום עלייה: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

ד. נקודת הפיתול היחידה לפי הסקיצה של הגרף היא: $(\frac{\pi}{2}, 3)$. הנגזרת השנייה מתאפסת גם

בנקודות הקצה, אולם בנקודות קצה הפונקציה לא משנה את סוג הקעירות ולכן נקודות קצה התחום אינן נקודות פיתול.

תחום קעירות כלפי מעלה הוא: $0 < x < \frac{\pi}{2}$. תחום קעירות כלפי מטה הוא: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.



איור 69

פעילות 14: הזדמנות לקישוריות

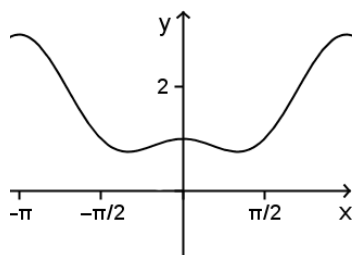
נתונה הפונקציה $f(x) = 2 - \cos x - \sin^2 x$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

א. חקרו את הפונקציה $f(x)$ וסרטטו סקיצה של גרף שלה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף פונקציה הנגזרת $f'(x)$.

ג. נתון כי גרף הפונקציה $g(x) = a - \cos x - \sin^2 x$ משיק לציר ה- x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד. מהו ערכו של פרמטר a ? נמקו.

סעיף א: אבני דרך של הפתרון



איור 70

(1) פתרון של המשוואה $2 - \cos x - \sin^2 x = 0$ תוך שימוש

בזהות $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ יוביל למשוואה השקולה:

$$\cos^2 x - \cos x + 1 = 0.$$

חיתוך עם ציר ה- x .

(2) מהצבה של $x = 0$ בפונקציה מתקבלת נקודת החיתוך עם ציר ה- y : $(0, 1)$.

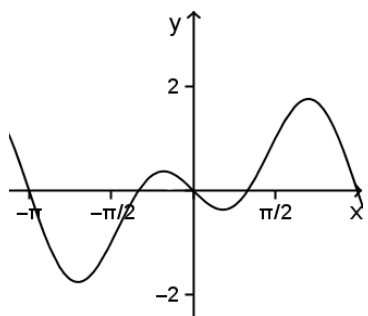
(3) הנגזרת היא: $f'(x) = \sin x - 2 \sin x \cos x$.

נשווה את הנגזרת לאפס ונפתור את המשוואה. פתרונותיה בתחום הם: $x = -\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi$.

(4) על-ידי חישוב ערכי הפונקציה בכל הנקודות שמצאנו ובניית טבלת ערכים מתאימה, ניתן לראות כי הערך הגדול ביותר: 3 מתקבל בנקודות $x = -\pi, \pi$. הערך הקטן ביותר: 0.75.

$$x = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

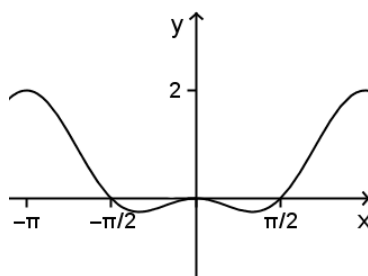
הגרף מוצג באיור 70.



איור 71

סעיף ב: אפשר כמובן לחקור את הפונקציה הנגזרת בנפרד ולסרטט סקיצה של הגרף שלה. כיוון שסרטטנו כבר את גרף הפונקציה נוכל לסרטט את גרף הפונקציה הנגזרת מתוך גרף הפונקציה הנתונה, על בסיס הקשרים בין תכונות של פונקציה לנגזרתה. גרף הנגזרת מוצג באיור 71.

סעיף ג: מתוך הסתכלות על גרף הפונקציה המקורית, ניתן לראות כי הזזה אנכית של גרף הפונקציה כלפי מטה ביחידה אחת תזיז את הנקודה $(0, 1)$ לנקודת ההשקה $(0, 0)$ (איור 72).



איור 72

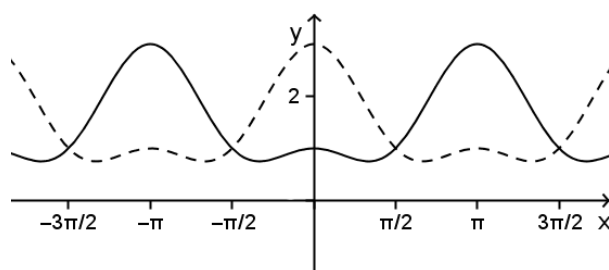
הערות דידקטיות

א. בכלל ההתאמה של הפונקציה משולבות שתי פונקציות טריגונומטריות עם מעריכים שונים. כדי להצליח לפתור משוואות כמו המשוואה $0 = 2 - \cos x - \sin^2 x$ בסעיף א, יש צורך להכיר זהויות טריגונומטריות, ולדעת לזהות מהי הזהות הדרושה בכל מקרה. נשים לב שגם מבלי לפתור את המשוואה. הביטוי $2 - \cos x - \sin^2 x$ יכול להתאפס רק עבור ערך x עבורו $\cos x = 1$ וגם $\sin^2 x = 1$. כיוון שאין ערך x כזה, אין לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

ב. סעיף ב של הפעילות מזמן הזדמנות חשובה לחזור ולחדד את הקשרים בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת בהם עסקנו בעבר בהקשר של פונקציות שאינן טריגונומטריות. באופן דומה, סעיף ג, מספק הזדמנות לחדד את החשיבות של טרנספורמציות ליניאריות ככלי יעיל לפתרון שאלות הקשורות לפונקציות טריגונומטריות.

הרחבות אפשריות

א. ניתן להבחין כי הפונקציה הנתונה זוגית ואילו פונקציה הנגזרת היא פונקציה אי-זוגית. נשאלת השאלה: האם הפונקציה הנגזרת של כל פונקציה זוגית היא אי-זוגית? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.



איור 73

ב. אפשר להמשיך ולשאל שאלות דומות לשאלה שבסעיף ג כמו:

- מהו הערך של a שיוביל לפונקציה עם שתי נקודות השקה עם ציר ה- x ?
- באיור 73 הבאה מופיע גרף הפונקציה $f(x)$ ללא הגבלת התחום (הגרף השחור).
שערו: מהי התבנית של גרף הפונקציה המסורטט בקו מרוסק?

פעילות 15: מנת פונקציות טריגונומטריות

שילוב פונקציות טריגונומטריות בפונקציות מנה מזמן עיסוק מעניין ולפעמים מפתיע בנקודות אי-הגדרה ובאסימפטוטות.

הפעילות הבאה מציגה פונקציה שאת חקירתה ניתן לפשט באופן משמעותי על-ידי פישוט הפונקציה בעזרת זהויות טריגונומטריות. ללא הפישוט, חקירת הפונקציה ארוכה ומייגעת.

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{בתחום } -3\pi \leq x \leq 3\pi.$$

- מצאו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה בתחום הנתון.
- סרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

פתרון

א. תחילה נפשט את הביטוי המייצג את הפונקציה בעזרת הזהות: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. הביטוי שמופיע במונה של הפונקציה ניתן להצגה על-ידי: $\cos x$ והביטוי שבמכנה, על-ידי: $\cos x + 1$. מכאן:

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + 1}$$

למציאת האסימפטוטות האנכיות נמצא את נקודות האי-הגדרה של הפונקציה בתחום הנתון.

בתחום $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ קיימים ארבעה ערכי x שמאפסים את המכנה. מכאן שהאסימפטוטות הן: $x = \pm 3\pi$ ו- $x = \pm \pi$. נשים לב ששתיים מהאסימפטוטות מתקבלות בקצות התחום.

ב. הפישוט של ביטוי הפונקציה מסייע גם במציאת אסימפטוטות וגם מקל בפעולת הגזירה. הנגזרת הראשונה

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{(\cos x + 1)^2}$$

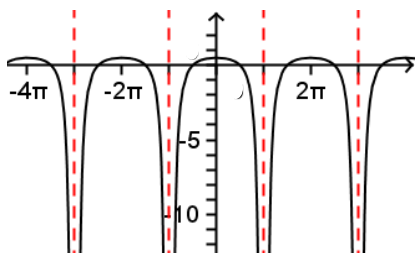
הנקודות החשודות בתחום המבוקש הן: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(2\pi, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-2\pi, \frac{1}{2}\right)$. למציאת סוגן נשתמש בטבלת ערכים המכילה גם את האסימפטוטות ואת ערכי הקצוות.

x	-3π	$< x <$	-2π	$< x <$	$-\pi$	$< x <$	0	$< x <$	π	$< x <$	2π	$< x <$	3π
$f'(x)$	אסימפטוטה אנכית	+	0	-	אסימפטוטה אנכית	+	0	-	אסימפטוטה אנכית	+	0	-	אסימפטוטה אנכית
$f(x)$	אסימפטוטה אנכית		$\frac{1}{2}$		אסימפטוטה אנכית		$\frac{1}{2}$		אסימפטוטה אנכית		$\frac{1}{2}$		אסימפטוטה אנכית

טבלה 6

כדאי גם להסב את תשומת לבם של התלמידים, שהפונקציה היא זוגית: תחום ההגדרה שלה הוא תחום סימטרי ביחס לראשית הצירים ($x=0$) והיא מקיימת $f(-x) = f(x)$. עובדה זו עוזרת לסרטוט הגרף, שהוא סימטרי ביחס לציר ה- y .

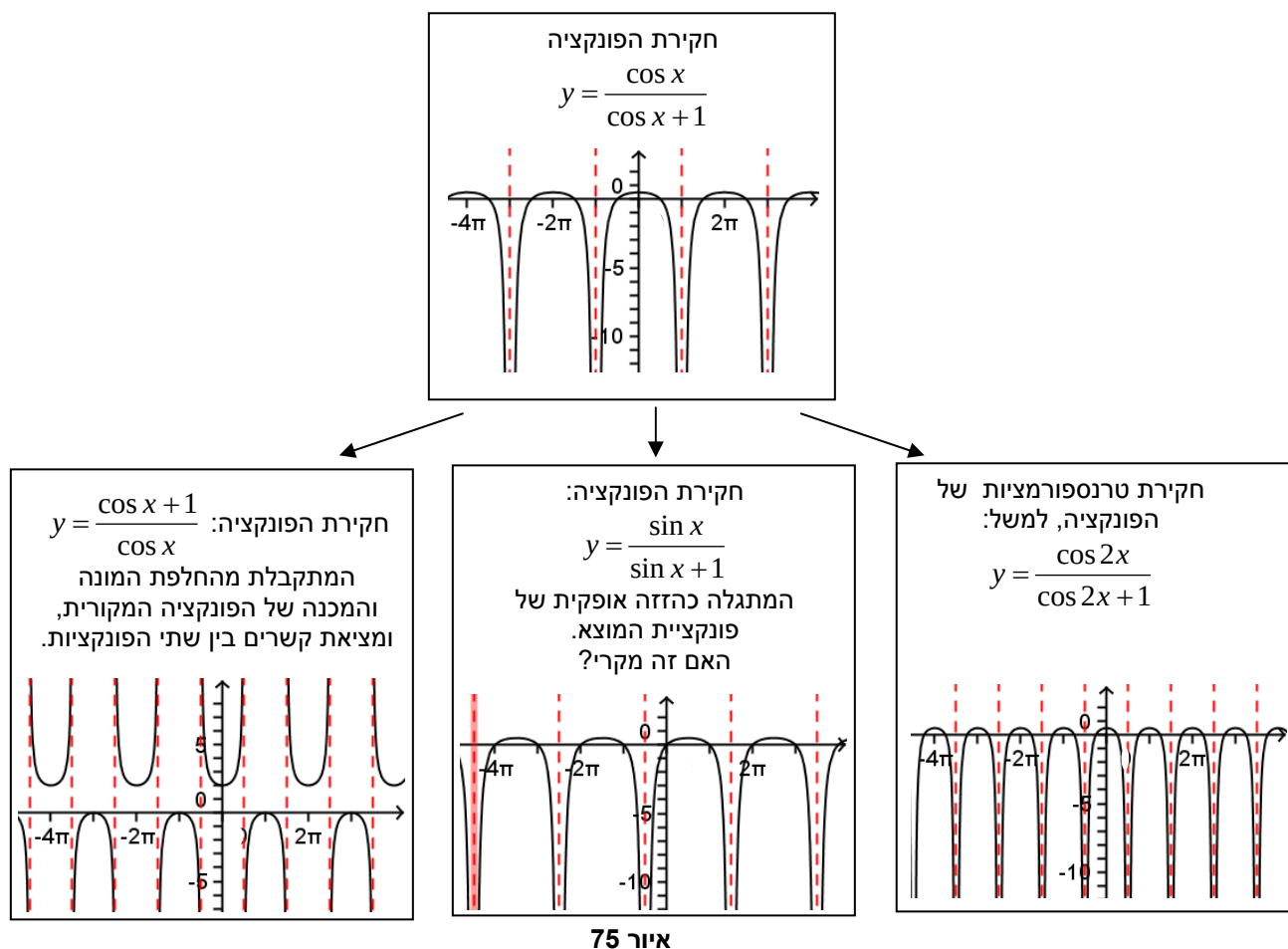
גרף הפונקציה מוצג באיור 74.



איור 74

כיצד נוכל למנף אל החקירה?

איור 75 מציע פעילויות חקירה המתאימות כהמשך לחקירת הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + 1}$.



פעילות 16: מחזור מפתיע

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

א. נסו לשער מהו המחזור הקטן ביותר של הפונקציה.

ב. הראו כי הנגזרת של הפונקציה היא $f'(x) = -\sin 4x$.

ג. סרטטו את סקיצת הגרף של הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

חקירה זו מבוססת על פונקציה שהופיעה בשנים האחרונות בבחינות בגרות. החקירה מציגה כיצד ניתן להרחיב תרגול לפעילות חקר הטומנת בחובה אלמנט של הפתעה.

פתרון והערות דידקטיות

סעיף א: נועד לעורר הפתעה. בהמשך החקירה נגלה שמחזור הפונקציה הוא $\frac{\pi}{2}$.

כיוון שהמשתנה x מופיע בשני המחוברים ללא מקדם, סביר שלפחות חלק מהתלמידים יחשבו שמחזור הפונקציה הוא 2π . מהחזקה הזוגית של המחוברים ניתן להסיק שמחזור הפונקציה הוא לכל היותר π . העובדה ש- π אינו המחזור הקטן ביותר היא תוצאה מפתיעה שכדאי להבליט בהמשך החקירה. בתחילת החקירה מומלץ לבקש מתלמידים להעלות השערות בנוגע למחזור הפונקציה מבלי לתת תשובה, ולחזור אל מחזור הפונקציה לאחר החקירה.

סעיף ב: נציג תחילה פתרון בשתי דרכים. לאחר השלמת החקירה נבחן את השאלה אם יכולנו להמשיך ולפשט את הפונקציה.

דרך א: בעזרת זהויות טריגונומטריות נציג את הפונקציה בצורה פשוטה יותר ונגזור את הפונקציה לאחר הפישוט.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \\ &= 1 - \frac{(2\sin x \cos x)^2}{2} = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = -\frac{1}{2}\sin^2 2x + 1 \\ \text{נגזור ונקבל: } f'(x) &= -\frac{1}{2} \cdot 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = -\sin 4x \end{aligned}$$

דרך ב: גזירה ישירה של תבנית הפונקציה הנתונה:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x = 4\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \\ &= -2\sin 2x \cos 2x = -\sin 4x \end{aligned}$$

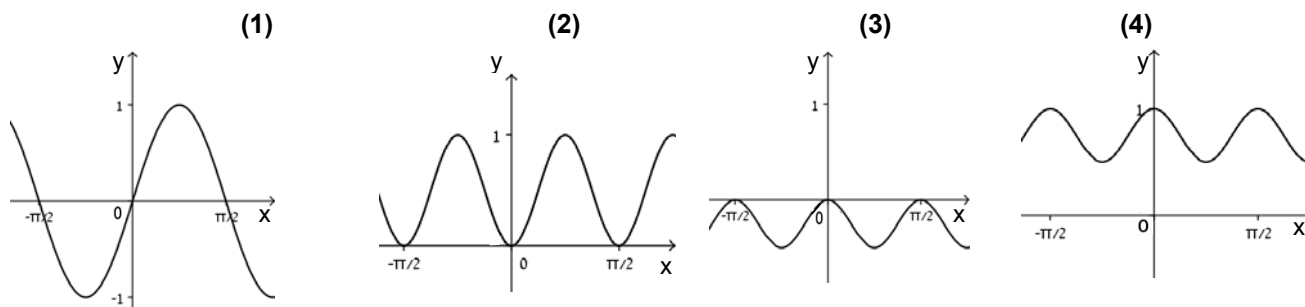
גזירה בדרך זו היא מורכבת יותר ומהווה מקור לטעויות. פישוט תבנית הפונקציה הטריגונומטרית דורש מתלמיד מיומנויות בשימוש בזהויות מתאימות.

סעיף ג: על מנת לסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ נבחר בגישה האיכותית. נסרטט תחילה את גרף של הפונקציה $y = \sin 2x$ (איור (1)76).

נעלה בריבוע את כל ערכי הפונקציה ונקבל את גרף הפונקציה $y = \sin^2 2x$ (איור (2)76). ההעלאה בריבוע הקטינה את המחזור פי 2. מדוע?

נבצע כיווץ פי 2 ושיקוף ביחס לציר ה- x , נקבל את גרף הפונקציה $y = -\frac{1}{2}\sin^2 2x$ (איור (3)76). נעלה את הגרף יחידה אחת למעלה לאורך ציר ה- y (איור (4)76).

התקבל גרף הפונקציה: $f(x) = -\frac{1}{2}\sin^2 2x + 1$.



איור 76

מהתבוננות בגרף הפונקציה אפשר להבחין בשלוש נקודות מקסימום: $(0,1)$, $(\frac{\pi}{2},1)$ ו- $(-\frac{\pi}{2},1)$, ובשתי נקודות מינימום כאשר $x = \pm \frac{\pi}{4}$. אחרי ההצבה נקבל נקודות מינימום: $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ ו- $(-\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$. כדאי לדון עם התלמידים איך הטרנספורמציות שביצענו על הפונקציה הובילו לנקודות קיצון אלה.

בעזרת הנגזרת השנייה ניתן למצוא את נקודות הפיתול: $(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3\pi}{8}, \frac{3}{4})$, $(-\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4})$ ו- $(-\frac{3\pi}{8}, \frac{3}{4})$.

מבט נוסף על מחזור הפונקציה

מתוך החקירה שביצענו וגם מחקירת הפונקציה בדרך שגרתית, וסרטוט הגרף באמצעות טבלת ערכים, נוכל להבחין שמחזור הפונקציה הוא $\frac{\pi}{2}$. באופן טבעי עולה השאלה: האם יכולנו, על-ידי פישוט נוסף, להציג את הפונקציה באופן שמבליט את המחזור?

נגזרת הפונקציה $f'(x) = -\sin 4x$ רומזת על כך שניתן היה להציג את הפונקציה באופן שונה. מהמידע $f'(x) = -\sin 4x$ ניתן להסיק כי $f(x) = \frac{1}{4}\cos 4x + c$.

פיתוח נוסף של הפונקציה אכן מאפשר להציגה בצורה $f(x) = \frac{1}{4}\cos 4x + c$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}\sin^2 2x + 1 = -\frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{4}(\cos^2 2x + \sin^2 2x) + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4}\cos^2 2x - \frac{1}{4}\sin^2 2x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

הערות

- כדאי להצביע על כך שמחזור הנגזרת רומז על מחזור הפונקציה גם בכיתה שלא למדה עדיין אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות.

- נוכל לבצע את הפישוט גם באמצעות הקשר $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ המוביל לקשר $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$. הקשר הראשון אינו מידי והוא מתקבל מתוך הפיתוח של $\cos 2x$.
- הצגת הפונקציה כ- $f(x) = \frac{1}{4} \cos 4x + c$ באחת משתי הדרכים לעיל, מאפשרת להבחין שהמחזור הוא $\frac{\pi}{2}$.
- חשוב לסרטט את הגרף בתחום שבו מופיעים שני מחזורים לפחות של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{4} \cos 4x + c$. מי שלא גילה עד כה את מחזור הפונקציה יגלה זאת באמצעות הגרף.

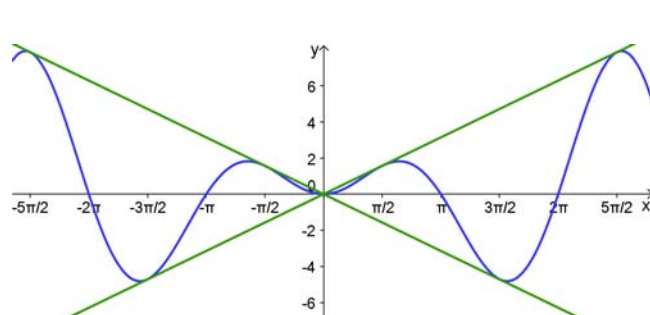
פעילות 17: חקירה איכותית של פונקציה גם כשאין לנו כלים לחקירה רגילה

חקרו את הפונקציה $f(x) = x \cdot \sin x$ בתחום $[-3\pi, 3\pi]$.

הערה דידקטית: פעילות זו מציגה חקירה של פונקציה טריגונומטרית עבודה כלי חקירה רגילים אינם ישימים. למשל, במקרה של הפונקציה הנתונה אין לנו כלים למצוא את נקודת האפס של הנגזרת בעזרת פתרון משוואה. במקרה זה נבצע חקירה איכותית. הפעילות מאפשרת להבליט את הכוח של שיקולים איכותיים, שלפעמים נתפסים רק כמשניים.

א. ניתן לראות כי תבנית הפונקציה מורכבת משני גורמים x ו- $\sin x$.

ידוע שהפונקציה $y = \sin x$ מתאפסת כאשר $x = k\pi$ (k מספר שלם), ולכן גם הפונקציה: $f(x) = x \cdot \sin x$ מתאפסת בנקודות אלו.



איור 77

ב. בנקודות בהן $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ הפונקציה $y = \sin x$

מקבלת את הערכים $y = \pm 1$ לסירוגין, ומכאן בנקודות אלו מתקיים: $f(x) = \pm x$ לסירוגין.

ג. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית. (נמקו!).

ד. הפונקציה $f(x)$ חסומה בין $y = x$ ו- $y = -x$.

(מדוע?) ומכאן שגרף הפונקציה נמצא כולו בין

הישרים $y = x$ ו- $y = -x$.

על-פי המסקנות שלעיל ניתן לסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

נשים לב שנקודות המפגש של גרף הפונקציה עם הישרים $y = x$ ו- $y = -x$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k מספר שלם), הן

נקודות קיצון של פונקציית הסינוס אך אינן נקודות קיצון של הפונקציה $f(x) = x \cdot \sin x$.

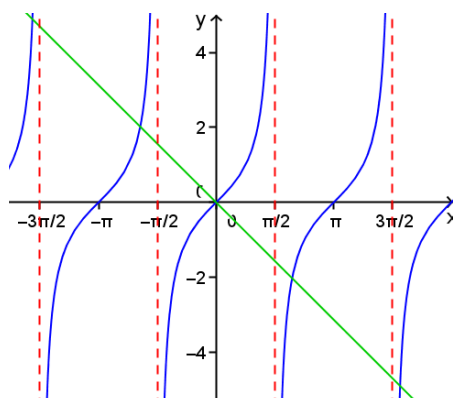
הנגזרת, $f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$, אינה מתאפסת בנקודות אלו.

על מנת למצוא את נקודות הקיצון יש לפתור את המשוואה $\sin x + x \cdot \cos x = 0$.

נתבונן במשוואה השקולה $\tan x = -x$.

נסרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $y = \tan x$ ו- $y = -x$ המופיעות באגפי המשוואה

$\tan x = -x$.



איור 78

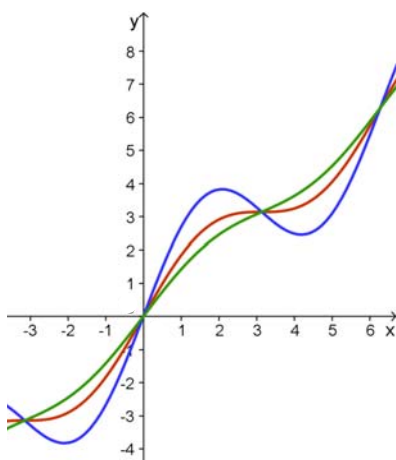
התבוננות בגרף (איור 78), מלמדת שלמשוואה אינסוף פתרונות, אחד בין כל שתי נקודות אי-הגדרה של הפונקציה $y = \tan x$. לא נוכל למצוא את נקודות החיתוך עצמן באמצעות פתרון אנליטי של המשוואה. ניתן למצוא את נקודות החיתוך באמצעים טכנולוגיים או נומריים.

פעילות 18: שינויים קטנים בתבנית הפונקציה והשפעתם על גרף הפונקציה⁷

בכל אחת מן הפונקציות שבפעילות החיבור של פונקציה טריגונומטרית לפונקציה ליניארית נוצרת פונקציה בעלת מראה גלי. כיצד נדע לתאר את הפונקציה במקרים בהם אין לפונקציה נקודות קיצון?

פעילות זו מדגישה את החשיבות של חקירת תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה, ויכולה להוות פתיח להצגת הנושא או לחזרה אליו.

פעילות זו יכולה להוות כניסה 'רכה' לנושא של חקירת משפחות פרמטריות של פונקציות טריגונומטריות על-ידי יציאה מהמקרים הפרטיים למשפחה כללית, ולא להיפך, כמקובל.



איור 79

לפניכם 3 פונקציות ו-3 גרפים (איור 79):

$$f(x) = \sin x + x$$

$$g(x) = 2 \sin x + x$$

$$h(x) = 0.5 \sin x + x$$

א. התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאים לה.

ב. האם צורת הגרף של אחת מן הפונקציות הפתיעה אתכם?

אם כן, נסו לתאר מדוע.

ג. ערכו רשימה של תכונות משותפות ל-3 הפונקציות ורשימה של הבדלים ביניהן.

לא נפתור את השאלה באופן מלא, אך נתייחס לתכונות של הפונקציות:

▪ לפונקציה $g(x) = 2 \sin x + x$ יש נקודות מקסימום בנקודה שבה $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, ונקודות מינימום בנקודה

$$\text{שבה } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$$

▪ נגזרת הפונקציה $f(x) = \sin x + x$ מתאפסת כאשר $x = \pi + 2k\pi$, אולם כל הנקודות האלה הן נקודות פיתול תוך כדי עלייה.

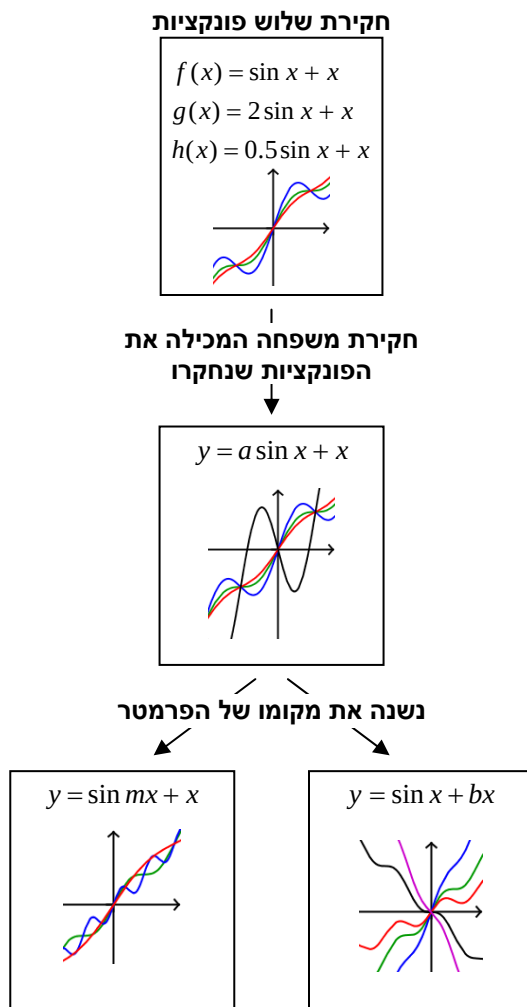
▪ נגזרת הפונקציה $h(x) = 0.5 \sin x + x$ אינה מתאפסת כלל. הנגזרת השנייה מתאפסת כאשר $x = k\pi$.

⁷ מעובד מתוך רון וזסלבסקי בקישור: <http://highmath.haifa.ac.il/images/data2/open3.pdf>

▪ לכל 3 הפונקציות יש נקודות פיתול כאשר $x = k\pi$.

הרחבות אפשריות לפעילות:

אחת האפשרויות להרחבת הפעילות היא לצאת מחקירה זו אל חקירת משפחות אחדות של פונקציות, שלכולן מראה "גלי" המזכיר את הפונקציות שנחקרו זה עתה. איור 80 מציע חקירה של פונקציות נוספות שיש להן אינסוף נקודות פיתול שמקנות להן מראה "גלי".



איור 80

פעילות 19: משפחות של פונקציות טריגונומטריות בשילוב פרמטרים.

1. נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = \cos^2 x - A \cdot \sin^2 x$.⁸

- מצאו את שיעורי נקודות הקיצון וקבעו את סוגן. אילו מהן משותפות לכל המשפחה?
- חלקו את הפונקציות של המשפחה לשלוש קבוצות על-פי סוג הקיצון. סרטטו גרף המייצג כל אחת מהתת-משפחות בתחום $[-2\pi, 2\pi]$, וציינו את כל ערכי הפרמטר המתאימים לכל גרף.
- לאילו מבין הפונקציות אין נקודות אפס? נמקו.

⁸ מעובד מתוך רימון ופרל (2001).

ד. מה ניתן ללמוד מסעיף ג על התמונה הגרפית של פונקציות במשפחה?

פתרון

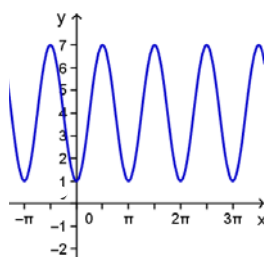
לאורך כל הפתרון k מייצג מספר שלם.

סעיפים א ו- ב: הנגזרת הראשונה היא:

$$f'(x) = 2 \cos x (-\sin x) - 2A \sin x \cos x = (-2 \sin x \cos x)(1 + A)$$

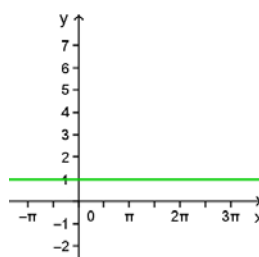
- אם $A = -1$, אז $f'(x) = 0$ לכל x . מכאן שעבור $A = -1$ מתקבלת פונקציה קבועה.
- אכן, אם נציב $A = -1$ בתבנית המקורית נקבל $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- אם $A \neq -1$, אז $f'(x) = 0$ כאשר $\sin x = 0$ או $\cos x = 0$. מכאן: $x = \pi k$ או $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.
- כדי לקבוע את סוג הקיצון, מספיק לחשב את ערכי הפונקציה בנקודות החשודות לקיצון.
נקבל: $f(\pi \cdot k) = 1$ ו- $f\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right) = -A$. לכן שיעורי נקודות הקיצון הם: $(\pi k, 1)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, -A\right)$.
- סוג הקיצון תלוי בערכו של הפרמטר A :
- אם $1 + A > 0$, כלומר, $A > -1$ אז $(\pi k, 1)$ הן מקסימום מוחלט, ו- $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, -A\right)$ הן מינימום מוחלט.
- אם $1 + A < 0$, כלומר, $A < -1$ אז $(\pi k, 1)$ הן מינימום מוחלט, ו- $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, -A\right)$ הן מקסימום מוחלט.

$A < -1$
דוגמה: $f(x) = \cos^2 x + 7 \sin^2 x$



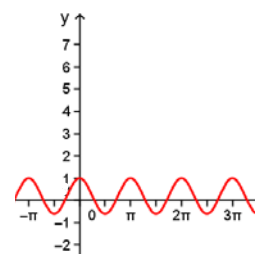
איור 83

$A = -1$
 $f(x) = 1$

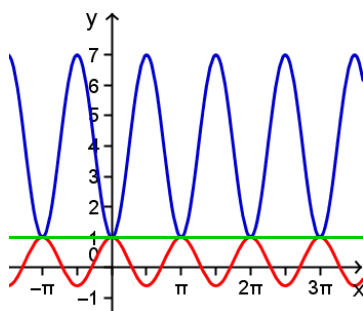


איור 82

$A > -1$
דוגמה: $f(x) = \cos^2 x - 2 \sin^2 x$



איור 81



איור 84

הנקודות $(\pi k, 1)$ משותפות לכל הפונקציות במשפחה מכיוון שהן אינן תלויות בפרמטר A .
איור 84 מציג במערכת צירים אחת פונקציה מכל תת-משפחה, וממחיש את נקודות המפגש המשותפות לכל הפונקציות במשפחה.

סעיף ג

נבדוק לאילו פונקציות במשפחה $f(x) = \cos^2 x - A \sin^2 x$ אין נקודות אפס.

כאשר $A = 0$ הפונקציה היא $f(x) = \cos^2 x$, ולמשוואה אינסוף פתרונות.

נבדוק את המקרים בהם $A \neq 0$

לשם כך עלינו לבדוק עבור אילו ערכי $A \neq 0$ אין פתרון למשוואה:

$$\cos^2 x - A \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\cos^2 x = A \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow$$

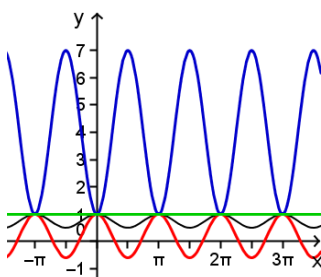
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{A}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{A}$$

פעולת החילוק אינה
גורמת לאיבוד
פתרונות כי לא ייתכן
שוויון בין שני האגפים
כאשר $\cos x = 0$.

למשוואה אין פתרונות כאשר $A < 0$, ולכן כאשר $A < 0$ גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .



איור 85

סעיף ד

הבדיקה שעשינו עתה מאפשרת לגלות שאת התת-משפחה $A > -1$ ניתן לחלק לשתי תת-משפחות:

כאשר $A > 0$ גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x (הגרף האדום), וכאשר

$-1 < A < 0$ גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x (הגרף השחור).

2. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos^2 x - a^2 \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, $a > \sqrt{2}$.

א. חקרו את הפונקציה בתחום הנתון, וסרטטו סקיצה של הגרף שלה.

ב. על סמך הממצאים של סעיף א סרטטו סקיצה של הפונקציה הנגזרת בתחום הנתון.

בחקירה זו, המוגבלת לתחום סגור, השילוב בין התחום המוגבל למגבלה על הפרמטר: $a > \sqrt{2}$ (או $a^2 > 2$) מחייב מתן תשומת לב מיוחדת לפתרונות הפרטיים המתקבלים במהלך החקירה.

סעיף א

נמצא את נקודות החיתוך עם ציר ה- x על-ידי פתרון משוואה טריגונומטרית:

$$\cos^2 x - a^2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos x - a^2) = 0$$



$$\cos x = a^2$$

או

$$\cos x = 0$$

בנתוני השאלה $a > \sqrt{2}$ ($a^2 > 2$),

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

ולכן גורם זה של המשוואה אינו תורם פתרונות

הפתרון בתחום הנתון הוא $x = \frac{\pi}{2} k$ מספר שלם.

נקודת החיתוך עם ציר ה- x היא: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

על מנת למצוא את נקודות הקיצון נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס:

$$f'(x) = -2 \cos x \cdot \sin x + a^2 \sin x$$

$$\sin x (-2 \cos x + a^2) = 0$$



$$2 \cos x = a^2$$

$$\sin x = 0$$

אין פתרונות בתחום הנתון.

$x = \pi k$ מספר שלם.

הפתרונות בתחום הנתון הם: $x = 0, x = \pi$.

נשים לב לכך כי נקודות הקיצון הן נקודות קצה של התחום. לכן ניתן להסיק כי הפונקציה מונוטונית בתחום. על-ידי הצבת נקודה כלשהי מהתחום בפונקציה הנגזרת ניתן לבדוק האם המגמה היא עלייה או ירידה.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + a^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2 > 0$$

ומכאן שהפונקציה עולה בתחום.

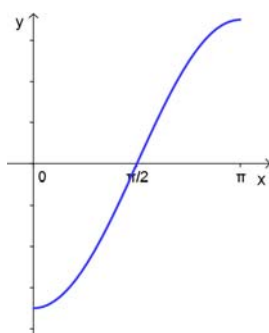
ערכי הפונקציה בנקודות הקצה: מינימום מוחלט $(0, (1-a^2))$ ומקסימום

מוחלט $(\pi, (1+a^2))$.

ניעזר בנגזרת שנייה על מנת למצוא את נקודת הפיתול: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

זו גם נקודת האפס של הפונקציה, אותה מצאנו לפני כן.

כעת ניתן לסרטט את גרף הפונקציה (איור 86).



איור 86

סעיף ב



איור 87

מכיוון שהפונקציה עולה בתחום הנתון, הנגזרת חיובית בתחום זה.

קצוות התחום הן נקודות הקיצון, בהן ערך הנגזרת הוא 0.

מהתבוננות בגרף הפונקציה המקורית נבחין כי שיפועי המשיקים גדלים עד לנקודת האפס של הפונקציה, שהיא נקודת הפיתול, וממנה שיפועי המשיקים קטנים. ומכאן נקבל את גרף הפונקציה הנגזרת (איור 87).

הערה

א. במהלך הפתרון השתמשנו פעמיים בכך שלפונקציות $\cos x$ יש טווח ערכים מוגבל. כך יכולנו להסיק שלמשוואה $\cos x = a^2$ אין פתרון כאשר $a > \sqrt{2}$ (או $a^2 > 2$).

ב. סרטוט הסקיצה של גרף הפונקציה אינו פשוט במקרה זה, גם בשל היעדר מספיק נתונים, כמו למשל: תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.

הרחבות אפשריות

א. בדקו האם הפונקציה הנתונה מקיימת את השוויון: $f(x) = f(-x)$. סרטוט גרף של הפונקציה בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

ב. ניתן להרחיב את החקירה ולבדוק כיצד ערכים שונים של הפרמטר a משפיעים על גרף הפונקציה. למשל, כיצד ייראה גרף הפונקציה עבור $0 < a < \sqrt{2}$? ומה קורה עבור ערכים שליליים של הפרמטר a ? שימוש בכלים טכנולוגיים עשוי לתרום רבות להבנה כללית של מבנה המשפחה הנתונה, עבור ערכים שונים של הפרמטר.

3. פונקציה טריגונומטרית עם שני פרמטרים

נתונה הפונקציה $f(x) = a \sin^3 x - 3b \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$, מקביל לציר ה- x .

א. בטאו את ערכו של הפרמטר a באמצעות הפרמטר b .

ב. חקרו את הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וסרטטו את גרף שלה, בתנאי ש- $a > 0$.

פתרון

סעיף א: נגזור את הפונקציה תחילה. נציב את $x = \frac{\pi}{6}$ בפונקציה הנגזרת ונשווה אותה לאפס.

$$f'(x) = 3a \sin^2 x \cdot \cos x - 3b \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3b \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3}{4}a - 3b = 0 \Rightarrow a = 4b$$

תשובה לסעיף א: $a = 4b$.

סעיף ב: על-פי סעיף א, נוכל לרשום את הפונקציה הנתונה באמצעות פרמטר אחד:

$$f(x) = 4b \sin^3 x - 3b \sin x$$

כדי למצוא את נקודות הקיצון נגזור ונשווה לאפס:

$$f'(x) = 12b \sin^2 x \cdot \cos x - 3b \cos x$$

$$12b \sin^2 x \cdot \cos x - 3b \cos x = 0 \Rightarrow 3b \cos x (4 \sin^2 x - 1) = 0$$

נשווה כל אחד מגורמי המשוואה לאפס. ניתן לסכם את הפתרונות בטבלה כמו זו:

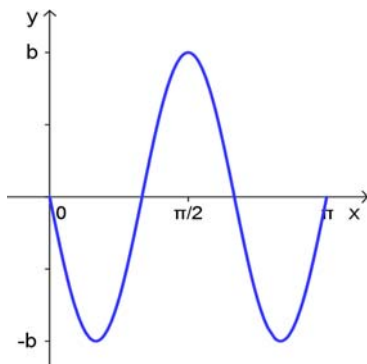
משוואה	$\cos x = 0$	$\sin x = \frac{1}{2}$	$\sin x = -\frac{1}{2}$
פתרונות כלליים	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$	$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$
פתרונות פרטיים בתחום $[0, \pi]$	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}$	אין פתרונות

טבלה 7

נבנה טבלת ערכים לזיהוי סוג הקיצון:

x	0	$x = \frac{\pi}{6}$	$< x <$	$x = \frac{\pi}{2}$	$< x <$	$x = \frac{5\pi}{6}$	π
$f'(x)$	-	0	+	0	-		+
$f(x)$		$-b \min$		$b \max$		$-b \min$	

טבלה 8



איור 88

שיעורי נקודות הקיצון הם:

נקודת מקסימום: $(\frac{\pi}{2}, b)$ ושתי נקודות מינימום: $(\frac{5\pi}{6}, -b)$, $(\frac{\pi}{6}, -b)$.

נקודות החיתוך עם ציר ה- x מתקבלות בקצות התחום: $(\pi, 0)$, $(\frac{2\pi}{3}, 0)$.

ובנקודות $(\frac{\pi}{3}, 0)$ ו- $(\frac{2\pi}{3}, 0)$.

מתוך הנתונים שנאספו בחקירה ניתן לסרטט את גרף הפונקציה (איור 88):

הערות דידקטיות

א. פעילות זו מזמנת התמודדות עם פונקציה טריגונומטרית עם שני פרמטרים. אולם, כבר בסעיף הראשון עוברים לפרמטר יחיד. כל משימה הקשורה לפרמטרים דורשת אבחנה בין פרמטר למשתנה, וזיהוי של תפקיד כל אחד מהם בתבנית הפונקציה והפונקציה הנגזרת. במיוחד נדרשת הקפדה על אבחנה זו בגזירה של פונקציה עם פרמטרים.

ב. אחד האתגרים בעבודה עם פרמטרים הוא התמודדות עם חישובים המובילים לתשובות סופיות הכוללות ביטויים עם פרמטרים.

ג. חשוב לשים לב שחקירת הפונקציה בסעיף ב מתאימה למקרה שבו $a > 0$. אילו לא היה ידוע ש- $a > 0$ לא היינו יכולים להסיק גם ש- $b > 0$ והיינו מקבלים שני מצבים אפשריים: אחד עבור $b > 0$ ואחד עבור $b < 0$. זאת משום שערך הנגזרת בכל נקודה תלוי ב- b . נוכל להרחיב את הפעילות ולבקש מהתלמידים לסרטט את שני המצבים.

ד. כדאי לציין שלמרות שהפונקציה $f(x) = a \sin^3 x - 3b \sin x$ המוגדרת בתחום R היא פונקציה אי-זוגית, הפונקציה הנתונה אינה אי-זוגית. תחום הפונקציה אינו סימטרי ביחס לראשית.

פעילות 20: חקירת הפונקציה טנגנס כפונקציה פנימית של פונקציה מורכבת

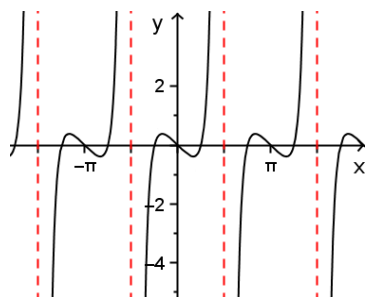
1. מה בין גרף הפונקציה $y = \tan^3 x - \tan x$ לגרפים של הפונקציות המרכיבות אותה?

ניתן לראות בפונקציה $y = \tan^3 x - \tan x$ (איור 89), הרכבה של הפונקציה $y = x^3 - x$ (איור 91) על הפונקציה $y = \tan x$ (איור 90). חקירת הפונקציה $y = \tan^3 x - \tan x$ מזמנת דיון בקשרים שבין הגרף שלה לבין הגרפים של הפונקציות המרכיבות אותה. בהמשך נציע הרחבה של החקירה.

אבני דרך בחקירת הפונקציה $y = \tan^3 x - \tan x$

תחום הפונקציה: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ לכל k שלם.

בכל נקודות האי-הגדרה עוברות אסימפטוטות אנכיות $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. מחזור הפונקציה הוא π .



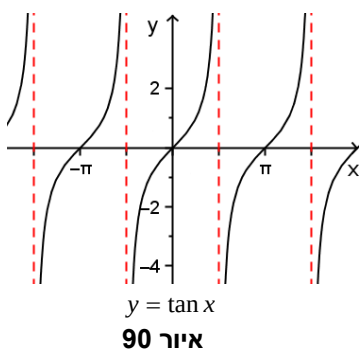
$y = \tan^3 x - \tan x$

איור 89

$y = \tan^3 x - \tan x \Leftrightarrow$ נקודות החיתוך עם ציר ה- x : $(k\pi, 0)$, $(\frac{\pi}{4} + k\pi, 0)$, $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, 0)$ לכל k שלם.

$y' = \frac{(3 \tan^2 x - 1)}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$ הנגזרת מתאפסת עבור $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ לכל k שלם.

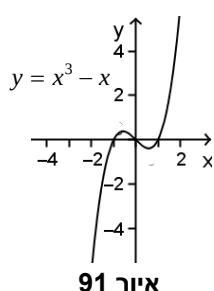
המשך החקירה מוביל אל הגרף שבאיור 89.



מה בין תכונות הפונקציה $y = \tan^3 x - \tan x$ לבין תכונות הפונקציות המרכיבות אותה?

ניתן לראות כי הפונקציה המורכבת "ירשה" מן הפונקציה הפנימית את המחזור, את האי-זוגיות ואת נקודות האי-הגדרה. תופעה זו מאפיינת פונקציות מורכבות.

נשים לב גם שהאסימפטוטות של הפונקציה הפנימית הן גם אסימפטוטות של הפונקציה המורכבת, ושלכל קטע של גרף הפונקציה שבין שתי אסימפטוטות יש דמיון ויזואלי בולט לגרף הפונקציה החיצונית $y = x^3 - x$ (איור 91). האם תופעה זו מאפיינת כל פונקציה מחזורית מורכבת? התשובה שלילית.



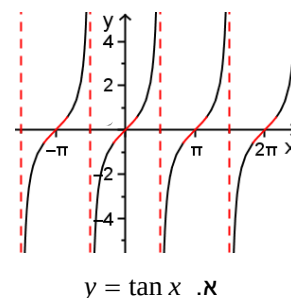
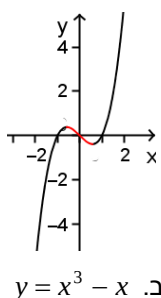
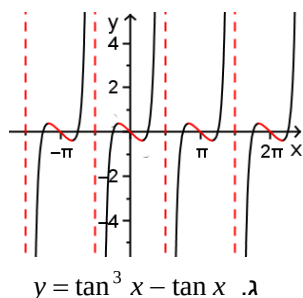
ההסבר לתופעה קשור בכך שהפונקציה $y = \tan x$ עולה בכל קטע שבין שתי נקודות אי-הגדרה, ומקבלת בתחום זה את כל הערכים הממשיים.

כך, למשל, הפונקציה $y = x^3 - x$ יורדת בתחום $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. ואילו הפונקציה $y = \tan^3 x - \tan x$ יורדת בתחומים החלקיים בהם $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, כלומר, כאשר

$$-\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{3} + \pi k \quad (k \text{ מספר שלם}).$$

איור 92 מציג זו לצד זו את הפונקציה $y = \tan^3 x - \tan x$ והפונקציות המרכיבות אותה. חלקי הגרף המתאימים לתחומי הירידה של הפונקציות $y = \tan^3 x - \tan x$ ו- $y = x^3 - x$ צבועים באדום. כמו כן צבועים באדום החלקים של גרף הפונקציה $y = \tan x$ בתחומים החלקיים בהם הפונקציה $y = \tan^3 x - \tan x$ יורדת.

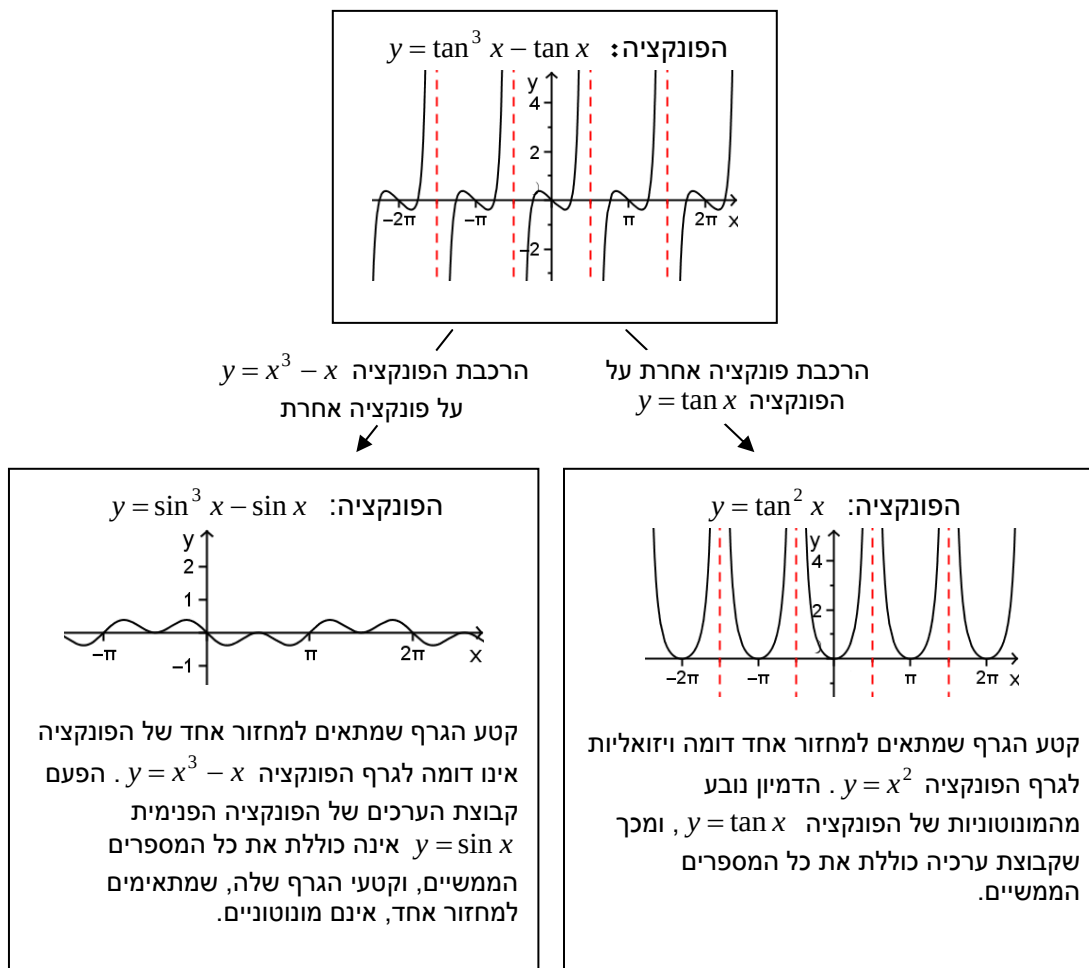
מצאו קשרים בין החלקים הצבועים באדום בשלושת הגרפים.



איור 92

2. לאן נוכל למנף את החקירה?

כדי לחדד את הבנת הקשרים בין פונקציה מורכבת לפונקציה הפנימית שלה, אשר נידונו בפעילות זו, נוכל לחקור פונקציות נוספות. איור 93 מציג מספר אפשרויות.



איור 93

3. חקירת הפונקציה $y = \frac{\tan x}{1 - \tan x}$ כהזדמנות לדיון בהתנהגות הפונקציה בנקודות אי-הגדרה

את הפונקציה $y = \frac{\tan x}{1 - \tan x}$ ניתן לראות כהרכבה של הפונקציה $y = \frac{x}{1 - x}$ על הפונקציה $y = \tan x$.

לא נציג חקירה מלאה של הפונקציה אלא נתמקד באחדות מתכונותיה הבולטות, ובדרך להסיקן ללא שימוש בנגזרת.

התנהגות הפונקציה בסביבת נקודות האי-הגדרה

הפונקציה מוגדרת כאשר $\cos x \neq 0$ וגם $\tan x \neq 1$, כלומר, כאשר

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{ו-} \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k \quad (k \text{ מספר שלם}), \quad (\text{איור 94}).$$

כיוון שבכל קטע שאורכו π , כאורך המחזור, יש לפונקציה

$$y = \frac{\tan x}{1 - \tan x}$$

נקודת אי-הגדרה אחת מכל סוג, נבדוק את

$$\text{התנהגות הפונקציה בסביבת } x = \frac{\pi}{4} \text{ ובסביבת } x = \frac{\pi}{2}.$$

בסביבת $x = \frac{\pi}{4}$ ערכי המכנה $1 - \tan x$ שואפים לאפס, ואילו

המונה $\tan x$ שואף ל-1. לכן יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית $x = \frac{\pi}{4}$.

כדי ללמוד את התנהגות הפונקציה בסביבת $x = \frac{\pi}{2}$ נחלק את המונה והמכנה ב- $\tan x$.

$$\frac{\tan x}{1 - \tan x} = \frac{\frac{\tan x}{\tan x}}{\frac{1}{\tan x} - \frac{\tan x}{\tan x}} = \frac{1}{\frac{1}{\tan x} - 1} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-1} = -1$$

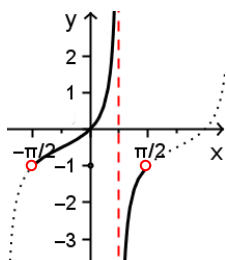
כאשר $x = \frac{\pi}{2}$ יש לפונקציה נקודת אי-רציפות סליקה שמשמעה חור בגרף הפונקציה.

איור 96 מציג את גרף הפונקציה $y = \frac{x}{1-x}$.

טבלה 9 מציגה קשרים בין תכונות הפונקציה $y = \frac{x}{1-x}$ (איור 96), לתכונות הפונקציה $y = \frac{\tan x}{1 - \tan x}$ (איור 94).

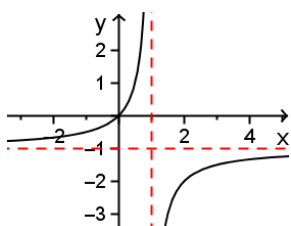
$y = \frac{\tan x}{1 - \tan x}$	$y = \frac{x}{1 - x}$
לפונקציה אסימפטוטה אנכית כאשר $\tan x = 1$.	לפונקציה אסימפטוטה אנכית $x = 1$.
כאשר ערכי $\tan x$ שואפים ל- ∞ ול- $-\infty$, ערכי הפונקציה $y = \frac{\tan x}{1 - \tan x}$ שואפים ל-1. לכן לגרף הפונקציה חורים בנקודות $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, -1\right)$ לכל k שלם.	לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y = -1$.
הפונקציה עולה בכל תחום חלקי שבין נקודות האי-הגדרה. (נעמיק בנקודה זו בהמשך.)	הפונקציה עולה בכל תחום חלקי שבין נקודות האי-הגדרה.

טבלה 9



איור 95

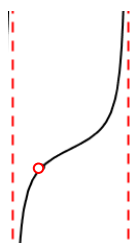
אם נמקד את המבט בגרף הפונקציה $y = \frac{\tan x}{1 - \tan x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (איור 95), נראה שהוא מזכיר בצורתו את גרף הפונקציה $y = \frac{x}{1-x}$.



איור 96

שאלה: מהם תחומי העלייה של הפונקציה $y = \frac{\tan x}{1 - \tan x}$?
תשובה: תחומי העלייה הם $-\frac{3\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, לכל k שלם.

שאלת העמקה וחידוד



איור 97

נשים לב שתחומי העלייה הם תחומים הכלואים בין שתי אסימפטוטות והם משתרעים משני עברי נקודת אי-הגדרה (איור 97). מדוע ניתן לראות בחלקי התחום שמשני עברי נקודת האי-הגדרה תחום עלייה אחד?

תשובה: כיוון שכל חלק הגרף שמימין לנקודת האי-הגדרה נמצא מעל חלק הגרף שמשמאל לה, מתקיימים תנאי ההגדרה של פונקציה עולה:

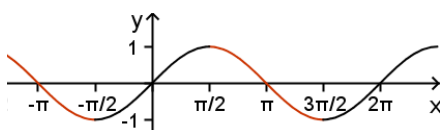
פונקציה $f(x)$ עולה בתחום G אם לכל שני ערכים $x_1 < x_2$ ב- G מתקיים: $f(x_1) < f(x_2)$.

התחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, לעומת זאת, אינו תחום עלייה של הפונקציה $y = \frac{\tan x}{1 - \tan x}$, כיוון שלא מתקיימים בו תנאי ההגדרה של פונקציה עולה (ראו איור 94).

פונקציות טריגונומטריות הפוכות ונגזרותיהן

הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות שייכות לקבוצת הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות ויש להן תפקיד חשוב ויישום רב באנליזה וביישומיה.

ארקסינוס – הפונקציה ההפוכה לפונקציה $y = \sin x$



איור 98

הפונקציה הממשית $y = \sin x$ מוגדרת בכל קבוצת המספרים הממשיים $-\infty < x < \infty$. בתחום זה היא אינה חד-חד-ערכית ולכן לא קיימת לה פונקציה הפוכה.

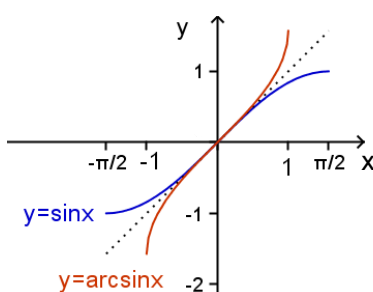
יחד עם זאת, בתחומים חלקיים בהם הפונקציה $y = \sin x$ מונוטונית יש לה פונקציה הפוכה (איור 98).

בפרט, בקטע $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ הפונקציה $y = \sin x$ עולה. קטע זה מועתק על-ידי $y = \sin x$ באופן חד-חד-ערכי על הקטע $-1 \leq y \leq 1$ בציר ה- y . לכן, בהתאם להגדרת פונקציה הפוכה (ר' עמוד 253), לפונקציה $y = \sin x$ בקטע $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ קיימת פונקציה הפוכה $y = g(x)$, אשר תחום הגדרתה הוא הקטע $-1 \leq x \leq 1$ בציר ה- x , וקבוצת הערכים שלה היא הקטע $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ בציר ה- y .

פונקציה זו נקראת **ארקסינוס** ומסומנת $y = \arcsin x$.

הגדרה

הפונקציה $y = \arcsin x$ היא פונקציה שתחומה הוא הקטע $-1 \leq x \leq 1$, קבוצת הערכים שלה היא $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, והערך $y = \arcsin x$ מוגדר על-ידי השוויון $\sin y = x$.



איור 99

לדוגמה, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ כי $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ו- $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$.

את גרף הפונקציה $y = \arcsin x$ (איור 99) ניתן לקבל על-ידי שיקוף גרף הפונקציה $y = \sin x$ בישר $y = x$ כאשר $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ (ר' פרק "פונקציות הפוכות ונגזרותיהן").

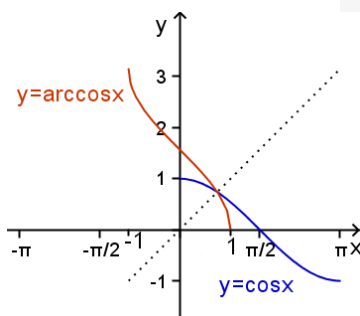
פונקציות טריגונומטריות הפוכות נוספות

בדומה לפונקציה $y = \sin x$, גם הפונקציות הטריגונומטריות האחרות, $y = \cos x$, $y = \tan x$ ו- $y = \cot x$ אינן פונקציות חד-חד-ערכיות בתחומן, ולכן לאף אחת מהן לא קיימת פונקציה הפוכה בכל תחום הגדרתה. הגדרת פונקציה הפוכה לכל אחת מן הפונקציות האלה מחייבת בחירת קטע של תחום הגדרה שבו הפונקציה חד-חד-ערכית.

הפונקציה $y = \arccos x$, שהיא הפונקציה ההפוכה לפונקציה $y = \cos x$ מתקבלת לאחר צמצום תחום הפונקציה $y = \cos x$ לקטע $0 \leq x \leq \pi$.

הגדרה

הפונקציה $y = \arccos x$ היא פונקציה שתחומה הוא הקטע $-1 \leq x \leq 1$, קבוצת הערכים שלה היא $0 \leq y \leq \pi$, והערך $y = \arccos x$ מוגדר על-ידי השוויון $\cos y = x$.



איור 100

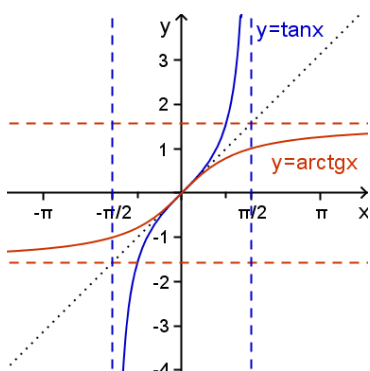
את גרף הפונקציה $y = \arccos x$ ניתן לקבל על-ידי שיקוף גרף הפונקציה $y = \cos x$ בישר $y = x$ כאשר $0 \leq x \leq \pi$ (איור 100).

נגדיר באופן דומה את הפונקציות ההפוכות לפונקציות $y = \tan x$ ו- $y = \cot x$.

הגדרה

הפונקציה $y = \arctan x$ היא פונקציה שתחומה $\mathbb{R}$, קבוצת הערכים שלה היא $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, והערך $y = \arctan x$ מוגדר על-ידי השוויון $\tan y = x$.

הפונקציה $y = \operatorname{arccot} x$ היא פונקציה שתחומה $\mathbb{R}$, קבוצת הערכים שלה היא $0 < y < \pi$, והערך $y = \operatorname{arccot} x$ מוגדר על-ידי השוויון $\cot y = x$.



איור 101

הגרפים של הפונקציות $y = \arctan x$ ו- $y = \operatorname{arccot} x$ מתקבלים, בהתאמה, על-ידי שיקוף הגרפים של הפונקציות $y = \tan x$ ו- $y = \cot x$ בישר $y = x$, כאשר $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ו- $0 < x < \pi$ בהתאמה.

נציין כי לגרף $y = \arctan x$ יש אסימפטוטות אופקיות $y = \frac{\pi}{2}$ כאשר $x \rightarrow \infty$ ו- $y = -\frac{\pi}{2}$ כאשר $x \rightarrow -\infty$.

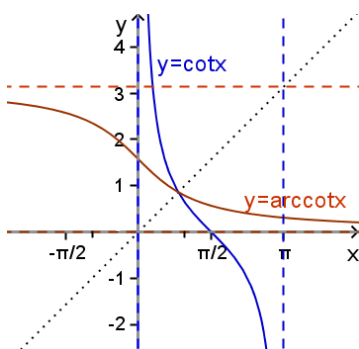
לגרף $y = \operatorname{arccot} x$ יש אסימפטוטות אופקיות $y = 0$ (ציר ה- x) כאשר $x \rightarrow \infty$ ו- $y = \pi$ כאשר $x \rightarrow -\infty$.

איור 101 מציג את הגרפים של הפונקציות

$y = \arctan x$ ו- $y = \tan x$ עם האסימפטוטות שלהם,

והאיור 102 מציג את הגרפים של הפונקציות

$y = \operatorname{arccot} x$ ו- $y = \cot x$ עם האסימפטוטות שלהם.



איור 102

קשרים בין פונקציות טריגונומטריות הפוכות

בין פונקציות טריגונומטריות הפוכות קיימים קשרים הנובעים מהגדרתן,

ומהקשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות המקוריות:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

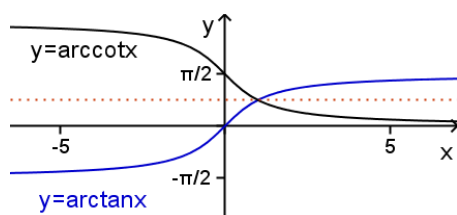
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

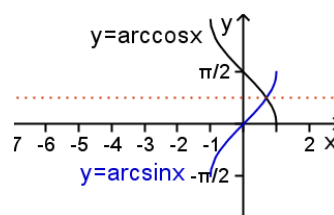
$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

המשמעות הגאומטרית של כל אחד מהקשרים האלה היא בכך ששתי פונקציות בכל שוויון סימטריות זו

לזו ביחס לישר $y = \frac{\pi}{4}$ (מדוע?). איורים 103 ו-104 ממחישים קשרים אלה.



איור 104



איור 103

נגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות

בהוכחת הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות נתבסס על נוסחת הנגזרת של פונקציה

הפוכה לפיו אם $f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות הפוכות זו לזו, אז $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$, בכל נקודה x

בתחום של $g(x)$ בה הנגזרת במכנה השבר קיימת ושונה מ-0.

נגזרת הפונקציה $y = \arcsin x$

הנגזרת של הפונקציה $y = \sin x$ היא $y' = \cos x$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}, \quad x \in (-1, 1)$$

נפשט את הביטוי במכנה. אם $y = \arcsin x$ אז $x = \sin y$

$$\cos(\arcsin x) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

חזרה
למשתנה x

לכן:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

נגזרת הפונקציה $y = \arctan x$

מהקשר $y = \arctan x$ נובע הקשר $x = \tan y$ (בתחום המתאים).

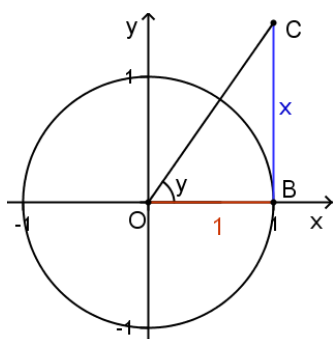
לפי נגזרת הטנגנס $x' = \frac{1}{\cos^2 y}$, ולכן, לפי הנוסחה לנגזרת פונקציה הפוכה $y' = \cos^2 y$.

כדי לבטא את הנגזרת כפונקציה של x ניעזר בזהויות טריגונומטריות.

$$\tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$$

$$\text{לכן: } \frac{1}{\cos^2 y} = \tan^2 y + 1 \quad \text{ו-} \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\text{קיבלנו: } (\arctan x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$$



איור 105

את הקשר $\cos^2 y = \frac{1}{x^2 + 1}$ (כאשר $y = \arctan x$) אפשר להמחיש, ברביע הראשון, בדרך גאומטרית (איור 105).

נסמן במעגל היחידה הטריגונומטרי משולש ישר-זווית OBC , כך שהניצב OB הוא רדיוס שמונח על החלק החיובי של ציר ה- x , הניצב BC משיק למעגל בנקודה B , ו- $\angle COB = y$.

לפי הגדרת הפונקציה $\arctan$ מקבלים $BC = x$.

ממשפט פיתגורס נקבל $OC = \sqrt{1 + x^2}$, ולכן, לפי הגדרת הקוסינוס במשולש

$$\text{ישר-זווית, נקבל } \cos^2 y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

את הנגזרות של הפונקציות $\arccos x$, $\text{arccot } x$ אפשר לפתח באמצעות הקשרים

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad \text{ו-} \quad \text{arccot } x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

נשאיר את ההוכחה לקוראים.

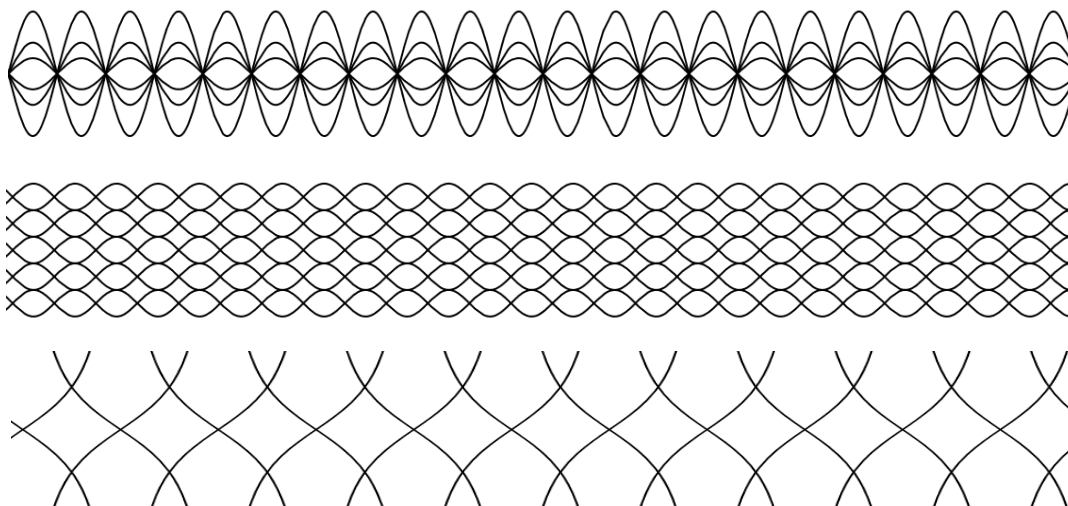
בטבלה להלן מוצגים אפיוני יסוד (כולל נגזרת) של ארבע הפונקציות הטריגונומטריות הפוכות.

הפונקציה	תחום	קבוצת הערכים	תנאים למציאת y	נגזרת
$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} \sin y = x \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$	$\begin{cases} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctan x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} \tan y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arccot} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$	$\begin{cases} \cot y = x \\ 0 < y < \pi \end{cases}$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

טבלה 10: פונקציות טריגונומטריות הפוכות

ולקינוח: קישוטים טריגונומטריים

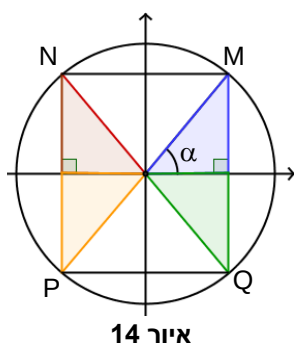
צרו את הקישוטים הבאים תוך שימוש בגרפים של פונקציות טריגונומטריות.



איור 106

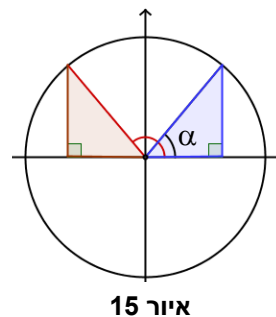
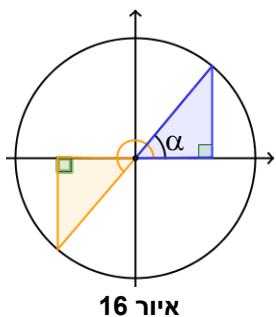
אתם מוזמנים להציע קישוטים נוספים.

פעילות 2: זהויות טריגונומטריות מתוך מעגל היחידה



לכל זווית מתאימה נקודה M על מעגל היחידה. נסרטט במעגל היחידה מלבן $MNPQ$ שצלעותיו מקבילות לצירים. הנקודה M מתאימה לזווית α . נסרטט את אלכסוני המלבן ונתבונן בארבעת המשולשים החופפים המודגשים (איור 14).

לכל אחד מן האיורים 15 ו-16 רשמו זהות שמקשרת בין הסינוסים של שתי זוויות וזהות שמקשרת בין הקוסינוסים של שתי זוויות. הדגימו כל זהות באמצעות שתי זוויות (ראו דוגמה מתחת לכל איור).



זהות: $\sin(\text{---}) = \text{---}$

דוגמה 1: $\sin 220^\circ = \text{---}$

דוגמה 2: ---

זהות: $\cos(\text{---}) = \text{---}$

דוגמה 1: $\sin 220^\circ = \text{---}$

דוגמה 2: ---

זהות: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

דוגמה 1: $\sin 160^\circ = \sin \text{---}$

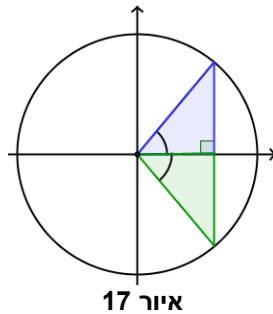
דוגמה 2: ---

זהות: $\cos(180^\circ - \alpha) = \text{---}$

דוגמה 1: $\cos 160^\circ = \text{---}$

דוגמה 2: ---

רשמו על-פי איור 17 שתי זהויות המקשרות בין סינוסים של זוויות, ושתי זהויות המקשרות בין קוסינוסים של זוויות. רשמו שתי דוגמאות לכל זהות.



זהות: $\sin(__) = __$

דוגמה: $\sin(-20^\circ) = -\sin(20^\circ)$

דוגמה: $__$

זהות: $\cos(__) = __$

דוגמה: $\cos(-20^\circ) = __$

דוגמה: $__$

זהות: $\sin(360^\circ - \alpha) = __$

דוגמה: $\sin 340^\circ = __$

דוגמה: $__$

זהות: $\cos(360^\circ - \alpha) = __$

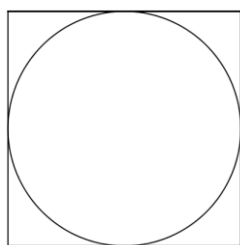
דוגמה: $\cos 340^\circ = __$

דוגמה: $__$

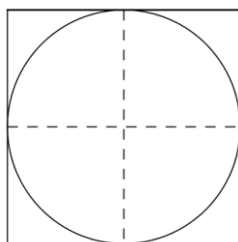
לזהויות נוספות שניתן לראות במעגל היחידה נתייחס בעמוד 368.

המחשת ערכי הפונקציות סינוס וקוסינוס באמצעות קיפולי נייר³

לאחר הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות במעגל היחידה, ניתן לשלב פעילות באמצעות קיפולי נייר להוראת חישוב ערכי הפונקציות של זוויות מיוחדות.



איור 18



איור 19

מעגל היחידה

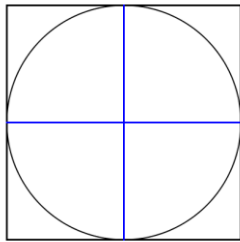
1. כל תלמיד מקבל ריבוע נייר שצלעו 2 יחידות אורך.

בתוך הריבוע חסום מעגל (איור 18).

מהו רדיוס המעגל?

נקפל את הריבוע לחצי ועוד פעם לחצי, כבאיור 19.

³ מעובד מתוך סבר (2010).



איור 20

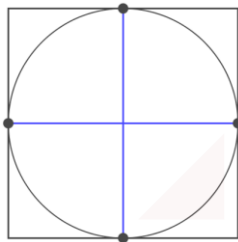
2. נפתח את הריבוע ונדגיש את קווי הקיפול.
התקבל מעגל היחידה במערכת צירים (איור 20).

ערכי פונקציית סינוס של הזוויות $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

נסמן ארבע נקודות חיתוך של מעגל היחידה עם צירי המערכת (איור 21).
לאילו זוויות מתאימות הנקודות? מהו שיעור ה- y בכל אחת מהנקודות?

על-פי ההגדרה של פונקציית הסינוס נרשום:

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1, \quad \sin 180^\circ = 0, \quad \sin 270^\circ = -1$$



איור 21

ערכי פונקציית סינוס של הזוויות $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$

1. נתחיל במעגל היחידה שבאיור 21.

2. נקפל את הריבוע על-פי שני האלכסונים, נפתח ונדגיש את הקווים.

3. נסמן את נקודות החיתוך של האלכסונים עם מעגל היחידה (איור 22).

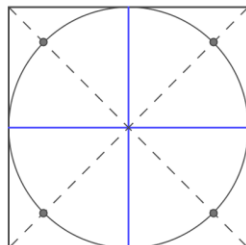
לאילו זוויות מתאימה הנקודה שנמצאת ברביע הראשון?

חשבו את $\sin 45^\circ$ (היעזרו במשולש המסומן באיור 24).

4. לאילו זוויות מתאימות שלוש הנקודות האחרות?

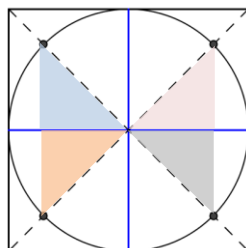
מהו שיעור ה- y בכל אחת מהן?

היעזרו בחפיפת משולשים או בשיקולי סימטריה (איור 23).

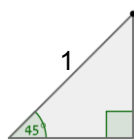


איור 22

5. נסכם: $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



איור 23



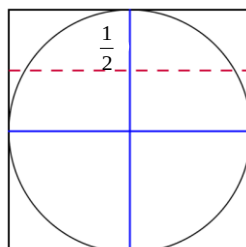
איור 24

ערכי פונקציית סינוס של הזוויות $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$

1. נתחיל במעגל היחידה שבאיור 25.

2. נצמיד את הצלע העליונה של הריבוע אל ציר ה- x .

קו הקיפול חוצה את הקטע החיובי של ציר ה- y (איור 25).



איור 25

3. נפתח את הריבוע, נדגיש את קו הקיפול,

נסמן את נקודת החיתוך של קו הקיפול עם מעגל היחידה

ברביע הראשון, ונחבר את הנקודה עם ראשית הצירים.

על-ידי קיפול נוסף נוריד אנך מהנקודה שסימנו אל ציר ה- x (איור 26).

מהו שיעור ה- y של הנקודה שברביע הראשון?

לאילו זוויות מתאימה הנקודה? (נמקו).

היעזרו במשפט על משולש ישר-זווית עם ניצב השווה למחצית היתר.