

חקירת פונקציות הכוללות שורש ריבועי

פרק זה עוסק בפונקציות המשלבות פולינומים עם פונקציית השורש הריבועי. השילוב נעשה באמצעות פעולת ההרכבה ובאמצעות ארבע פעולות החשבון.

הפרק פותח בפעילויות חקירת פונקציות, בהן אוספים מידע ללא שימוש בנגזרת, תוך חזרה אל מושגים שונים שנלמדו בעבר, ועובר לחקירת פונקציה תוך שימוש בנגזרות הפונקציה.

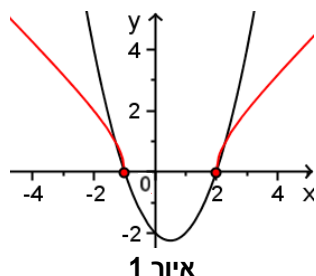
פעילויות החקירה מלוות בהצעות הרחבה, שיכולות להוביל לחקירות נוספות מקושרות זו בזו.

חלק מן הפעילויות שמופיעות תחת הכותרת "רגע לפני הנגזרת" מתאימות מאוד גם כמשימות סיכום.

פונקציות עם שורשים רגע לפני הנגזרת

פעילות 1: סרטוט גרף של פונקציה עם שורש ריבועי באמצעות פונקציות מוכרות

פונקציית שורש מורכבת על פונקציה ריבועית



איור 1 מציג במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2 - x - 2$ (בשחור) ו- $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ (באדום).

ננסה להסביר כמה שיותר תכונות של הפונקציה g באמצעות התכונות של הפונקציה הפנימית f וללא שימוש בנגזרת.

- כיוון שלא קיים שורש ממשי למספר שלילי, תחום ההגדרה של g הוא התחום בו הפונקציה הפנימית אי-שלילית, כלומר $x \leq -1$ או $x \geq 2$.

- g , ככל פונקציית שורש מורכבת, אי-שלילית בכל תחומה.

- ערך הפונקציה g הוא 0 בנקודות האפס של הפונקציה הפנימית. מכאן שנקודות החיתוך של g ושל f עם ציר ה- x מתלכדות.

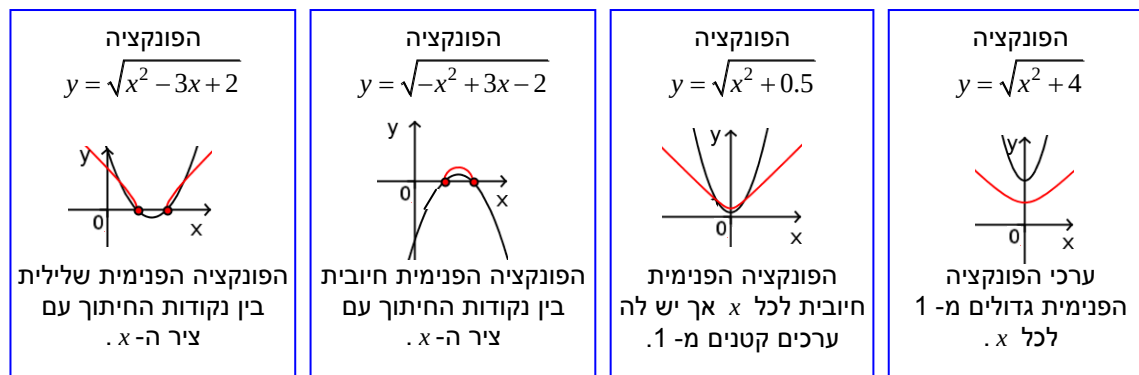
- כיוון ש- g אי-שלילית בכל תחומה, הערך המינימלי שהיא יכולה לקבל הוא 0. לכן, נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x הן נקודות מינימום מוחלט.

- בגלל המונוטוניות של פונקציית השורש תחומי העלייה והירידה של g זהים לתחומי העלייה והירידה של f . במילים פשוטות: ככל שמוציאים שורש ריבועי ממספר גדול יותר כך התוצאה גדולה יותר.

מעניין לשים לב כי הגרפים נחתכים בנקודות בהן $y = 1$. שורש ריבועי של מספר קטן מ-1 גדול מהמספר (למשל, $\sqrt{0.25} = 0.5$), ולכן בקטעים בהם $0 < f(x) < 1$ הפונקציה g נמצאת מעל הפונקציה f . בקטעים בהם $f(x) > 1$ הפונקציה g נמצאת מתחת לפונקציה f .

הערות

חשיבותן של פעילויות בהן מסרטטים סקיצה של גרף הפונקציה ללא שימוש בנגזרת, היא בכך שהן נותנות בידי התלמידים כלים שישמשו אותם בעתיד לבדיקת תוצאות החקירה אליהן יגיעו באמצעות הנגזרת. איור 2 מציג דוגמאות מגוונות המדגישות את הקשר בין פונקציית השורש לפונקציה הפנימית. (גרף פונקציית השורש הוא הגרף האדום וגרף הפונקציה הפנימית הוא הגרף השחור.)



איור 2

פעילות 2: חקירת הקשר בין גרף של פונקציית שורש מורכבת לבין הפונקציה הפנימית בשילוב מחשב

שילוב מחשב מאפשר לתלמידים לזהות תופעה באמצעות מקרים פרטיים, להעלות השערות ולבחון אותן באמצעות דוגמאות שהם בוחרים בעצמם.

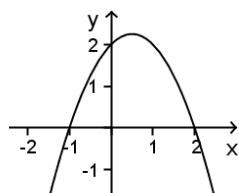
בתוכנות מחשב רבות ניתן להגדיר פונקציה $f(x)$, ובעזרתה להגדיר פונקציית שורש מורכבת כ- $(f(x))^{\frac{1}{2}}$. בהמשך ניתן לשנות את הפונקציה f בלבד, והפונקציה המורכבת משתנה בהתאם. הפעילות הנוכחית היא ואריאציה משולבת מחשב של פעילות 1.

א. סרטטו במחשב את הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2 - x - 2$ ו- $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$. צבעו את הגרף של f בשחור ואת הגרף של g באדום.

ב. הגרף של הפונקציה g כולל שני ענפים נפרדים. הסבירו מדוע.

ג. רשמו את תחומי העלייה והירידה של שתי הפונקציות. מה הקשר ביניהם?

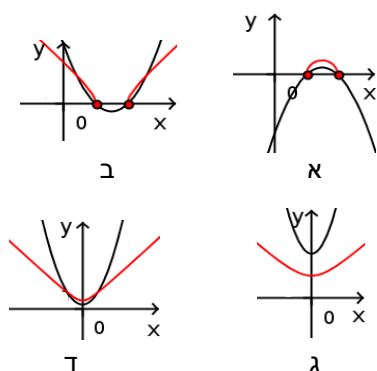
ד. סמנו את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות. מהו שיעור ה- y של נקודות אלה? האם זה מקרי? נסו להסביר את התופעה.



איור 3

ה. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + x + 2$ (איור 3). הוסיפו לסרטוט, על-פי השערתכם, את גרף הפונקציה $g(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$.

ו. סרטטו במחשב את גרף הפונקציה $g(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$ והשוו את הגרף הממוחשב עם הגרף שלכם.



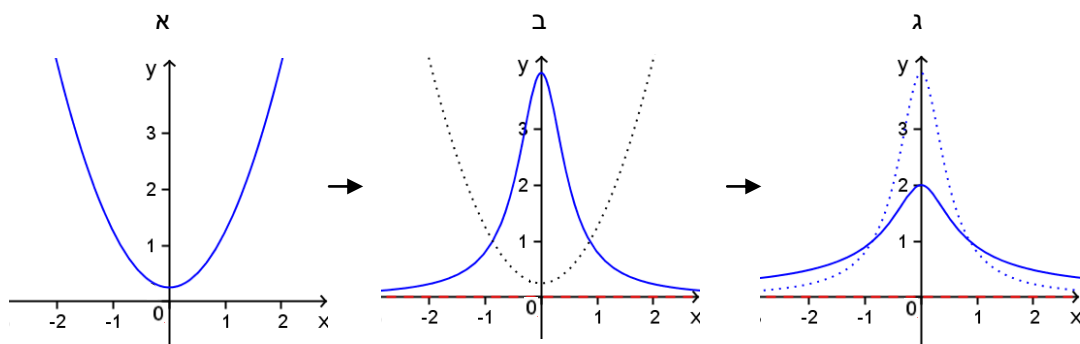
איור 4

ז. לפניכם גרפים של זוגות של פונקציות שורש מורכבות (באדום) עם הפונקציות הפנימיות שלהן (בשחור) (איור 4).
סרטטו במחשב זוגות של פונקציות המתאימים לכל אחד מן האיורים. תארו כיצד בחרתם את הפונקציה הפנימית בכל אחד מן המקרים.

פעילות 3: סרטטו הגרף של פונקציה עם שורש ריבועי באמצעות סדרת פעולות על פונקציות מוכרות

$$y = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 0.25}}$$

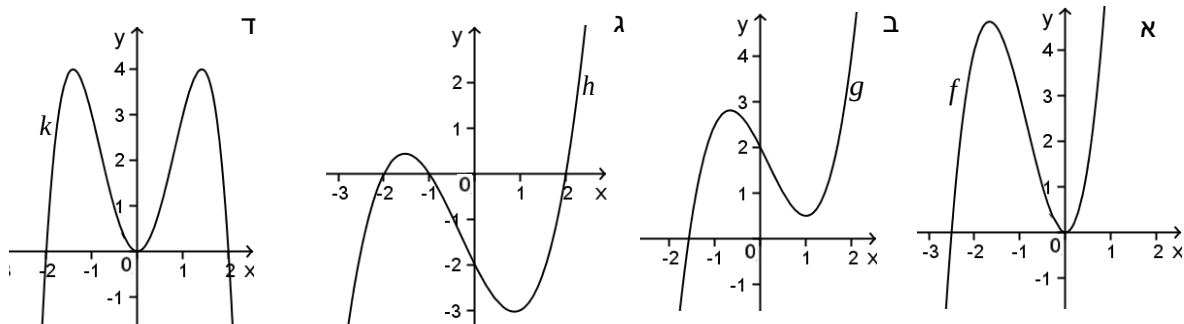
הפונקציה הפנימית היא פונקציה הופכית לפונקציה ממעלה שנייה.
נסרטט תחילה את הפרבולה המתאימה לפונקציה שבמכנה (איור 5א), בעזרתה נסרטט את גרף הפונקציה ההופכית לה (איור 5ב), ולבסוף את הגרף של הפונקציה הנתונה (איור 5ג).



איור 5: סרטטו גרף של פונקציה עם שורש ריבועי בעזרת סדרת פעולות על פונקציות

סרטטו גרפים של פונקציות שורש מורכבות כשנתון גרף הפונקציה הפנימית, ללא תבנית

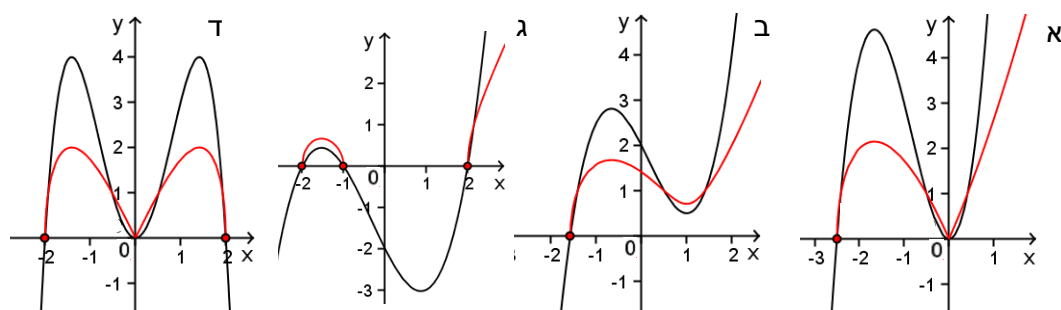
באיור 6 מוצגים הגרפים של הפונקציות f , g , h ו- k .
סרטטו את הגרפים של הפונקציות $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt{g(x)}$, $\sqrt{h(x)}$ ו- $\sqrt{k(x)}$.



איור 6

פתרון

פונקציות השורש מופיעות באדום.

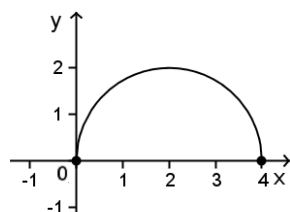


איור 7

פעילות 4: אסימפטוטות של פונקציות עם שורשים

הפעם הראשונה בה תלמידים פוגשים פונקציות בעלות אסימפטוטות שונות ב- ∞ וב- $(-\infty)$ היא בנושא פונקציות עם שורשים. הטכניקות למציאת האסימפטוטות אינן תמיד פשוטות ומחייבות משנה זהירות. כאשר הכלים למציאת האסימפטוטות אינם מצויים בידי התלמידים הם יכולים לשער מהן האסימפטוטות על-ידי הצבת ערכים בפונקציה.

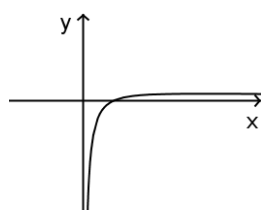
נתבונן במספר דוגמאות.



איור 8

הפונקציה $y = \sqrt{4x - x^2}$ (איור 8)

תחום הגדרה של הפונקציה הוא קטע סגור, $0 \leq x \leq 4$. כיוון שאין לפונקציה נקודות אי-הגדרה שגובלות בתחום ההגדרה, אין לפונקציה אסימפטוטות אנכיות. כיוון שהפונקציה אינה מוגדרת עבור ערכי x גדולים בערכם המוחלט, הרי שאין לה גם אסימפטוטות אופקיות.



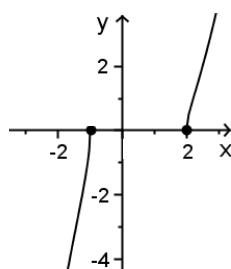
איור 9

הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$ (איור 9)

תחום ההגדרה של הפונקציה $0 < x$ הוא קרן שאינה כוללת את נקודת הקצה, $x = 0$. נבדוק אם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית ב- $x = 0$. בהתאם לתחום ההגדרה, יש לבדוק גבול מימין בלבד.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$$

כיוון ששני המחברים שואפים לאפס כאשר $x \rightarrow \infty$ יש לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y = 0$.



איור 10

הפונקציה $y = (x-1)\sqrt{x^2 - x - 2}$ (איור 10)

תחום ההגדרה של הפונקציה כולל את נקודות הקצה. לכן אין לפונקציה אסימפטוטות אנכיות. הפונקציה הנה מכפלה של גורמים השואפים ל- $\pm \infty$ כאשר ערכי x שואפים לאינסוף בערכם המוחלט. לכן אין לפונקציה אסימפטוטות אופקיות.

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{(x-1)} \quad \text{הפונקציה}$$

תחום הפונקציה הוא $x \geq 2$ או $x \leq -1$

נקודות הקצה של תחום הפונקציה שייכות לתחום ההגדרה. לכן אין לפונקציה אסימפטוטות אנכיות. נשים לב כי המכנה מתאפס ב- $x=1$ אך נקודה זו אינה גובלת בתחום ההגדרה של הפונקציה.

בכדי למצוא את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה נבדוק את גבולות הפונקציה ב- ∞ וב- $-\infty$.
כאשר $x \rightarrow \infty$ נקבל:

$$\frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{(x-1)} = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 1}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

כאשר $x \rightarrow \infty$
 $x-1$ חיובי, ולכן
 $x-1 = \sqrt{(x-1)^2}$

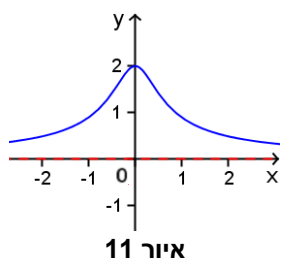
חילוק המונה והמכנה
של השבר ב- x^2

וכאשר $x \rightarrow -\infty$ נקבל:

$$\frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{(x-1)} = -\sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 1}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$$

כאשר $x \rightarrow -\infty$ $x-1$
שלילי, ולכן
 $x-1 = -\sqrt{(x-1)^2}$

כלומר, לפונקציה שתי אסימפטוטות אופקיות שונות $y=1$ ו- $y=-1$.
דיון נוסף בפונקציה זו מופיע בעמוד 340.



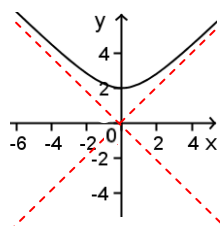
$$y = \frac{1}{x^2 + 0.25} \quad \text{הפונקציה (איור 11)}$$

תחום הפונקציה הוא הישר הממשי ולכן אין לה אסימפטוטות אנכיות.
כיוון שהפונקציה זוגית נוכל להסיק שאם יש לה אסימפטוטה אופקית,
יש לה אסימפטוטה אופקית אחת.
כיוון ש-

$$\frac{1}{x^2 + 0.25} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

האסימפטוטה האופקית היא $y=0$.

הפונקציה $y = \sqrt{x^2 + 4}$



איור 12

הפונקציה מוגדרת בכל הישר הממשי ומכאן שאין לה אסימפטוטות אנכיות. כיוון שערכי הפונקציה שואפים ל- ∞ , כאשר ערכי x שואפים בערכם המוחלט ל- ∞ , אין לפונקציה אסימפטוטות אופקיות.

נראה שיש לפונקציה אסימפטוטות משופעות.

ניזכר: אם יש לפונקציה ב- ∞ אסימפטוטה משופעת $y = ax + b$ אז קיימים הגבולות

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{ו-} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$$

באופן דומה מוצאים אסימפטוטה משופעת ב- $(-\infty)$.

מציאת אסימפטוטה משופעת ב- ∞ .

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} &= \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x| \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \\ \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} &= \dots = \frac{|x| \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \frac{x \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \sqrt{\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

אם יש לפונקציה אסימפטוטה משופעת ב- ∞ אז שיפועה $a = 1$

כדי לבדוק אם האסימפטוטה קיימת נבדוק את הגבול.

$$f(x) - ax = \sqrt{x^2 + 4} - 1x = \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - x)(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

מכאן $b = 0$.

לפונקציה יש ב- ∞ אסימפטוטה משופעת שמשוואתה $y = x$.

כאשר $x \rightarrow -\infty$, ערכי x שליליים ולכן:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} = \dots = \frac{|x| \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \frac{-x \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = -\sqrt{\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$$

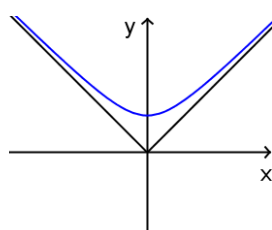
אם יש לפונקציה אסימפטוטה ב- $-\infty$ אז שיפועה $a = -1$

כדי לבדוק אם האסימפטוטה קיימת נבדוק את הגבול.

$$\begin{aligned} f(x) - ax &= \sqrt{x^2 + 4} - (-1)x = \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + x)(\sqrt{x^2 + 4} - x)}{\sqrt{x^2 + 4} - x} = \\ &= \frac{x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} - x} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x} = \frac{4}{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \end{aligned}$$

כיוון שהגבול סופי נוכל להסיק כי $b = 0$.

לפונקציה יש ב- $-\infty$ אסימפטוטה משופעת שמשוואתה $y = -x$.



איור 13

תלמידי בית הספר בדרך כלל אינם מיומנים בטכניקות של חישוב גבולות המאפשרות לחשב אסימפטוטות אלה. בכל זאת, יפה להראות במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה $y = \sqrt{x^2 + 4}$ וגרף הפונקציה $y = |x|$ (איור 13). קל להבין אינטואיטיבית שכאשר ערכי x גדולים בערכם המוחלט ערכי הפונקציה קרובים מאוד לערכי הפונקציה $y = \sqrt{x^2} = |x|$. ניתן להראות שלכל פונקציית שורש המורכבת על פונקציה ממעלה שנייה, ואשר תחום ההגדרה שלה אינו קטע סגור, יש שתי אסימפטוטות משופעות שונות.

בניית דוגמאות של פונקציות בהתאם לאסימפטוטות

1. הביאו 2 דוגמאות לפונקציה עם שורש ריבועי שיש לה אסימפטוטה אופקית אחת, $y = 2$, שהיא אסימפטוטה ב- ∞ וגם ב- $-\infty$.

2. הביאו 2 דוגמאות לפונקציה עם שורש ריבועי שיש לה שתי אסימפטוטות אופקיות, $y = 2$ ו- $y = 4$.

3. הביאו 2 דוגמאות לפונקציה עם שורש ריבועי שאין לה אסימפטוטה אופקית, ויש לה אסימפטוטה אנכית $x = 4$.

4. הביאו דוגמה לפונקציה עם שורש ריבועי שיש לה שתי אסימפטוטות משופעות ששיפועיהן 2 ו-(-2).

5. חברו משימות נוספות של בניית דוגמאות. מה מחדדת כל משימה שחברתם?



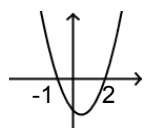
פעילות 5: איסוף מידע על פונקציות וסרטוט סקיצות של גרפים ללא שימוש בנגזרת

בפעילות זו נתבונן בשלוש פונקציות, $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2 - x - 2}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{(x-1)}$ ו- $h(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$.

התבוננות בפונקציות מנה ומכפלה הבנויות מאותם הגורמים, מאפשרת לנצל את המידע שנאסף בחקירת פונקציה אחת, ולהתמקד בהשפעה של השינוי בתבנית על תכונותיה ועל הגרף שלה.

סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2 - x - 2}$.

תחום ההגדרה של הפונקציה



איור 14

המגבלה היחידה על תחום ההגדרה היא מגבלת השורש הריבועי. נמצא את קבוצת האמת של האי-שוויון: $x^2 - x - 2 \geq 0$. מגרף הפונקציה $y = x^2 - x - 2$, המוצג באיור 14, נסיק כי תחום ההגדרה הוא $x \leq -1$ או $x \geq 2$.

נקודות החיתוך עם הצירים

כדי למצוא את נקודות החיתוך עם ציר ה- x נפתור את המשוואה $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} = 0$ ונקבל $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ו- $x_3 = 2$. כיוון ש- $x = 1$ אינה בתחום ההגדרה, נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x הן: $(-1, 0)$ ו- $(2, 0)$.

הפונקציה אינה מוגדרת כאשר $x = 0$ ולכן אין לה נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה

הפונקציה היא מכפלה של שני גורמים.

הגורם $\sqrt{x^2 - x - 2}$ אי-שלילי בכל התחום, ולכן חיובי בכל נקודה שאינה נקודת אפס של הפונקציה.

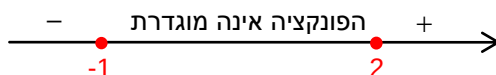
הגורם $x - 1$ חיובי כאשר $x > 1$ ושלילי כאשר $x < 1$.

תחום ההגדרה של הפונקציה מורכב משני תחומים חלקיים $x \geq 2$ ו- $x \leq -1$.

כאשר $x = 2$ וכאשר $x = -1$ ערך הפונקציה הוא אפס.

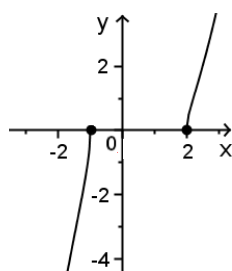
כאשר $x > 2$ שני הגורמים חיוביים ולכן הפונקציה חיובית.

כאשר $x < -1$ הגורם $\sqrt{x^2 - x - 2}$ חיובי והגורם $x - 1$ שלילי. לכן הפונקציה שלילית.



ראינו (עמוד 336) שלפונקציה אין אסימפטוטות.

בעזרת המידע שאספנו עד כה, מתקבלת הסקיצה הבאה של גרף הפונקציה.



איור 15

על מנת לקבל מידע נוסף על התנהגות הפונקציה נזדקק, כמובן, לכלים של החשבון הדיפרנציאלי.

סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה: $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{(x - 1)}$

תחום ההגדרה של הפונקציה

תחום ההגדרה של הפונקציה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2 - x - 2}$, שחקרנו זה עתה.

הפעם נוספה הדרישה $x \neq 1$ אשר מבטיחה שהמכנה לא יתאפס. כיוון ש- $x = 1$ לא היה בתחום ההגדרה של

הפונקציה בדוגמה 1, תחום ההגדרה נשאר כמקודם $x \leq -1$ או $x \geq 2$.

תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה

כדי לקבוע את תחומי החיוביות של הפונקציה $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{(x - 1)}$ עלינו

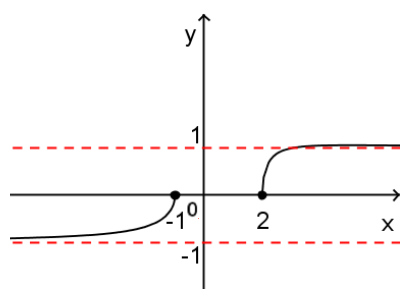
לבדוק את תחומי החיוביות והשליליות של המונה והמכנה הנמצאים בתחום הפונקציה, כיוון שפונקציה זו והפונקציה f , שחקרנו זה עתה, בנויות

מאותם הגורמים, הרי שתחומי החיוביות והשליליות שלהן זהים. מכאן:

הפונקציה חיובית בתחום $x > 2$ ושלילית בתחום $x < -1$.

ראינו (עמוד 336) כי לפונקציה שתי אסימפטוטות אופקיות $y = 1$ ו-

$y = -1$, ואין לה אסימפטוטות אנכיות.



איור 16

על-פי המידע שאספנו עד כה נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה (איור 16).

על מנת לקבל מידע נוסף על התנהגות הפונקציה נזדקק, כמובן, לנגזרת.

$$h(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2 - x - 2}} \quad \text{סרטוט גרף הפונקציה}$$

תחום ההגדרה של הפונקציה

בבואנו לקבוע את תחום ההגדרה עלינו להביא בחשבון את הנקודות בהן הביטוי בשורש שלילי, ואת הנקודות בהן המכנה מתאפס. על מגבלות תחום ההגדרה של הפונקציות f ו- g , שחקרנו זה עתה, נוספות המגבלות $x \neq -1$ ו- $x \neq 2$. תחום ההגדרה הוא, אם כן: $x < -1$ או $x > 2$.

נקודות חיתוך עם הצירים

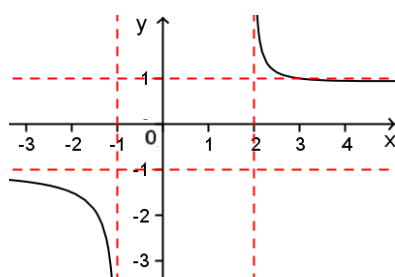
לפונקציה אין נקודות חיתוך עם הצירים, כיוון שתחום ההגדרה אינו כולל את $x = 0$, ואינו כולל את $x = 1$, ערך x שמאפס את מונה הפונקציה.

תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה

תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה h זהים לתחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות f ו- g , שחקרנו זה עתה. הפונקציה חיובית בתחום $x > 2$ ושלילית בתחום $x < -1$.

אסימפטוטות מקבילות לצירים

תחום ההגדרה של הפונקציה אינו כולל את קצוות התחום $x = 2$ ו- $x = -1$. בסביבה מימין ל- $x = 2$ הפונקציה חיובית ושואפת ל- ∞ , ומשמאל ל- $x = -1$ הפונקציה שלילית ושואפת ל- $-\infty$. מכאן שלפונקציה אסימפטוטות אנכיות $x = 2$ ו- $x = -1$.



איור 17

כמו במקרה של הפונקציה $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{(x-1)}$ ניתן להראות כי לפונקציה שתי אסימפטוטות אופקיות שונות $y = 1$ ו- $y = -1$. גרף הפונקציה מוצג באיור 17.

חקירת פונקציות בשרות האלגברה

בדרך בה גילינו תחומי חיוביות ושליליות של הפונקציות ניתן לפתור גם אי-שוויונות חלשים, לדוגמה:

$f(x) = (x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$	$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{(x-1)} \geq 0$	$f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2 - x - 2}} \geq 0$	אי-שוויון
$x \geq 2$	$x \geq 2$	$x > 2$	פתרון

טבלה 1

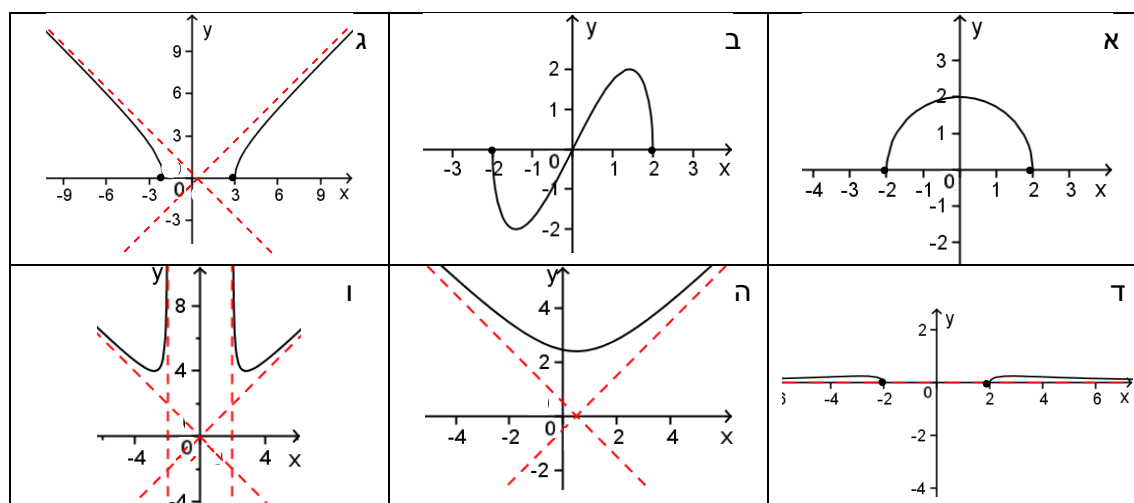
פעילות 6: מי הפונקציה? מי הגרף?

בדוגמאות שהובאו עד כה, ראינו שניתן להשיג לא מעט מידע על תכונות של פונקציות ללא שימוש בנגזרת. יחד עם זאת, חשוב להדגיש שהמידע הנאסף בדרך זו הוא חלקי בלבד. אחת הדרכים לדיון בגרפים של פונקציות ללא שימוש בנגזרת היא התאמה של גרפים לפונקציות, מתוך מבחר של גרפים נתונים. בדרך זאת מתבהרים גם המידע אותו ניתן להשיג טרם השימוש בנגזרת וגם המידע שחסר. בעת דיון בפעילות מסוג זה בכיתה כדאי לבקש מהתלמידים להציע כמה שיותר שיקולים לזיהוי הגרפים המתאימים לפונקציות.

לפניכם שש פונקציות ושישה גרפים. התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאים לה.

$k(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$.3	$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.2	$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.1
$g(x) = \sqrt{x^2 - x + 6}$.6	$m(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$.5	$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2}$.4

טבלה 2



איור 18

פתרון: 1; 2א; 3ג; 4ד; 5; 6ה.

שיקולים אפשריים:

הפונקציה היחידה המוגדרת בכל הישר הממשי היא g , ולכן מתאים לה גרף ה. הפונקציות f ו- h מוגדרות בתחום $-2 \leq x \leq 2$. הפונקציה h מקבלת ערכים אי-שליליים בלבד, ולכן הגרף המתאים לה הוא א. הפונקציה f חיובית בתחום $0 < x < 2$ ושלילית בתחום $-2 < x < 0$ ולכן מתאים לה גרף ב. הפונקציה k היא היחידה המוגדרת בתחום $3 \leq x$ או $x \leq -2$, לכן מתאים לה גרף ג. נותרו הפונקציות t ו- m . אחת הדרכים להבחין ביניהן היא בעזרת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה m . מכאן שלפונקציה m מתאים גרף ו ולפונקציה t מתאים גרף ד.

חקירת פונקציות עם שורש ריבועי

פעילות 7: חקירה של פונקציית שורש ריבועי של פונקציה ממעלה שנייה

נפתח עם חקירה של פונקציה שתחום הגדרתה הוא קטע סגור.

חקירת הפונקציה $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

תחום ההגדרה $-2 \leq x \leq 2$ מתקבל מפתרון האי-שוויון $4-x^2 \geq 0$.
נקודות החיתוך עם הצירים הן: $(-2,0)$, $(0,2)$ ו- $(2,0)$.

הנגזרת: $\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. מתאפסת כאשר $x=0$.

נקודת האפס של הנגזרת מחלקת את תחום ההגדרה לשני תחומים חלקיים



להלן טבלת ערכים עם ערכי הפונקציה.

x	-2	0	2
$y = \sqrt{4-x^2}$	0	2	0
	מקסימום		

טבלה 3

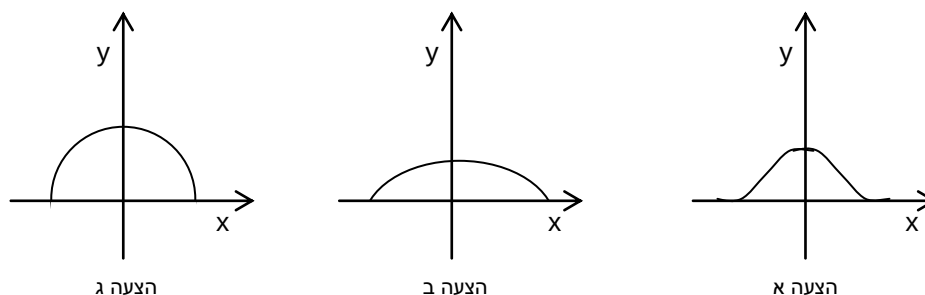
לפונקציה מקסימום מוחלט בנקודה $(0,2)$, ומינימום מוחלט בנקודות $(-2,0)$ ו- $(2,0)$.

במקום לבדוק את ערכי הפונקציה יכולנו לבדוק את סימני הנגזרת: היות והמכנה חיובי בתחום ההגדרה של הפונקציה, המונה הוא שקובע את הסימן של הנגזרת. לכן: הנגזרת שלילית בתחום: $0 < x < 2$ וחיובית בתחום: $-2 < x < 0$.

בשתי הדרכים נסיק שתחום העלייה של הפונקציה הוא: $-2 < x < 0$, ותחום הירידה הוא: $0 < x < 2$.

איך מתנהגת הפונקציה בנקודות הקצה שלה?

נוכל לבחון הצעות אחדות לסקיצות של הגרף (איור 19):



איור 19

ההצעות שונות זו מזו בשיפוע המשיק בנקודות הקצה. היות והפונקציה זוגית, התנהגותה בשתי נקודות הקצה דומה.

בהצעה א שיפוע המשיק בנקודות הקצה הוא אפס. בהצעה ב שיפוע המשיק סופי ושווה מאפס: חיובי בקצה השמאלי של הפונקציה ושלילי בקצה הימני שלה. בהצעה ג שיפוע המשיק אינסופי בקצות התחום. הנגזרת לא מוגדרת בקצות תחום ההגדרה של הפונקציה, ולא קיימות לה גם נגזרות חד-צדדיות בנקודות אלה.

$$\text{נוכל לבחון את הגבולות: } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty \quad \text{ו-} \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$$

כיוון שהמונה לא מתאפס בנקודות הקצה והמכנה מתאפס בהן, הרי שהגבולות הם אינסופיים ומתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty \quad \text{ו-} \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$$

בשל כך המשיקים לגרף בשני קצותיו הם ישרים מאונכים לציר ה- x , וההצעה המתאימה לגרף היא הצעה ג.

כדי לפסול קיום של נקודות פיתול נגזור שנית. מתקיים:

$$y'' = \left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \right)' = \dots = \frac{-4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

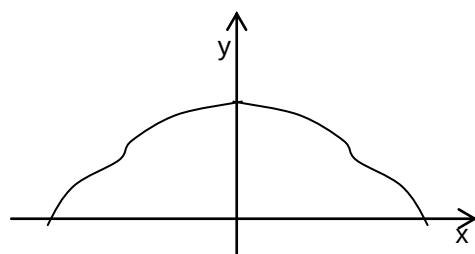
כלומר: הנגזרת השנייה שלילית בתחום ההגדרה, ומכאן שהפונקציה קעורה כלפי מטה בכל תחום הגדרתה.

הערה

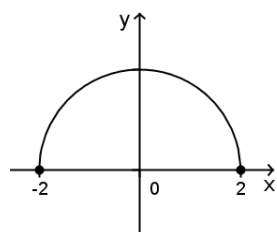
שתי הבדיקות שעשינו, בדיקת הנגזרת השנייה, ובדיקת גבולות הנגזרת הראשונה של הפונקציה בקצות תחום ההגדרה, אינן מחליפות זו את זו:

בדיקת הנגזרת השנייה תוכל, אמנם, לפסול את הצעה א, אך הנגזרת השנייה לא מגלה לנו מהו שיפוע המשיק החד-צדדי בנקודות הקצה.

בחינת גבולות הנגזרת הראשונה בקצות תחום ההגדרה, אינה מספיקה לשלילת קיומן של נקודות פיתול. שהרי ייתכן שהפונקציה נראית כמו באיור 20.



איור 20



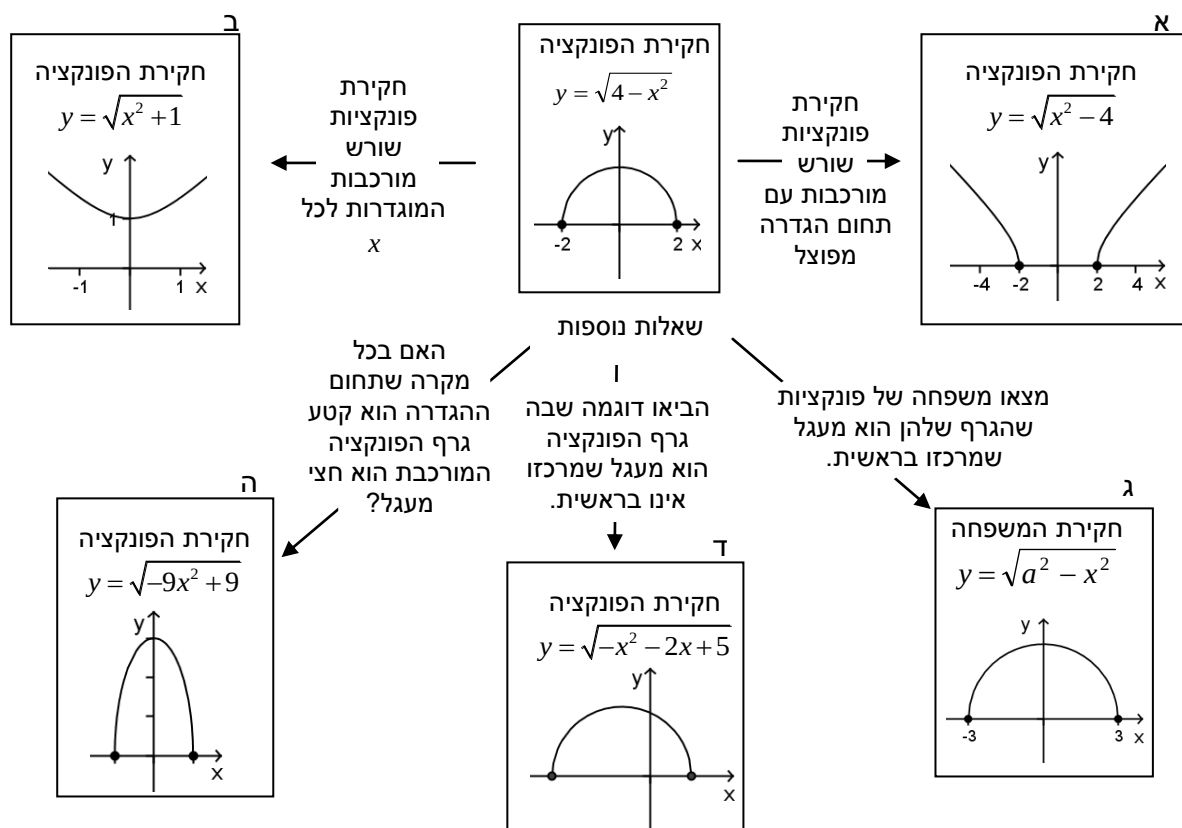
איור 21

חשוב לציין כי הפונקציה בה טיפלנו היא, למעשה, חצי מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 2. הקשר המתאר את המעגל השלם הוא הפונקציה הסתומה: $x^2 + y^2 = 4$. נשים לב, כי התכונות המוכרות לנו עבור חצי המעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 4$ תואמות את המידע שאספנו.

גרף הפונקציה $y = \sqrt{4-x^2}$ מוצג באיור 21.

לאן נוכל להרחיב את החקירה?

חקירה מתפתחת של פונקציות קרובות זו לזו מאפשרת לגלות תכונות משותפות של הפונקציות הנחקרות, וגם לשים לב להבדלים בין הגרפים הנגרמים על-ידי שינויים קטנים בתבנית הפונקציה. איור 22 מציג אפשרויות לחקירה מתפתחת של פונקציית שורש מורכבת על פונקציה ממעלה שנייה.



איור 22

כיוון חקירה נוסף שיכול להתפתח מחקירת הפונקציה $y = \sqrt{4 - x^2}$ הוא שילוב שלה עם פונקציות נוספות בפונקציית מנה או מכפלה.

חקירת הפונקציה $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$

בפעילות 1 הוצגו תכונות של הפונקציה אותן ניתן למצוא ללא שימוש בנגזרת. מצאנו שתחום הפונקציה הוא $x \leq -1 \cup 2 \leq x$, שנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x הן $(2, 0)$ ו- $(-1, 0)$, ושהיא חיובית בכל נקודה אחרת. נרחיב כעת את החקירה תוך שימוש בנגזרת.

$$y' = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

נקודת האפס היחידה של הנגזרת היא מחוץ לתחום הפונקציה. ניתן לראות שבתחום $2 < x$ הנגזרת חיובית, ובתחום $x < -1$ הנגזרת שלילית. הפונקציה עולה בתחום $2 < x$ ויורדת בתחום $x < -1$.

אם בונים טבלת ערכים לחקירת הפונקציה נוח יותר להציב ערכים בפונקציה מאשר בנגזרת. כדי לבדוק עלייה וירידה נציב שתי נקודות בכל תחום חלקי.

x	-2	-1		2	3
$y = \sqrt{x^2 - x - 2}$	2	0		0	2
	↘			↗	

טבלה 4

גם מהטבלה נוכל להסיק שהפונקציה עולה בתחום $2 < x$ ויורדת בתחום $x < -1$, ושהנקודות $(2,0)$ ו- $(-1,0)$ הן נקודות מינימום מוחלט של הפונקציה.

פעילות 8: פונקצית מכפלה עם שורש

נתבונן בפונקציה $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

עוד לפני השימוש בנגזרת נוכל להסיק שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $y = \sqrt{4-x^2}$ ולשתי הפונקציות אותן נקודות חיתוך עם הצירים.

אבני דרך בחקירת הפונקציה:

תחום הפונקציה: $-2 \leq x \leq 2$. זהו התחום בו המספרים בשורש אי-שליליים.

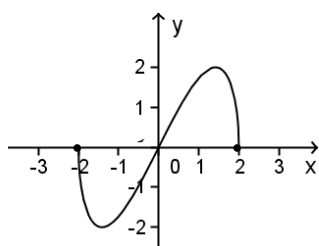
נקודות חיתוך עם הצירים: $(-2,0)$, $(0,0)$, $(2,0)$.

אסימפטוטות

לפונקציה אין נקודות אי-הגדרה הגובלות בתחום ההגדרה, ומכאן שאין לה אסימפטוטות אנכיות.

תחום הפונקציה הוא קטע סגור ולכן אין לפונקציה אסימפטוטות ב- ∞ וב- $-\infty$.

נקודות קיצון, נקודות פיתול ותחומי עלייה וירידה



איור 23

לנגזרת שתי נקודות אפס שבהן $x = \pm\sqrt{2}$.
בדיקה מגלה שלגרף הפונקציה נקודת מינימום פנימית $(-\sqrt{2}, -2)$ ונקודת מקסימום פנימית $(\sqrt{2}, 2)$. גם נקודות הקצה הן נקודות קיצון. בהתאם נקבעים תחומי העלייה והירידה.

$$\Leftarrow f'(x) = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

נקודת האפס היחידה של הנגזרת השנייה השנייה היא ב- $x = 0$.
לפונקציה נקודת פיתול $(0,0)$.

$$\Leftarrow f''(x) = \frac{12x - 2x^3}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

גרף הפונקציה מוצג באיור 23.



פעילות 9: זהירות – שורש לפניך!!!

פעילות 9 נועדה למקד את תשומת הלב לטעויות שיכולות לקרות כתוצאה מעבודה לא נכונה עם שורש ריבועי.

1. נועם חקר את הפונקציה $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.
 כדי לחסוך את העבודה הכרוכה בגזירת מכפלה של פונקציות הוא רשם:

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2} = \sqrt{x^2(4-x^2)} = \sqrt{4x^2-x^4}$$

וגזר את הפונקציה:

$$f'(x) = \frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}} = \frac{4x(2-x^2)}{2\sqrt{x^2(2-x^2)}}$$

נועם הסיק שנקודות האפס של הנגזרת הן: $x_3 = \sqrt{2}$, $x_2 = 0$, $x_1 = -\sqrt{2}$.
 המשך חקירת הפונקציה הוביל אותו לסקיצה שבאיור 24.

הסבירו את ההבדל בין הסקיצה שנועם קיבל לבין גרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.
 המוצג באיור 23.

איור 24

2. דן חקר את הפונקציה $y = x + \sqrt{x} - 2$.
 כדי למצוא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x הוא פתר משוואה:

$$0 = x + \sqrt{x} - 2$$

$$2 - x = \sqrt{x}$$

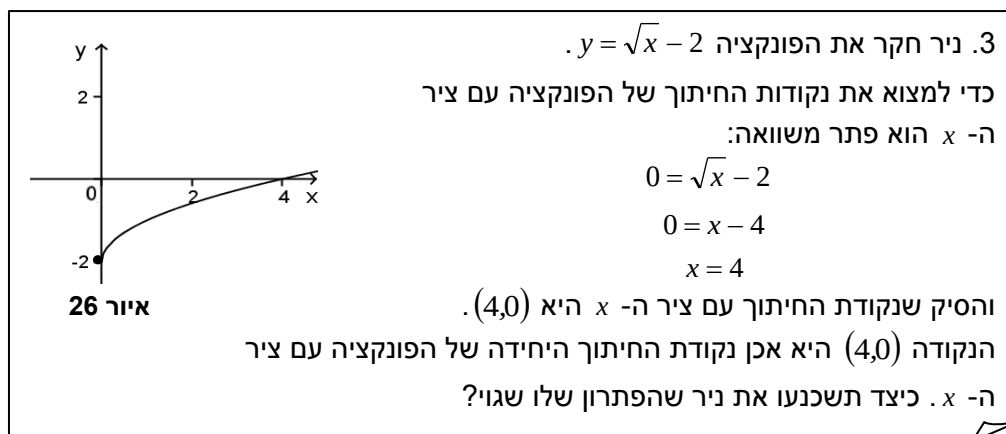
$$(2-x)^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$4 - 4x + x^2 = x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

דן פתר משוואה ריבועית וקיבל שני פתרונות, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. הוא סרטט את גרף הפונקציה וראה שהגרף אינו חותך את ציר ה- x כאשר $x = 4$ (איור 25).
 אם הפתרון נכון - כיצד ייתכן שגרף הפונקציה לא עובר בנקודה $(4,0)$?
 אם הפתרון אינו נכון - היכן הטעות?

איור 25



תשובות

1. הצעתו של נועם לחקור את הפונקציה $g(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$ במקום את הפונקציה $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ (או בשפה מדוברת "להכניס את x מתחת לשורש") אינה יכולה להיות נכונה. הפונקציות אינן זהות. בעוד שהפונקציה g מקבלת ערכים אי-שליליים בלבד, הפונקציה f מקבלת גם ערכים שליליים. הפונקציה g זוגית והפונקציה f אי-זוגית.

מהגדרת השורש הריבועי נובע כי $\sqrt{x^2} = |x|$, או במילים אחרות

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{אם } x \geq 0 \\ -x & \text{אם } x < 0 \end{cases}$$

כאשר $x \geq 0$ מתקיים:

$$f(x) = \sqrt{x^2} \sqrt{(4 - x^2)} = \sqrt{x^2(4 - x^2)} = \sqrt{4x^2 - x^4}$$

ואילו כאשר $x < 0$ מתקיים:

$$f(x) = -\sqrt{x^2} \sqrt{(4 - x^2)} = -\sqrt{x^2(4 - x^2)} = -\sqrt{4x^2 - x^4}$$

בהתאם, נוכל לרשום את f באופן מפוצל:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 - x^4} & \text{אם } x \geq 0 \\ -\sqrt{4x^2 - x^4} & \text{אם } x < 0 \end{cases}$$

פונקציה זו שווה לפונקציה g רק כאשר $x \geq 0$.

מומלץ לפשט פונקציות על-ידי הכנסת ביטויים לתוך השורש רק כאשר התלמידים יודעים להימנע מטעויות שיכולות להתרחש בעת הפישוט.

2. שני הפתרונות שדן קיבל שניהם פתרונות של המשוואה $(2-x)^2 = (\sqrt{x})^2$, המשוואה שדן קיבל אחרי שהעלה

בריבוע את שני אגפי המשוואה המקורית. רק אחד הפתרונות, הפתרון $x=1$ הוא גם פתרון של המשוואה המקורית. הפתרון השני, $x=4$, הוא פתרון של המשוואה החדשה בלבד.

כיצד קיבלנו פתרון שאיננו פתרון של המשוואה המקורית (פתרון זר)?
השוויונות $a=b$ ו- $a^2=b^2$ אינם שוויונות שקולים. $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$, אך לא להיפך.

אם שני מספרים הם שווים ברור שגם ריבועיהם שווים.

מצד שני, אם הריבועים של שני מספרים הם שווים, לא נוכל להסיק שגם המספרים שווים. $3^2 = (-3)^2$ למרות ש $3 \neq -3$.

מדוע בכל זאת נוקטים בשיטה של העלאת שני האגפים של משוואה בריבוע?

העובדה ש- $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ מבטיחה שכל פתרון של משוואה מהצורה $A(x)=B(x)$ יופיע בין הפתרונות של המשוואה $(A(x))^2 = (B(x))^2$.

השיטה של העלאת שני האגפים של משוואה בריבוע היא נכונה כל עוד דואגים לנפוח פתרונות זרים שאינם מקיימים את המשוואה המקורית.

העלאת שני האגפים של משוואה בריבוע מחייבת בדיקת כל הפתרונות על-ידי הצבתם במשוואה, וניפוי הפתרונות הזרים.

3. ברור כי ההעלאה של אגף ימין בריבוע איננה נכונה. יחד עם זאת יש תלמידים שמתקשים להשתכנע שפעולה שמובילה אותם לתוצאה נכונה היא בכל זאת פעולה שגויה. במקרה הנוכחי תלמידים יכולים לנסות את השיטה עם מספרים אחרים ושוב לקבל תוצאה נכונה. לתלמידים אלה אפשר להציע לבדוק את שיטתם עם פונקציות שיש להן יותר מחוברים, למשל $y = x + \sqrt{x} - 2$

פעילות 10: חקירת הפונקציה $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$

בפעילות 1 הוצגו תכונות של הפונקציה $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$ אותן ניתן למצוא ללא שימוש בנגזרת. מצאנו שתחום הפונקציה הוא $x < -1 \cup 2 < x$, שנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x הן $(2,0)$ ו- $(-1,0)$, ושהיא חיובית בכל נקודה אחרת. נרחיב כעת את החקירה תוך שימוש בנגזרת.

$$y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

הפתרון היחיד של המשוואה $\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}} = 0$ היא מחוץ לתחום הפונקציה. לפונקציה אין נקודות קיצון

ניתן לראות שבתחום $2 < x$ הנגזרת חיובית, ובתחום $x < -1$ הנגזרת שלילית.

הפונקציה עולה בתחום $2 < x$ ויורדת בתחום $x < -1$.

אם בונים טבלת ערכים לחקירת הפונקציה, נוח יותר להציב ערכים בפונקציה מאשר בנגזרת. כדי לבדוק עלייה וירידה נציב שתי נקודות בכל תחום חלקי.

x	-2	-1		2	3
$y = \sqrt{x^2 - x - 2}$	2	0		0	2
					

טבלה 5

גם מהטבלה נוכל להסיק שהפונקציה עולה בתחום $2 < x$ ויורדת בתחום $x < -1$, ושהנקודות $(2,0)$ ו- $(-1,0)$ הן נקודות מינימום מוחלט של הפונקציה.

פעילות 11: הפונקציה $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

אבני דרך בחקירת הפונקציה

תחום הפונקציה: $x > 0$. זהו התחום בו המספרים בשורש אי-שליליים והמכנה אינו אפס.

לגרף הפונקציה אין נקודות חיתוך עם הצירים

התחום אינו כולל את $x = 0$, ולכן אין לפונקציה נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

המונה לא יכול להתאפס, ולכן אין לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

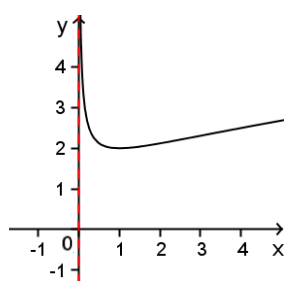
אסימפטוטות

נוכל לרשום את הפונקציה כ- $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

צורת כתיבה זו מבליטה את העובדה שערכי הפונקציה שואפים לאינסוף גם כאשר x שואף לאפס וגם כאשר x שואף לאינסוף.

לכן נוכל להסיק שיש לפונקציה אסימפטוטה אנכית שהיא ציר ה- y , ואין לה אסימפטוטה אופקית. כיוון שכאשר x שואף לאינסוף שיפוע המשיק שואף לאפס, לפונקציה אין אסימפטוטה משופעת.

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה



איור 27

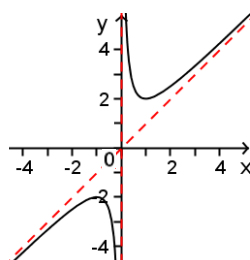
לנגזרת נקודת אפס שבה $x = 1$. בדיקה באמצעות טבלת ערכים מגלה שלפונקציה נקודת מינימום $(1,2)$, ושהיא עולה בתחום $x > 1$ ויורדת בתחום $0 < x < 1$.

לנגזרת השנייה נקודת אפס שבה $x = 3$. בדיקה באמצעות טבלת ערכים או בעזרת הנגזרת השלישית, מגלה שלפונקציה נקודת פיתול $(3,2)$ ושהיא קעורה כלפי מטה בתחום $x > 3$, וקעורה כלפי מעלה בתחום $0 < x < 3$.

גרף הפונקציה מוצג באיור 27.

הערות

1. העין לעתים מתעתעת. כשמסתכלים בגרף נראה כי נקודת המינימום נמצאת משמאל למקומה האמיתי. גם את מקומה של נקודת הפיתול קשה מאוד לראות בעין.



איור 28

2. בעמוד 323 חקרנו את הפונקציה $f(x) = x + \frac{1}{x}$, שהגרף שלה מוצג באיור 28.

הפונקציה $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ היא הרכבה של הפונקציה f על פונקציית השורש

הריבועי. מעניין לשים לב לדמיון ולשוני בין שני הגרפים:

▪ קבוצת הערכים של הפונקציה $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ זהה לקבוצת הערכים המתאימים

לענף החיובי של גרף הפונקציה $f(x) = x + \frac{1}{x}$, מדוע?

▪ מדוע יש לשתי הפונקציות אותה נקודת מינימום?

נקודות מרכזיות בפרק

- לפעמים ניתן להשיג מידע רב על הפונקציה גם ללא שימוש בנגזרת.
- בפונקציות עם שורש ריבועי יכולות להיות אסימפטוטות שונות באינסוף ובמינוס אינסוף.
- חשוב לשים לב לנקודות קיצון בקצות תחום ההגדרה.
- חשוב לשים לב לנקודות אי-הגדרה של הנגזרת, בהן הביטוי שבתוך השורש מתאפס. נקודות אלה הן נקודות אי-הגדרה של הנגזרת שאינן נקודות אי-הגדרה של הפונקציה.
- הצבת ערכים בתבנית הפונקציה פשוטה בהרבה מהצבה ערכים בנגזרת.
- פעולות עם שורשים, ובפרט פתרון משוואות שמעורבים בהן שורשים, מחייבות משנה זהירות.