

פונקציות רציונליות

בפרק זה, בו פוגשים התלמידים לראשונה (כמעט) בפונקציות שאת הגרפים שלהן לא ניתן לסרטט במשיכת קולמוס, מוקדשת תשומת לב מרכזית להתנהגות הפונקציה בסביבות נקודות האי-הגדרה. נפתח את הפרק בחקירת קשרים בין פונקציות מוכרות לבין הפונקציות ההופכיות שלהן. נקודת מוצא זו - סרטוט גרף פונקציה רציונלית, מבלי לבצע חקירה באמצעות הנגזרת, מאפשרת נחיתה רכה אל מושג האסימפטוטה, שאינה מחייבת הגדרות ו/או עיסוק פורמלי בנושא. הטיפול באסימפטוטות ובהתנהגות הפונקציה בסביבת נקודות אי-הגדרה ובקצות הגרף מקבל את ביסוסו בהמשך הפרק. נקודת מבט נוספת שניתן להציג רגע לפני הנגזרת היא סרטוט סקיצות של פונקציות רציונליות על בסיס תחומי החיוביות והשליליות ונקודות האי-הגדרה שלהן בלבד. נקודת מבט זו מקשרת בין נושאים באנליזה ובאלגברה, ומסייעת בפתרון אי-שוויונות. המשך הפרק מבסס את השימוש בנגזרת לחקירת פונקציות, ומציע פעילויות מגוונות לכיתה.

פונקציה רציונלית היא פונקציה שניתן לכתוב אותה כמנה של שתי פונקציות פולינום:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

כאשר המקדמים a_k, b_k הם מספרים ממשיים, $m \geq 0$, $n \geq 0$ מספרים שלמים, והמקדמים המובילים $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$.

דוגמאות ואי-דוגמאות

א. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$ היא פונקציה רציונלית. במונה פולינום ממעלה ראשונה ובמכנה פולינום ממעלה שנייה.

ב. הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ אינה פונקציה רציונלית. הביטוי במונה אינו פולינום.

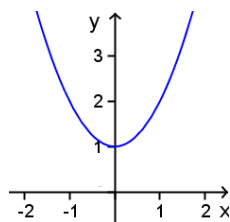
ג. הפונקציה $f(x) = 2 + \frac{x}{x^2-4}$ היא פונקציה רציונלית. ניתן לכתוב אותה, לאחר פישוט, כמנה של שני

$$\text{פולינומים: } f(x) = \frac{2x^2 + x - 8}{x^2 - 4}$$

פונקציות רציונליות רגע לפני הנגזרת

פעילות 1: פונקציה הופכית לפונקציית פולינום

פעילות זו מציעה מפגש ראשון עם פונקציות רציונליות באמצעות פונקציות הופכיות לפונקציות מוכרות. הפעילות מאפשרת לתלמידים לבנות ידע חדש על סמך ידע קודם, ומזמנת נחיתה רכה למושג האסימפטוטה, עוד לפני הגדרתה.



דוגמה 1

איור 1 מציג את גרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 1$. ניעזר בתכונות הפונקציה $f(x) = x^2 + 1$, כדי לתאר כמה שיותר תכונות של הפונקציה ההופכית $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, ולסרטט את הגרף שלה.

תחומי חיוביות ושליליות

איור 1

הפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ חיובית לכל x . לכן גם הפונקציה ההופכית $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ חיובית לכל x . ניתן להכליל ולומר שלכל שתי פונקציות: $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ יש אותם תחומי חיוביות ושליליות.

תחומי עלייה וירידה

נתמקד תחילה בתחום $x > 0$ שבו f עולה. מובן כי ככל שנחלק את המספר 1 במספר גדול יותר נקבל תוצאה קטנה יותר. לכן הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ יורדת בתחום $x > 0$.

בניסוח פורמלי:

על-פי ההגדרה פונקציה עולה בקטע נתון אם לכל $x_1 < x_2$ בקטע מתקיים $f(x_1) < f(x_2)$. פונקציה יורדת בקטע נתון אם לכל $x_1 < x_2$ בקטע מתקיים $f(x_1) > f(x_2)$.

לכל שני מספרים חיוביים p ו- q , אם $p > q$ אז $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$. כיוון שהפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x > 0$, בתחום

זה מתקיים:

$$q < p \Rightarrow q^2 + 1 < p^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{q^2 + 1} > \frac{1}{p^2 + 1} \Rightarrow g(q) > g(p)$$

באופן דומה, בתחום $x < 0$ שבו f יורדת, g עולה.

האם ניתן להכליל ולומר שאם פונקציה $f(x)$ עולה בתחום כלשהו אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת בתחום זה? - לא

תמיד! נתייחס לשאלה זו בהמשך (עמוד 308).

נקודת קיצון

לפונקציה $f(x)$ נקודת מינימום כאשר $x = 0$. בנקודה זו הפונקציה מחליפה מגמה מירידה לעלייה.

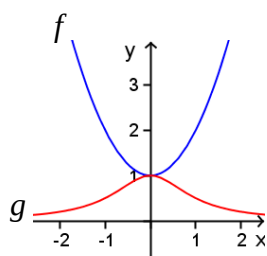
לפונקציה $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ נקודת מקסימום כאשר $x = 0$. בנקודה זו הפונקציה מחליפה מגמה מעלייה לירידה.

ערך הפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודת המינימום הוא 1, וגם ערך הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ בנקודת המקסימום הוא 1.

נוכל להכליל ולומר שאם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום בנקודה $x = x_0$ שבה $f(x_0) \neq 0$ אז לפונקציה

$\frac{1}{f(x)}$ יש נקודת מקסימום בנקודה זו.

התנהגות הפונקציה כאשר ערכי x גדולים מאוד בערכם המוחלט



איור 2

כאשר ערכי x שואפים לאינסוף בערכם המוחלט, ערכי $f(x)$ שואפים אף הם לאינסוף, ומכאן שערכי $\frac{1}{f(x)}$ שואפים לאפס. ציר ה- x מהווה אסימפטוטה אופקית לגרף הפונקציה. נוח להראות את ההתקרבות של הפונקציה לאסימפטוטה באמצעות טבלת ערכים.

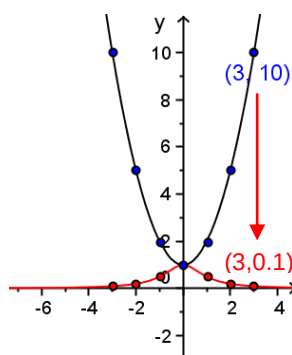
איור 2 מציג זה לצד זה את הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2 + 1$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{ו-}$$

הערה

אחת האפשרויות להמחיש את הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הפונקציה ההופכית, היא לסמן נקודות על גרף הפונקציה f , ולהתאים לכל אחת מהן את הנקודה על

גרף הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ בעלת אותו שיעור x (איור 3).



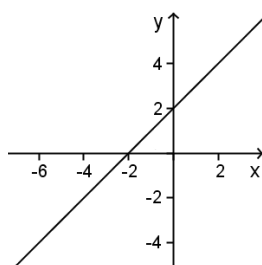
איור 3

דוגמה 2

איור 4 מציג את גרף הפונקציה $f(x) = x + 2$.

ניעזר בתכונות הפונקציה $f(x) = x + 2$ כדי לתאר את תכונות הפונקציה ההופכית.

$$g(x) = \frac{1}{x + 2} \quad \text{ולסרטט את הגרף שלה.}$$



איור 4

במה שונה דוגמה זו מהדוגמה הקודמת? ראשית, גרף הפונקציה $f(x) = x + 2$ חותך את ציר ה- x ולכן הפונקציה ההופכית אינה מוגדרת כאשר $f(x) = 0$. תכונה

זו מזמנת דיון בהתנהגות הפונקציה בסביבת נקודת אי-הגדרה, והיכרות ראשונה עם אסימפטוטה אנכית. שנית – לפונקציה $f(x) = x + 2$ אין נקודות קיצון, ולכן גם

לפונקציה ההופכית לה אין נקודות קיצון.

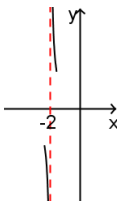
התנהגות הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ בסביבת נקודת האפס של הפונקציה f .

כיוון ש- $f(-2) = 0$ הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{x + 2}$ אינה מוגדרת כאשר $x = -2$. הנקודה $x = -2$ הינה נקודת

אי-הגדרה של הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x + 2}$. כיצד נראה גרף הפונקציה g בסביבת נקודת האי-הגדרה? כאשר ערכי

$f(x)$ שואפים לאפס בערכם המוחלט, ערכי $\frac{1}{f(x)}$ שואפים בערכם המוחלט לאינסוף. נוח להמחיש את

התנהגות הפונקציה בסביבת הנקודה $x = -2$ באמצעות טבלת ערכים (טבלה 1).

גרף סכמתי	-1.9	-1.99	-1.999	-2	-2.001	-2.01	-2.1	x
	0.1	0.01	0.001	0	-0.001	-0.01	-0.1	$f(x) = x + 2$
	10	100	1000	לא מוגדר	-1000	-100	-10	$g(x) = \frac{1}{x+2}$

טבלה 1

לפונקציה g אסימפטוטה אנכית $x = -2$.

תחומי חיוביות ושליליות

הפונקציה $f(x) = x + 2$ חיובית עבור: $x > -2$ ושלילית עבור $x < -2$. אלו הם גם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה ההופכית.

תחומי עלייה וירידה

על-פי ההגדרה פונקציה עולה בקטע נתון אם לכל $x_1 < x_2$ בקטע, מתקיים $f(x_1) < f(x_2)$. פונקציה יורדת בקטע נתון אם לכל $x_1 < x_2$ בקטע, מתקיים $f(x_1) > f(x_2)$. נתמקד תחילה בתחום $x > -2$ שבו $f(x)$ חיובית. כיוון שהפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x > -2$, בתחום זה מתקיים:

$$x < y \Rightarrow x + 2 < y + 2 \Rightarrow \frac{1}{x+2} > \frac{1}{y+2} \Rightarrow g(x) > g(y)$$

מכאן שהפונקציה $g(x) = \frac{1}{x+2}$ יורדת בתחום $x > -2$.

באופן דומה אפשר להראות שהפונקציה יורדת בתחום $x < -2$ שבו ערכי הפונקציה שליליים.

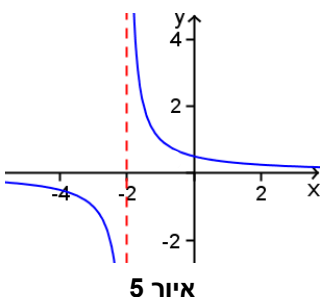
יחד עם זאת לא נוכל לומר שהפונקציה $g(x) = \frac{1}{x+2}$ יורדת בכל תחום הגדרתה. למשל $-4 < 2$ ובכל זאת $f(-4) < f(2)$ (ראו איור 5).

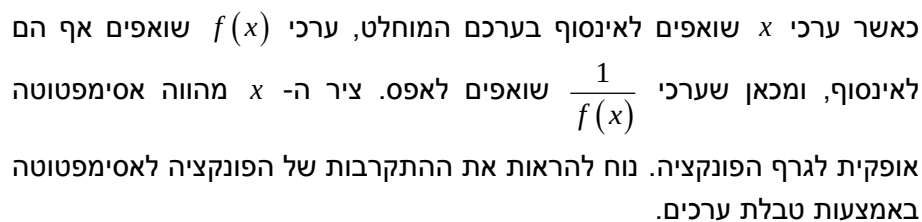
הערה

מהעובדה שפונקציה $f(x)$ עולה בתחום כלשהו, ניתן להסיק שהפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ יורדת בכל נקודה בתחום

זה. כיוון שתחום הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ אינו קשיר, לא ניתן להסיק שהפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה, ויש

להתייחס בנפרד לתחומים חלקיים בהם הפונקציה חיובית ולתחומים חלקיים בהם הפונקציה שלילית. חשוב לדון בנקודה זו בכיתה כדי לחנך את התלמידים לקבוע את תחומי העלייה והירידה של פונקציה בהתאם להגדרות של עלייה וירידה של פונקציה בתחום.




$$g(x) = \frac{1}{x+2} - 1$$

נוכל לחקור פונקציה הופכית של פונקציה ליניארית קבועה ושל פונקציה ליניארית יורדת. וכן לעסוק בפונקציות הופכיות של פונקציות ריבועיות בעלות מאפיינים שונים: פונקציות עם מינימום ופונקציות עם מקסימום, פונקציות ללא נקודות אפס, עם נקודת אפס אחת, ועם שתי נקודות אפס.

בהמשך, נרצה להכליל את המסקנות גם לחקירת פונקציות הופכיות של פונקציות אחרות. (דיון נוסף בפונקציה הופכית ניתן למצוא בפרק "פונקציה מורכבת" עמוד 289).



הפוך את ההופכית – משחק התאמה בנושא הקשר בין גרף של פונקציה לגרף הפונקציה ההופכית שלה¹.

איור 8 מציג ערכת קלפי משחק המאפשר לימוד, תרגול וחיידוד מושגים, תוך בחינת מספר רב של דוגמאות לקשר בין גרף של פונקציה לגרף הפונקציה ההופכית שלה. המסגרת בעמוד הבא מציגה אופנים אחדים לשחק את המשחק.

$f(x) = x^2 + x + 1$ $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + x + 1}$	$f(x) = (x-2)^2$ $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(x-2)^2}$	$f(x) = -(x-2)^2$ $\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{(x-2)^2}$	$f(x) = x$ $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$	$f(x) = x^2 + 2x$ $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(x^2 + 2x)}$
$f(x) = 2x^3 - 2x$ $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x^3 - 2x}$	$f(x) = -x^3$ $\frac{1}{f(x)} = \frac{-1}{x^3}$	$f(x) = x $ $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{ x }$	$f(x) = \frac{2x-2}{x^2}$ $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{2x-2}{x^2}}$	$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + x + 1}$ $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + x + 1}}$

איור 8: ערכת קלפים למשחק "הפוך את ההופכית"

¹ מעובד מתוך דוד (2007).

המשחק מכיל 10 שלשות של קלפים (סך הכול 30 קלפים). כל שלשה מכילה גרף של פונקציה, גרף של הפונקציה ההופכית לה, וקלף שבו רשומות התבניות האלגבריות של שתי הפונקציות.

ניתן לשחק באופנים אחדים:

- משחק גלוי למציאת שלשות:** הניחו את הקלפים כך שפניהם כלפי מעלה. כל משתתף בתורו צריך למצוא שלשה, ולנמק לחברי הקבוצה את בחירתו. ניתן להגביל את הזמן של החיפוש. המוצא שלשה נכונה מקבל נקודה. הטועה-מפסיד נקודה, ואם המשתתף לא מוצא שלשה, התור עובר הלאה ללא נקודות. ניתן לשחק את המשחק גם כתחרות בין קבוצות תלמידים הפועלים במשותף.
- משחק גלוי למציאת זוגות:** כללי המשחק זהים למשחק הקודם, אלא שהקלפים עם התבניות אינם משתתפים במשחק.
- משחק הזיכרון למציאת זוגות:** הוציאו את הקלפים המכילים תבניות אלגבריות, הניחו את הקלפים המכילים גרפים כך שפניהם כלפי מטה. כל משתתף בתורו יהפוך שני קלפים ויבדוק האם הם מתאימים זה לזה. המטרה: לאסוף מספר גדול ביותר של שלשות.
- משחק הזיכרון - וריאציה נוספת:** הפרידו את הקלפים המכילים תבניות אלגבריות משאר הקלפים והניחו אותם בערימה מרכזית כך שפניהם כלפי מטה. פזרו את הקלפים המכילים גרפים של פונקציות כך שפניהם כלפי מטה. הפכו קלף אחד עליו מופיעות תבניות אלגבריות והתחילו בחיפוש: כל משתתף בתורו יהפוך שני קלפים, כמו במשחק הזיכרון. כאשר ימצא הזוג המתאים לקלף הפתוח, עברו לקלף הבא. וכך הלאה.

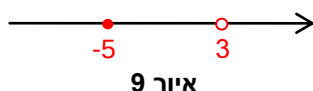
הוראות למשחק "הפוך את ההופכית"

פעילות 2: מציאת תחומי חיוביות ושליליות של פונקציה רציונלית

נדגים מציאת תחומי חיוביות ושליליות של פונקציות בשלוש הדרכים שהוצגו בפרק "רגע לפני הנגזרת".

דוגמה 1: הפונקציה $y = \frac{x+5}{3-x}$

נקודת האפס של הפונקציה, $x = -5$, ונקודת האי-הגדרה שלה, $x = 3$, קובעות על ציר ה- x שלושה תחומים חלקיים: $x < -5$, $-5 < x < 3$ ו- $3 < x$. נסמן את נקודת האי-הגדרה בנקודה ריקה ואת נקודת האפס בנקודה מלאה.



דרך א – מציאת תחומי חיוביות ושליליות בעזרת סימני הגורמים

התחום			ייצוג גרפי	הגורם
$x < -5$	$-5 < x < 3$	$3 < x$		
-	+	+		$x+5$
+	+	-		$3-x$
-	+	-	$\frac{x+5}{3-x}$	סימני המנה

טבלה 2

נסמן בטבלה את תחומי החיוביות והשליליות של הגורמים המרכיבים את הפונקציה, ונסיק את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה. מהטבלה נסיק שהפונקציה שלילית בתחומים $x < -5$ ו- $3 < x$ וחיובית בתחום $-5 < x < 3$.

דרך ב – מציאת תחומי חיוביות ושליליות בעזרת נקודות מייצגות

תחום חלקי	$x < -5$	$-5 < x < 3$	$3 < x$
x	-6	0	4
$y = \frac{x+5}{3-x}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{3}$	-9
סימן הפונקציה בתחום	-	+	-

טבלה 3

דרך זו מתחילה אף היא במציאת נקודות האפס ונקודות האי-הגדרה וסימון על ציר המספרים. כעת נבחר נקודה מייצגת בכל תחום חלקי, ונציב אותה בפונקציה לקביעת סימן הפונקציה בתחום המתאים. כמצופה, הגענו לאותן המסקנות כמו בדרך א.

דרך ג - מציאת תחומי חיוביות ושליליות על-פי מידת הריבוי של הגורמים הלינאריים

בדרך זו אנו קובעים את החיוביות והשליליות של גורם אחד באחת השיטות הקודמות או בדרך אחרת. בהמשך נתבונן בנקודות האפס של הפונקציה ונקודות האי-הגדרה שלה. כל אחת מנקודות אלה היא נקודת אפס של אחד הגורמים הלינאריים של הפונקציה. נזכור:

גורם לינארי שמופיע בריבוי זוגי אינו משפיע על סימני הפונקציה בנקודות שאינן נקודות אפס. לכן, אם הפונקציה חיובית משמאל לנקודת האפס של גורם זה, היא חיובית גם מימינה ולהיפך.

גורם לינארי שמופיע בריבוי אי-זוגי מביא להחלפת סימן הפונקציה בנקודת האפס שלו. אם הפונקציה חיובית משמאל לנקודה זו, היא תהיה שלילית מימין לה, ולהיפך.

בפונקציה הנתונה כל אחד מן הגורמים מופיע בריבוי יחיד, סימניה מתחלפים בכל אחת מנקודות האפס של הגורמים הלינאריים שלה. כיוון שמצאנו שהפונקציה שלילית בתחום $x < -5$ נוכל להסיק שהיא חיובית בתחום $-5 < x < 3$ ושלילית בתחום $3 < x$.

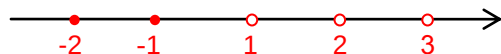
$$\text{דוגמה 2: הפונקציה } y = \frac{(2+x)^3(x^2-1)(x^2+x+1)}{(x^2-3x+2)(x-3)^2} = \frac{(2+x)^3(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}{(x-2)(x-1)(x-3)^2}$$

נשים לב כי הגורם x^2+x+1 אינו פריק, וכיוון שהוא מקבל ערכים חיוביים בלבד, הוא אינו משפיע על תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

לאחר פירוק לגורמים נמצא את נקודות האפס של כל הגורמים הפריקים.

נקודות האפס של המכנה $x=1, 2, 3$ הן נקודות האי-הגדרה של הפונקציה.

נקודות האפס בתחום ההגדרה הן $x=-2, -1$.



איור 10

איור 10 מציג את חלוקת ציר ה- x לתחומים חלקיים.

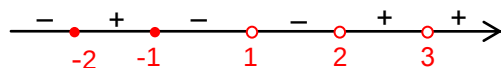
נמצא הפעם את תחומי החיוביות והשליליות על-פי מידת הריבוי של הגורמים הלינאריים.

קל לראות כי אם נציב $x=100$ כל הגורמים יהיו חיוביים ולכן נקבל מנה חיובית.

הגורם $x-3$ מופיע בריבוי זוגי, ולכן הפונקציה אינה מחליפה סימן כאשר $x=3$.

הגורם $x-1$ מופיע פעם אחת במונה ופעם אחת במכנה, ולכן גם כאן הפונקציה לא מחליפה סימן.

בכל אחת מנקודות האפס של הגורמים הלינאריים האחרים הפונקציה מחליפה סימן.



איור 11

איור 11 מציג את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

דוגמה 3: נתונה הפונקציה $y = \frac{x^3 - 7x + 6}{x - 2}$.

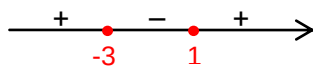
נשים לב כי כאשר $x = 2$ גם המונה וגם המכנה מתאפסים, ולכן ניתן במקרה זה להיעזר בחילוק פולינומים.

מחילוק הפולינומים נקבל: $x^2 + 2x - 3$, $y = \frac{x^3 - 7x + 6}{x - 2}$, $x \neq 2$.

חשוב לזכור שפישוט הפונקציה באמצעות חילוק הפולינומים אינו משנה את תחום הפונקציה.

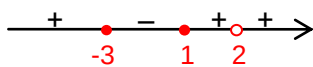
בתחום $x \neq 2$ תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $y = \frac{x^3 - 7x + 6}{x - 2}$ זהים לתחומי החיוביות והשליליות של

הפונקציה $y = x^2 + 2x - 3$.



איור 12

תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $y = x^2 + 2x - 3$ מוצגים באיור 12.



איור 13

בגלל נקודת האי-הגדרה, לפונקציה $y = \frac{x^3 - 7x + 6}{x - 2}$ שלושה קטעים בהם

הפונקציה חיובית (איור 13).

מסקנה: הפונקציה חיובית בתחומים $x > 2$, $1 < x < 2$, ו- $x < -3$ ושלילית בתחום $-3 < x < 1$.

אסימפטוטות של פונקציות רציונליות²

התנהגות פונקציה רציונלית ליד נקודות אי-הגדרה

נתבונן בפונקציה $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$. הפונקציה אינה מוגדרת ב- $x = -3$.

נתבונן בטבלת ערכים בה ערכי x מתקרבים ל- $x = -3$:

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	$\rightarrow$	-3	$\leftarrow$	-2.9999	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	51	501	5001	50001				-49999	-4999	-499	-49

מתקבל הרושם כי כאשר ערכי x שואפים ל- -3 ערכי הפונקציה שואפים בערכם המוחלט ל- ∞ . אכן, כאשר ערכי x שואפים ל- -3 המונה שואף ל- -5 והמכנה שואף לאפס. לכן ערכי הפונקציה שואפים בערכם המוחלט ל- ∞ . משמאל לנקודת האי-הגדרה הפונקציה חיובית ולכן ערכי הפונקציה שואפים ל- ∞ , ואילו מימין לנקודת

האי-הגדרה ערכי הפונקציה שואפים ל- $-\infty$. לפונקציה $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ אסימפטוטה אנכית $x = -3$.

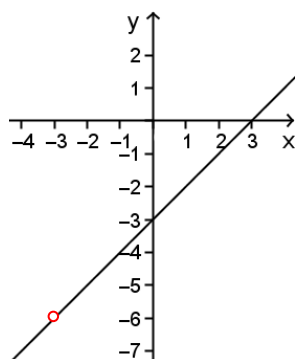
² פרק בנושא אסימפטוטות מופיע בעמוד 89.

נתבונן כעת בפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$. גם פונקציה זו אינה מוגדרת ב- $x = -3$. כאשר ערכי x שואפים ל- -3 גם המונה וגם המכנה שואפים לאפס. נתבונן בטבלת ערכים בה ערכי x מתקרבים ל- $x = -3$:

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	$\rightarrow$	-3	$\leftarrow$	-2.9999	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001				-5.9999	-5.999	-5.99	-5.9

מתקבל הרושם כי כאשר ערכי x שואפים ל- -3 ערכי הפונקציה שואפים ל- -6 .

פירוק המונה לגורמים וצמצום השבר, מבהירים את התמונה: הפונקציה שלפנינו היא $f(x) = x - 3$, $x \neq -3$. מכאן שלמעט בנקודה $x = -3$ הפונקציה הנתונה מתלכדת עם הפונקציה $g(x) = x - 3$ הרציפה בכל הישר הממשי. כאשר $x = -3$ הפונקציה f אינה מוגדרת ולכן יש בגרף חור. כאשר $x \rightarrow -3$ ערכי הפונקציה מתנהגים כמו ערכי הפונקציה $g(x) = x - 3$, ומכאן שהם שואפים ל- $g(-3) = -6$.



איור 14

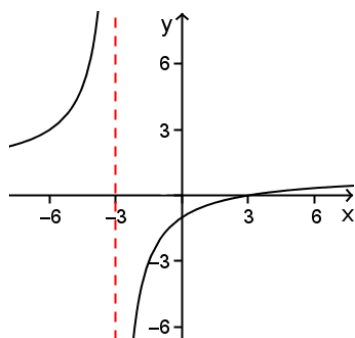
לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ חור $(-3, -6)$ (איור 14).

האם בכל מקרה בו בסביבת נקודת אי-הגדרה של פונקציה רציונלית גם המונה וגם המכנה של הפונקציה שואפים לאפס יש לגרף הפונקציה חור? התשובה שלילית.

נתבונן בפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 9}{(x + 3)^2}$. גם פונקציה זו אינה מוגדרת ב- $x = -3$. גם הפעם, כאשר ערכי x שואפים ל- -3 גם המונה וגם המכנה שואפים לאפס. נפרק את המונה והמכנה לגורמים ונצמצם את השבר. נגלה שהפונקציה הנתונה היא

$f(x) = \frac{x - 3}{x + 3}$, $x \neq -3$. כאשר ערכי x שואפים ל- -3 המונה שואף ל- -6 והמכנה שואף לאפס. לכן ערכי

הפונקציה שואפים בערכם המוחלט ל- ∞ . לפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 9}{(x + 3)^2}$ אסימפטוטה אנכית $x = -3$ (איור 15).



איור 15

הדוגמאות ניתנות להכללה:

תהא $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ פונקציה רציונלית בה הפולינום במכנה אינו אפס.

א. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x ממשי, למעט שורשי הפולינום $Q(x)$.

ב. אם $x = x_0$ הינו שורש של הפולינום במכנה ואינו שורש של הפולינום במונה, כלומר: $Q(x_0) = 0$

ו- $P(x_0) \neq 0$, אז הישר $x = x_0$ הוא אסימפטוטה אנכית של $f(x)$.

ג. אם $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ אז הישר $x = x_0$ הוא אסימפטוטה של $f(x)$ אם ורק אם הריבוי של השורש

$x = x_0$ בפולינום $Q(x)$ גדול מריבוי הפולינום $P(x)$.³ אחרת לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטה אנכית

$x = x_0$. במקרה זה יש בגרף הפונקציה "חור" – נקודה ריקה $(x_0, f(x_0))$.

³ ריבוי השורש $x = x_0$ הוא החזקה של הגורם $(x - x_0)$.

התנהגות פונקציה רציונלית כאשר ערכי x גדולים מאד בערכם המוחלט

מקרה א: מעלת הפולינום במכנה גדולה ממעלת הפולינום במונה
נחשוב על מקרה "קיצוני" בו מעלת הפונקציה במכנה גדולה בהרבה ממעלת הפונקציה במונה.

נבנה, למשל, טבלת ערכים לפונקציה $f(x) = \frac{100x^2 + 17x + 1000}{x^{10} + 1}$:

x	-1000	-10	←	→	10	1000
$f(x)$	$\frac{-100000016000}{10^{30} + 1}$	$\frac{-99170}{10000000001}$			$\frac{101170}{100000000001}$	$\frac{100000018000}{10^{30} + 1}$

לא קשה להבחין כי כאשר מציבים בפונקציה מספרים גדולים בערכם המוחלט המכנה גדול בהרבה מהמונה וערכו של השבר קרוב לאפס.

דרך נוחה לבחון התנהגות של פונקציה כאשר ערכי x גדולים מאד בערכם המוחלט היא לחלק את המונה והמכנה של הפונקציה בחזקה הגדולה ביותר של המכנה, פעולה שאינה משפיעה על ערכי הפונקציה.

$$f(x) = \frac{100x^2 + 17x + 1000}{x^{10} + 1} = \frac{\frac{100x^2}{x^{10}} + \frac{17x}{x^{10}} + \frac{1000}{x^{10}}}{\frac{x^{10}}{x^{10}} + \frac{1}{x^{10}}} = \frac{\frac{100}{x^8} + \frac{17}{x^9} + \frac{1000}{x^{10}}}{1 + \frac{1}{x^{10}}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

בהצגה זו ניתן לראות כי כאשר ערכי x שואפים לאינסוף בערכם המוחלט, המונה שואף לאפס, המכנה שואף ל-1 ומכאן שהשבר שואף לאפס.

לפונקציה $f(x) = \frac{100x^2 + 17x + 1000}{x^{10} + 1}$ אסימפטוטה אופקית $y = 0$.

באופן דומה ניתן להראות שלכל פונקציה רציונלית שבה מעלת המכנה גדולה ממעלת המונה יש אסימפטוטה אופקית $y = 0$.

מקרה ב: מעלת הפולינום במכנה שווה למעלת הפולינום במונה

כיצד מתנהגת הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 4}{x^3 + 3x^2 - 5}$ כאשר ערכי x שואפים לאינסוף בערכם המוחלט?

טבלת ערכים מגלה כי כאשר ערכי x שואפים בערכם המוחלט לאינסוף, ערכי הפונקציה הולכים ומתקרבים ל-1. האם יכולנו לשער תוצאה זו ללא טבלת ערכים?

כיצד מתנהגת הפונקציה $f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 4}{3x^3 + 3x^2 - 5}$ כאשר ערכי x שואפים לאינסוף בערכם המוחלט?

ניתן לראות באמצעות טבלת ערכים שערכי הפונקציה שואפים ל- $\frac{2}{3}$.

ניתן גם לשער תוצאה זו כיוון שכאשר ערכי x שואפים בערכם המוחלט לאינסוף, המחוברים הדומיננטיים בפולינומים שבמונה ובמכנה הם בעלי החזקה הגבוהה ביותר.

נאמץ את הטכניקה של חילוק המונה והמכנה בחזקה הגבוהה ביותר של המכנה, במקרה זה - x^3 .

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 4}{3x^3 + 3x^2 - 5} = \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{5}{x^3}} = \frac{2 - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{3 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{3}$$

מכאן שלפונקציה $f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 4}{3x^3 + 3x^2 - 5}$ אסימפטוטה אופקית $y = \frac{2}{3}$.

נוכל לבחון התנהגות פונקציה גם באמצעות חילוק פולינומים:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 4}{x^3 + 3x^2 - 5} = \frac{x^3 + 3x - 5}{x^3 + 3x^2 - 5} + \frac{-5x + 9}{x^3 + 3x^2 - 5} = 1 + \frac{-5x + 9}{x^3 + 3x^2 - 5} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 1$$

לפונקציה $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 4}{x^3 + 3x^2 - 5}$ אסימפטוטה אופקית $y = 1$.

מקרה ג: מעלת הפולינום במונה גדולה ממעלת הפולינום במכנה

במקרה זה כאשר ערכי x שואפים בערכם המוחלט לאינסוף, גם ערכי הפונקציה שואפים בערכם המוחלט לאינסוף.

לבחינת התנהגות הפונקציה נוכל לאמץ את הטכניקה של חילוק המונה והמכנה בחזקה הגבוהה ביותר של המכנה (דוגמה 1), או בטכניקה של חילוק פולינומים (דוגמה 2 ודוגמה 3):

דוגמה 1

$$f(x) = \frac{2x^5 - 2x + 4}{3x^3 + 3x^2 - 5} = \frac{\frac{2x^5}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{5}{x^3}} = \frac{2x^2 - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{3 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \infty$$

לפונקציה $f(x) = \frac{2x^5 - 2x + 4}{3x^3 + 3x^2 - 5}$ אין אסימפטוטה אופקית.

דוגמה 2

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + x^2 + 5}{x^2 + 1} = x^2 + 3x + \frac{-3x + 5}{x^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \infty$$

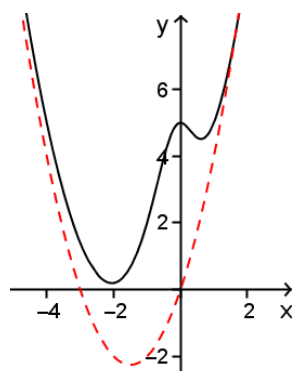
גם לפונקציה $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + x^2 + 5}{x^2 + 1}$ אין אסימפטוטה אופקית.

מחילוק הפולינומים ניתן גם ללמוד שכאשר ערכי הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + x^2 + 5}{x^2 + 1}, \text{ גדולים בערכם המוחלט,}$$

התנהגות הפונקציה דומה להתנהגות הפונקציה הריבועית $g(x) = x^2 + 3x$.

איור 16 מציג את הפונקציה f בקו רצוף ואת הפונקציה g בקו מרוסק.



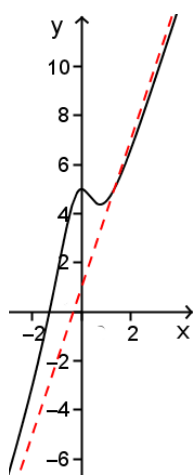
איור 16

דוגמה 3

נתייחס כעת למקרה מיוחד שבו מעלת הפולינום במונה גדולה ב-1 ממעלת הפולינום במכנה. נתבונן בפונקציה:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 + 5}{x^2 + 1} = \frac{3x^3 + 3x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 + 1} = 3x + \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{-3x + 4}{x^2 + 1} = 3x + 1 + \frac{-3x + 4}{x^2 + 1}$$

במקרה זה התוצאה של חילוק הפולינומים היא סכום של פונקציה ליניארית $y = 3x + 1$ ופונקציה רציונלית



איור 17

שבה מעלת הפולינום במכנה גדולה ממעלת הפולינום במונה. כאשר ערכי $y = \frac{-3x+4}{x^2+1}$

x שואפים בערכם המוחלט לאינסוף, ערכי הפונקציה $y = \frac{-3x+4}{x^2+1}$ שואפים לאפס.

במילים אחרות: כאשר ערכי x שואפים בערכם המוחלט לאינסוף, ההפרש בין הפונקציה והפונקציה הליניארית $y = 3x + 1$ שואף לאפס.

מכאן שלפונקציה $f(x) = \frac{3x^3 + x^2 + 5}{x^2 + 1}$ אסימפטוטה משופעת $y = 3x + 1$.

איור 17 מציג את הפונקציה $f(x) = \frac{3x^3 + x^2 + 5}{x^2 + 1}$ עם האסימפטוטה המשופעת.

התופעה אינה מקרית. פונקציה רציונלית שבה מעלת הפולינום במונה גדולה ב-1 ממעלת הפולינום במכנה ניתן תמיד להציג, באמצעות חילוק פולינומים, כסכום של פונקציה ליניארית ופונקציה רציונלית שבה מעלת המונה קטנה ממעלת המכנה (מדוע?). מכאן שהתנהגות הפונקציה הרציונלית, עבור ערכי x גדולים בערכם המוחלט, דומה להתנהגות של פונקציה ליניארית.

את הדוגמאות שבחנו במקרים השונים נוכל להכליל:

תהא $f(x)$ פונקציה רציונלית:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

כאשר המקדמים a_k, b_k הם מספרים ממשיים, $m \geq 0$, $n \geq 0$, מספרים שלמים, $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$.

א. אם מעלת הפולינום במונה קטנה ממעלת הפולינום במכנה, כלומר $m < n$, אז הישר $y = 0$ (ציר ה- x) הוא אסימפטוטה אופקית של $f(x)$ כאשר $x \rightarrow \infty$ וגם כאשר $x \rightarrow (-\infty)$.

ב. אם מעלת הפולינום במונה שווה למעלת הפולינום במכנה, כלומר $m = n$, אז לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה

$$\text{אופקית } y = \frac{a_m}{b_n} \text{ בשני הכיוונים: } x \rightarrow \infty \text{ ו- } x \rightarrow (-\infty).$$

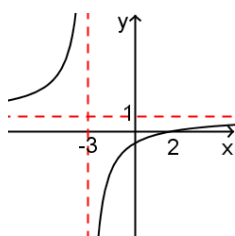
ג. אם מעלת הפולינום במונה גדולה ב-1 ממעלת הפולינום במכנה, כלומר $m = n + 1$, אז ל- $f(x)$ יש

$$\text{אסימפטוטה משופעת כאשר } x \rightarrow \infty \text{ וגם כאשר } x \rightarrow (-\infty).$$

ד. אם מעלת הפולינום במונה גדולה ב-2 או יותר ממעלת הפולינום במכנה אז ל- $f(x)$ אין אסימפטוטה אופקית ואין אסימפטוטה משופעת.

פעילות 3: סרטוט סקיצת גרף של פונקציה רציונלית בדרכים שונות

$$\text{סרטוט גרף הפונקציה } f(x) = \frac{x-2}{x+3}$$



איור 18

פתרון ראשון: לפונקציה נקודת אי-הגדרה כאשר $x = -3$, נקודת אפס כאשר $x = 2$, ואסימפטוטות $x = -3$ ו- $y = 1$. הפונקציה חיובית כאשר $x < -3$ או $x > 2$, ושלילית

כאשר $-3 < x < 2$. בעזרת מידע זה ניתן לסרטוט סקיצה של גרף הפונקציה כבאיור 18.

כמובן שהמידע שאספנו אינו מאפשר לדעת אם יש לפונקציה נקודות קיצון ו/או נקודות פיתול.

פתרון שני: לצורך סרטוט פונקציה מהצורה $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, ניתן להיעזר בטרנספורמציות של המישור, ולהציג

את הגרף על-ידי ביצוע הזזות ושיקופים של הפונקציות $y = \pm \frac{a}{x}$.

לצורך כך, נצא מהפונקציה: $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ ונבצע עליה את הפעולות האלגבריות הבאות:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3} = \frac{x+3-5}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} - \frac{5}{x+3} = 1 - \frac{5}{x+3}$$

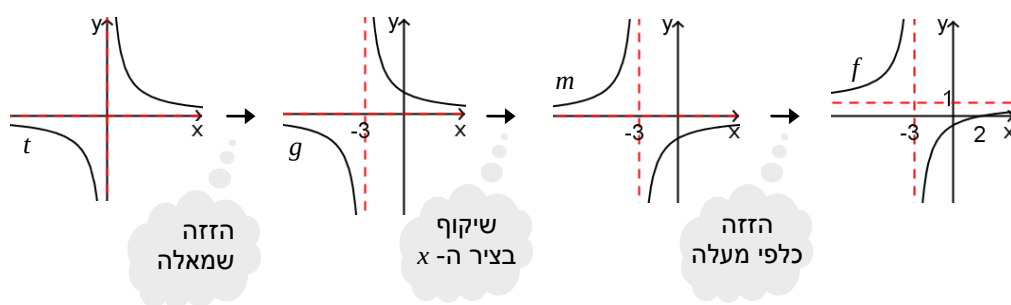
כעת נוכל להיעזר בטרנספורמציות של המישור על הפונקציה $t(x) = \frac{5}{x}$ בכדי להגיע חזרה לפונקציה

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3}$$

לשם כך, על גרף הפונקציה $t(x) = \frac{5}{x}$ נבצע הזזה של 3 יחידות שמאלה, ונקבל את גרף הפונקציה $g(x) = \frac{5}{x+3}$;

נשקף את גרף הפונקציה החדשה בציר ה- x , ונקבל גרף של הפונקציה $m(x) = -\frac{5}{x+3}$; נבצע בו הזזה ביחידה

אחת למעלה לאורך ציר ה- y , ונקבל את גרף הפונקציה המקורית: $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$. התהליך מוצג באיור 19.



איור 198

חקירת פונקציות רציונליות

בפעילויות הקודמות הצגנו את נושא הפונקציות הרציונליות ודלינו את כל המידע שניתן ללא שימוש בטכניקות מהחשבון הדיפרנציאלי. בפרק הנוכחי נשלים את הנושא על-ידי חקירה מקיפה. כחלק מהמשימות המוצגות פה, יודגמו דרכי העמקה בטכניקות אלגבריות, יוצגו פעילויות חקר של פונקציות זוגיות ואי-זוגיות, ופעילויות חקר של משפחות של פונקציות.

פעילות 4: חקירה של פונקציה לצד חקירת הפונקציה ההופכית שלה

בפעילות זו נחקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$ ולאחריה את הפונקציה ההופכית לה $g(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$. השילוב של שתי החקירות מאפשר חקירה ראשונה פשוטה של הפונקציה f , פונקציה עם אסימפטוטה אופקית בלבד,

ולאחריה איסוף מידע אודות הפונקציה g בשתי דרכים – פעם ראשונה על סמך תכונות הפונקציה f , ופעם שנייה באמצעות הנגזרת. אפשר לשקול את ההצגה של שתי פונקציות אלה בסדר הפוך.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3} \quad \text{חקירת הפונקציה}$$

נתחיל באיסוף מידע שיש בידינו "רגע לפני הנגזרת":

א. **תחום ההגדרה:** אין ערך x שמאפס את המכנה ולכן הפונקציה מוגדרת לכל x ממשי.

ב. **נקודת החיתוך עם ציר ה- x** $(-1,0)$ מתקבלת מפתרון המשוואה: $\frac{x+1}{x^2+3} = 0$.

נקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקבלת מהצבת $x=0$ בפונקציה, והיא: $(0, \frac{1}{3})$.

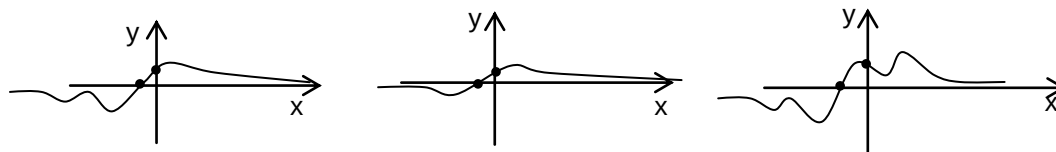
ג. אפשר לרשום גם את **תחומי החיוביות והשליליות** של הפונקציה: $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$.

במונה ניצבת פונקציה ליניארית עולה ובמכנה – פונקציה ריבועית, חיובית לכל ערך של x , לפיכך תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה זהים לאלו של הפונקציה שבמונה. לכן:

הפונקציה חיובית בתחום: $x > -1$ ושלילית בתחום $x < -1$.

ד. **אסימפטוטות:** לפונקציה אין אסימפטוטה אנכית. כיוון שמעלת הפולינום במכנה גדולה ממעלת הפולינום במונה יש לפונקציה אסימפטוטה אופקית – הישר $y=0$.

בשלב זה נוכל לסרטט סקיצה משוערת לגרף, אך לא נוכל לקבוע את המיקום של נקודות הקיצון, ולא נוכל לקבוע את מספרן. כך למשל, באיור שלהלן שלוש סקיצות אפשריות:



איור 20

ה. כדי למצוא את **תחומי העלייה והירידה** של הפונקציה, וכדי למצוא את **נקודות הקיצון** שלה, נגזור:

$$f'(x) = \frac{1(x^2+3) - 2x(x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{-(x^2+2x-3)}{(x^2+3)^2}$$

⁴ החיתוך עם ציר ה- x בנקודה זו ידמה לחיתוך של פונקציה ליניארית עם הציר, היות והגורם: $(x+1)$, המופיע במונה של הפונקציה מופיע במעלה ראשונה.

נשים לב שהנגזרת שהתקבלה מוגדרת בכל ציר המספרים, בדיוק כשם שהפונקציה מוגדרת בתחום זה⁵.

המעבר בין תחומי עלייה וירידה של פונקציה רציונלית, המוגדרת בכל ציר המספרים, יכול להתבצע אך ורק בנקודות האפס של הנגזרת שלה, או בנקודות האי-הגדרה של הפונקציה. במהלך המשימות הבאות נדגיש כי לא בכל נקודת אפס של הנגזרת משתנה מגמת הפונקציה מירידה לעלייה או להיפך.

כיוון שכל פולינום ניתן לפירוק למכפלה של גורמים ליניאריים וגורמים ריבועיים אי-פריקים, נציג את הנגזרת באמצעות פירוק כזה. במקרה שלנו:

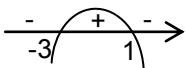
$$f'(x) = \frac{-(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-(x+3)(x-1)}{(x^2 + 3)^2}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x = -3$ וכאשר $x = 1$.

דרך ג
שיקולים איכותניים

$$f'(x) = \frac{-(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

מכנה הנגזרת חיובי לכל x ממשי.
סימני הנגזרת זהים לסימני מונה הנגזרת, ונקבעים על-ידי סימני הפונקציה $y = -(x+3)(x-1)$.



מסרטוט סכמתי של הפרבולה המתאימה נוכל להסיק את אותן המסקנות אליהן הגענו בדרכים האחרות.

דרך ב
הצגת ערכי הפונקציה בטבלה

x	-4	-3	0	1	2
y	$-\frac{3}{19}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$
y	→		↗		→
	ירידה		עלייה		ירידה

מסקנות:

נקודת מקסימום מקומי $(1, \frac{1}{2})$,
נקודת מינימום מקומי $(-3, -\frac{1}{6})$,
תחום עלייה: $-3 < x < 1$,
תחומי ירידה: $x < -3$; $x > 1$.

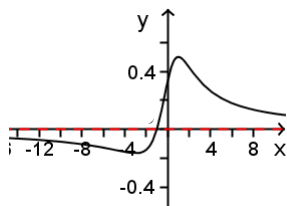
דרך א
הצגת ערכי הנגזרת בטבלה

x	-4	-3	0	1	2
y'	$-\frac{5}{361}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{5}{49}$
y	→		↗		→
	ירידה		עלייה		ירידה

מסקנות:

נקודת מקסימום מקומי $(1, \frac{1}{2})$,
נקודת מינימום מקומי $(-3, -\frac{1}{6})$,
תחום עלייה: $-3 < x < 1$,
תחומי ירידה: $x < -3$; $x > 1$.

טבלה 4



איור 21

איור 21 מציג את גרף הפונקציה.

⁵ עבור פונקציות רציונליות נכונה הטענה: תחום ההגדרה של נגזרות הפונקציה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה עצמה. ההוכחה של טענה זו נסמכת על כלל הגזירה של מנה של פונקציות.

הפעם אנו יודעים שתיארנו את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה שלה.

ומה עוד אפשר לשאול?

נקודות פיתול: מהשוואת הנגזרת השנייה לאפס מקבלים משוואה ממעלה שלישית שלא פשוט לפרק אותה לגורמים ולפתור אותה.

יחד עם זאת, אפשר בקלות יחסית להסביר מדוע יש לפונקציה בדיוק שלוש נקודות פיתול, תכונה שאפשר לראות היטב גם בסקיצה שהתקבלה (איור 19). כיוון שהנגזרת השנייה ניתנת להצגה כמנה של פונקציה ממעלה שלישית ו- $(x^2 + 3)^2$, הרי שיש לפונקציה לכל היותר שלוש נקודות פיתול, שכן הפולינום מהמעלה השלישית מתאפס לכל היותר שלוש פעמים, ומחליף סימן לכל היותר שלוש פעמים בנקודות האפס הללו. כיוון שיש לפונקציה שתי נקודות קיצון, האחת מינימום מוחלט והשנייה מקסימום מוחלט, והפונקציה גזירה בכל תחום הגדרתה, הרי שביניהן קיימת נקודת פיתול. נקודת המקסימום נמצאת מימין לציר y . כיוון שלפונקציה יש אסימפטוטה אופקית $y = 0$ ואין נקודת חיתוך עם ציר ה- x מימין לנקודת הקיצון, הרי שהגרף צריך להיות קעור כלפי מעלה בהתקרבות אל האסימפטוטה. מכאן מסיקים שקיימת נקודת פיתול אחת לפחות מימין לנקודת המקסימום. משיקולים דומים קיימת נקודת פיתול אחת לפחות משמאל לנקודת המינימום, כך שבסך הכול, מניתוח ההתקרבות לאסימפטוטה האופקית, ומהמעבר בין נקודת המינימום למקסימום, יש לפחות שלוש נקודות פיתול. לכן מתוך העובדה שמונה הנגזרת השנייה הוא פולינום ממעלה שלישית, נקבל שיש בדיוק שלוש נקודות פיתול לפונקציה.

אפשר לשנות מרכיבים בפונקציה ולחקור מחדש. כך, למשל, מעניין לשאול איך נראית כל פונקציה מהצורה:

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+c}, \text{ כאשר } a, b, c \text{ הם פרמטרים ממשיים ו- } c > 0.$$

היות ואנו עוסקים בפונקציות רציונליות, אך טבעי להתבונן בפונקציה ההופכית.

$$\text{חקירת הפונקציה } g(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}.$$

אפשר, כמובן, לאסוף את המידע המקדים לנגזרת באופן שיטתי, כפי שעשינו קודם. אך הבה ננצל את העובדה שכבר חקרנו את הפונקציה ההופכית ונבחן את הקשרים בין השתיים, כפי שביצענו בפעילות מס' 2.

$$\text{לפונקציה } f \text{ נקודת מקסימום מקומי } (1, \frac{1}{2}) \Leftrightarrow \text{לפונקציה } g \text{ נקודת מינימום מקומי } (1, 2).$$

$$\text{לפונקציה } f \text{ נקודת מינימום מקומי } (-3, -\frac{1}{6}) \Leftrightarrow \text{לפונקציה } g \text{ נקודת מקסימום מקומי } (-3, -6).$$

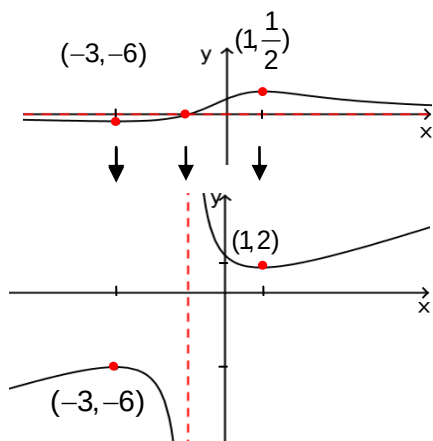
$$\text{לפונקציה } f \text{ נקודת אפס כאשר } x = -1 \Leftrightarrow \text{לפונקציה } g \text{ אסימפטוטה } x = -1.$$

$$\text{לפונקציה } f \text{ תחומי ירידה } x > 1 \text{ ו- } x < -3 \Leftrightarrow \text{לפונקציה } g \text{ תחומי עלייה } x > 1 \text{ ו- } x < -3.$$

$$\text{לפונקציה } f \text{ תחום עלייה } -3 < x < 1 \Leftrightarrow \text{לפונקציה } g \text{ שני תחומי עלייה } -1 < x < 1 \text{ ו- } -3 < x < -1.$$

חקירה באמצעות הנגזרת מובילה לאותן המסקנות. איור 22 מציג זו לצד

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \frac{x^2+3}{x+1}.$$



איור 22

פעילות 5: יתרונות השימוש היעיל בפירוק לגורמים

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2} \quad \text{חקירת הפונקציה:}$$

בפעילות זו נרצה להדגים את היתרון שבמציאת גורמים משותפים בפולינומים המרכיבים את הפונקציה. לשם כך, נבחן תחילה מה אנו יודעים ללא שימוש בנגזרת?

א. תחום ההגדרה: $x \neq 0$.

ב. נקודת חיתוך עם ציר ה- x : $(1,0)$.

אין לפונקציה נקודת חיתוך עם ציר ה- y , היות והפונקציה לא מוגדרת עבור $x=0$.

ג. אסימפטוטה אופקית לפונקציה: אין, היות והמעלה של הפולינום שבמונה גבוהה מזו של הפולינום שבמכנה. הישר: $x=0$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה, היות והמכנה מתאפס והמונה אינו מתאפס עבור ערך זה של x . לפונקציה אסימפטוטה משופעת $y=x-3$ בשלב זה אפשר לבקש מהתלמידים להציע סקיצות אפשריות עבור הפונקציה, ולדון בפריטי המידע החסרים, כגון, קיום ומיקום של נקודות קיצון ונקודות פיתול.

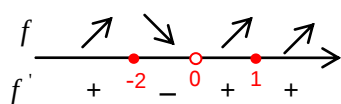
ד. הגזירה של הפונקציה דורשת תשומת לב מיוחדת, היות ובפולינום שבמונה מופיעה פונקציה מורכבת:

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2 \cdot x^2 - 2x(x-1)^3}{x^4}$$

פעמים רבות כדאי לגזור את המונה כפונקציה מורכבת, ולא לפתוח סוגריים לפני הגזירה. בדרך זו נוכל בהמשך להוציא את הגורם $x(x-1)^2$ מחוץ לסוגריים, כגורם משותף של שני המחברים. אם לא נעשה כך, נקבל במונה ביטוי אותו לא נדע לפרק לגורמים.

כיוון שברצוננו להציג את הנגזרת כמנה של מכפלות, נפרק לגורמים את המונה:

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2 \cdot x^2 - 2x(x-1)^3}{x^4} = \frac{x(x-1)^2[3x - 2(x-1)]}{x^4} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$$



איור 23

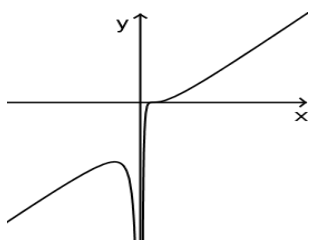
מכאן נקבל (איור 23) את סימני הנגזרת ואפיון הפונקציה בתחומים השונים.

מסקנות

תחומי עלייה: $x > 0$; $x < -2$. תחום ירידה: $-2 < x < 0$; נקודת מקסימום: $(-2, -6.75)$

בנקודה בה $x=1$ אין לפונקציה נקודת קיצון, אך הנגזרת מתאפסת שם. הנקודה $(1,0)$ היא נקודת פיתול.

ה. בשלב זה נוכל להציע את ה**סקיצה** שבאיור 24.



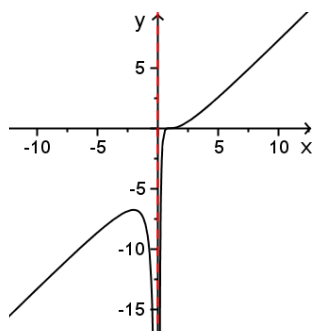
איור 24

האם אכן יש לפונקציה נקודת פיתול אחת?

כדי למצוא נקודות פיתול, יש לחפש נקודות קיצון של הנגזרת הראשונה. למרות שהנגזרת הראשונה נראית לא פשוטה כדאי לנסות. עבור תלמידים ברמות גבוהות תרגיל כזה מדגיש את היתרון של הוצאת גורמים משותפים מחוץ לסוגריים על-פני פתיחתם.

להלן תהליך הגזירה השנייה, הכולל הוצאת גורמים משותפים בשני שלבים.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3} \right)' = \frac{[2(x-1)(x+2) + (x-1)^2] \cdot x^3 - 3x^2(x-1)^2(x+2)}{x^6} = \\ &= \frac{[(x-1)[2(x+2) + (x-1)] \cdot x^3 - 3x^2(x-1)^2(x+2)}{x^6} = \frac{(x-1)(3x+3) \cdot x^3 - 3x^2(x-1)^2(x+2)}{x^6} = \\ &= \frac{3x^2(x-1)[(x+1)x - (x-1)(x+2)]}{x^6} = \frac{3(x-1) \cdot 2}{x^4} = \frac{6(x-1)}{x^4} \end{aligned}$$



איור 25

כעת ניתן להסיק שאכן הנקודה $(1,0)$ היא נקודת הפיתול היחידה של הפונקציה. על-פי סימני הנגזרת השנייה נוכל גם להסיק שהפונקציה קעורה כלפי מעלה כאשר $x > 1$, והיא קעורה כלפי מטה כאשר $x < 0$ וכאשר $0 < x < 1$.

איור 25 מציג את גרף הפונקציה.

פעילות 6: מבחן הנגזרת השנייה לנקודות קיצון – קיצור דרך למקרה של פונקציה רציונלית

נתבונן בפונקציה רציונלית $f(x)$ ובנגזרתה.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} \\ f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{m(x)}{n(x)} \end{aligned}$$

הנגזרת של פונקציה רציונלית היא בעצמה פונקציה רציונלית. לנוחיות נסמן את המונה ב- $m(x)$ ואת המכנה ב- $n(x)$. הסימון מתייחס למונה ולמכנה של הנגזרת הראשונה, כפי שהתקבלו **ללא צמצום שברים**.

בהתאם נוכל לרשום את הנגזרת השנייה:

$$f''(x) = \frac{m'(x)n(x) - m(x)n'(x)}{n^2(x)}$$

נניח שהנגזרת הראשונה מתאפסת כאשר $x = a$, ונחשב את ערך הנגזרת השנייה בנקודה זו. מהתאפסות הנגזרת כאשר $x = a$ נוכל להסיק $m(a) = 0$.

נתבונן בכל הביטויים האלגבריים המרכיבים את הנגזרת השנייה:

$$n(a) = v^2(a) > 0$$

$$m(a) = 0$$

ולכן המחבר כולו שווה ל-0.

$$f''(a) = \frac{m'(a)n(a) - m(a)n'(a)}{n^2(a)}$$

המכנה הוא ביטוי ריבועי חיובי.

כיוון שהמכנה חיובי תמיד, סימן הנגזרת השנייה נקבע על-ידי סימן המונה שלה. כאשר $m(a) = 0$ ו- $n(a) > 0$, סימן הנגזרת הראשונה שווה לסימן של $m'(a)$, כלומר, לסימן הנגזרת הראשונה.

נוכל להסיק:

בנקודה שבה מתאפסת הנגזרת הראשונה סימן הנגזרת השנייה שווה לסימן הנגזרת של מונה הנגזרת הראשונה.

דוגמה

נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ בדרך המקוצרת:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x = 0$.

נסמן ב- $m(x)$ את מונה הנגזרת הראשונה.

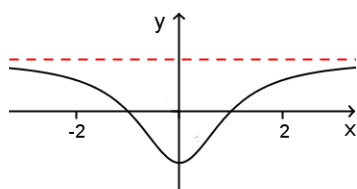
$$m(x) = 4x$$

$$m'(x) = 4 \text{ לכל } x$$

בפרט:

$$m'(0) = 4 > 0 \Rightarrow f''(0) > 0$$

לפונקציה מינימום כאשר $x = 0$.



איור 26

נציב $x = 0$ בפונקציה ונמצא שנקודת המינימום היא $(0, -1)$.
גרף הפונקציה מוצג באיור 26.

זהירות – קיצור הדרך מתאים רק לנקודות אפס של הנגזרת הראשונה

מצאנו כי $m'(x) = 4 > 0$ לכל x . האם נוכל להסיק שהפונקציה f קעורה כלפי מעלה בכל התחום?
התשובה כמובן שלילית.
בנקודות בהן הנגזרת הראשונה שונה מאפס לא נוכל ללמוד מסימן הנגזרת של מונה הנגזרת על סימן הנגזרת השנייה.

נמצא את התחום בו הפונקציה קעורה כלפי מעלה בעזרת הנגזרת השנייה:

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 1)(4 - 12x^2)}{(x^2 + 1)^4}$$

הנגזרת השנייה חיובית כאשר $4 - 12x^2 > 0$, כלומר, כאשר $-\sqrt{\frac{1}{3}} < x^2 < \sqrt{\frac{1}{3}}$. זהו התחום בו הפונקציה קעורה כלפי מעלה.

פעילות 7: שיקולי זוגיות ואי-זוגיות בחקירת פונקציות רציונליות

$$א. \text{ הפונקציה } f(x) = x + \frac{1}{x}$$

בחרנו לחקור פונקציה זו במטרה להכיר את תכונותיה, כדי שנוכל לחזור אליה בהמשך הספר כשנרצה להדגים רעיונות שונים, כמו, קשרים בין פונקציה מורכבת לפונקציות המרכיבות אותה.

את הפונקציה $f(x)$ נוכל לכתוב גם כ- $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.
תחום ההגדרה: $x \neq 0$.

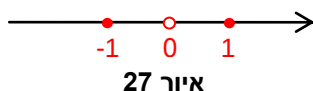
גרף הפונקציה אינו חותך גם את ציר ה- x (מדוע?).

כיוון שהמונה חיובי לכל x נוכל להסיק כי הפונקציה חיובית כאשר $x > 0$ ושלילית כאשר $x < 0$.

$$\text{נגזרת הפונקציה: } f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

נקודות האפס של הנגזרת מתקבלות עבור $x = \pm 1$.

כיוון שהפונקציה אי-זוגית ניתן לחקור את התנהגות הפונקציה בענף החיובי של ציר ה- x ולהסיק את התנהגותה בענף השמאלי של הציר. לחילופין נוכל להיעזר בזוגיות הנגזרת, לחשב את ערכי הנגזרת בענף החיובי של ציר ה- x ולהסיק את ערכי הנגזרת בענף השמאלי של הציר.



נחלק את ציר ה- x לקטעים על-פי נקודות האפס של הנגזרת ונקודות האי-הגדרה של הפונקציה ובנה, בהתאם, את טבלת ערכי הפונקציה.

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$	-2.5	-2	-2.5	לא מוגדר	2.5	2	2.5
	↗		↘		↘		↗

טבלה 5

כדי למצוא נקודות פיתול נגזור שנית. $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. לנגזרת השנייה אין נקודות אפס. היא שלילית כאשר $x < 0$ וחיובית כאשר $x > 0$.

נוכל להסיק:

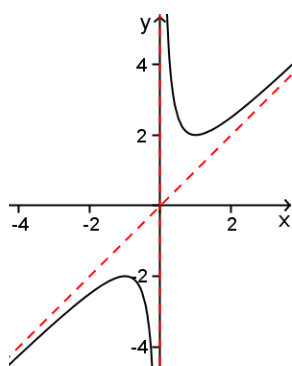
הנקודה $(1, 2)$ היא נקודת מינימום, והנקודה $(-1, -2)$ היא נקודת מקסימום.

הפונקציה עולה בתחומים $x < -1$; $x > 1$.

הפונקציה יורדת בתחומים $-1 < x < 0$; $0 < x < 1$.

הפונקציה קעורה כלפי מעלה בתחום $x > 0$, וקעורה כלפי מטה בתחום $x < 0$.

בסביבת הנקודה $x = 0$ מונה הפונקציה לא מתאפס, ולכן יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית $x = 0$.



איור 28

כיוון שמעלת הפולינום במונה גדולה ממעלת הפולינום במכנה, אין לפונקציה אסימפטוטה אופקית ויש לה אסימפטוטה משופעת. קל להסיק מהי משוואת

האסימפטוטה המשופעת כשהפונקציה רשומה בצורה $f(x) = x + \frac{1}{x}$, כיוון שכאשר $x \rightarrow \pm\infty$ המחובר $\frac{1}{x}$ שואף לאפס.

איור 28 מציג את גרף הפונקציה.

ב. משפחת הפונקציות $f(x) = \frac{2x^n}{x^2 - 4}$ (n מספר טבעי)

נפתח בחקירת הפונקציה $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$.

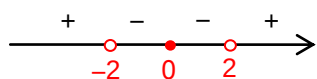
$f(x)$ הינה פונקציה זוגית. במהלך החקירה ניעזר בתכונה זו.

אבני דרך בחקירת הפונקציה

א. תחום ההגדרה של הפונקציה: $x \neq \pm 2$.

ב. נקודת החיתוך עם ציר ה- x היא: $(0,0)$ והיא גם נקודות החיתוך עם ציר ה- y .

ג. נוכיח את תכונת הזוגיות של הפונקציה: $f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{2x^2}{x^2 - 4} = f(x)$.

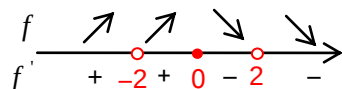


איור 29

מתכונה זו נובעת הסימטריה של הגרף ביחס לציר ה- y , כך שמספיק לחקור את הפונקציה בתחום: $x > 0$, ולבצע שיקוף של גרף הפונקציה בציר y .

ד. אסימפטוטות אנכיות לפונקציה: $x = -2$, $x = 2$.

ה. אסימפטוטה אופקית לפונקציה: $y = 2$.

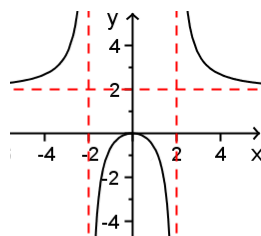


איור 30

ו. איור 29 מציג את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה על ציר המספרים.

ראינו כי $f(0) = 0$. אם נסתכל בסביבה קרובה של $x = 0$ הפונקציה מקבלת ערכים שליליים גם מימין וגם משמאל. מכאן ברור שבקטע קטן משני צדי האפס הערך הגדול ביותר מתקבל בדיוק בראשית הצירים. כלומר אנו יודעים, עוד לפני חישוב הנגזרת, שבראשית הצירים תהיה לפונקציה נקודת מקסימום.

ז. נבחן את הנגזרת של הפונקציה, כדי לבדוק אם יש נקודות קיצון נוספות.



איור 31

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 4) - 2x \cdot 2x^2}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{-16x}{(x-2)^2(x+2)^2}$$

מניתוח סימני הנגזרת עולה כי אין לפונקציה נקודת קיצון נוספת, פרט לראשית הצירים.

איור 30 מציג את סימני הנגזרת ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה

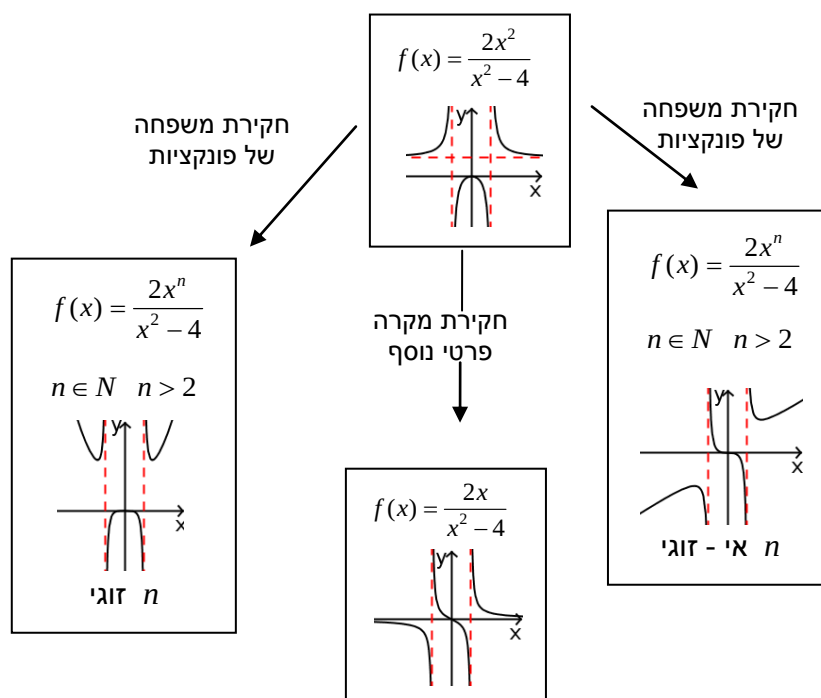
ח. איור 31 מציג את גרף הפונקציה.

נשאלת השאלה מה ישתנה בתכונות הפונקציה $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$ ובגרף שלה, אם נשנה את מעריך החזקה

שבמונה. נוכל לחקור מקרים פרטיים נוספים, למשל, את הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$, פונקציה אי-זוגית, ונוכל

לחקור את משפחת הפונקציות $f(x) = \frac{2x^n}{x^2 - 4}$ עבור n טבעי, הכוללת פונקציות זוגיות ופונקציות אי-זוגיות.

איור 32 מציג הצעות להרחיב את הדיון בשאלה.

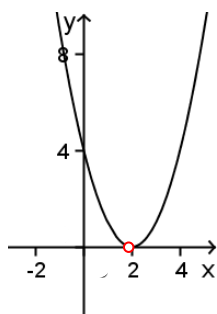


איור 32

פעילות 8: פונקציות עם נקודת אי-רציפות סליקה

כיצד נראה גרף הפונקציה $f(x) = \frac{(x-2)^3}{x-2}$?

הפונקציה הנתונה איננה מוגדרת כאשר $x = 2$. בכל נקודה אחרת גרף הפונקציה מתלכד עם גרף הפונקציה $g(x) = (x-2)^2$.



איור 33

איור 33 מציג את גרף הפונקציה $f(x) = \frac{(x-2)^3}{x-2}$, פרבולה עם חור בנקודה $(2, 0)$.

לפעמים קיומה של נקודת אי-רציפות סליקה הוא קצת פחות בולט. למשל, בדוגמה הבאה.

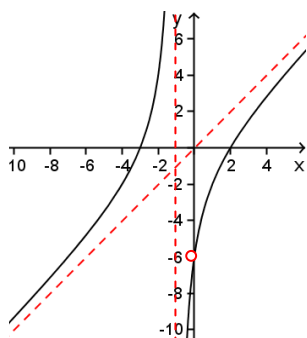
חקרו את הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 + x}$ וסרטטו את גרף הפונקציה.

נפרק את המונה והמכנה לגורמים, ונקבל הצגה אחרת לפונקציה: $f(x) = \frac{x(x+3)(x-2)}{x(x+1)}$.

מכאן ברור שפרט לנקודה בה $x = 0$ הפונקציה זהה לפונקציה: $g(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)}$.

כלומר, $f(x)$ היא פונקציה עם "חור" – נקודת אי-רציפות סליקה – בנקודה: $(0, g(0)) = (0, -6)$.

בחקירת הפונקציה, כדאי כמובן לבצע את כל הפעולות על הפונקציה $g(x)$. נשאיר את פרטי החקירה לקוראים. מעניין לשים לב לעובדות הבאות:



איור 34

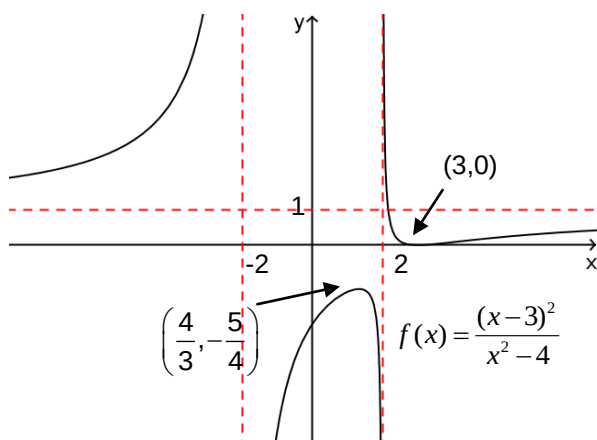
1. הפונקציה עולה למקוטעין. כלומר, עולה בתחום $x < -1$, ועולה בתחום $x > -1$.

2. הפונקציה קעורה כלפי מעלה בתחום $x < -1$, וקעורה כלפי מטה בתחום $x > -1$.

3. לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית. בכיתות מתקדמות אפשר לדון בקיום האסימפטוטה המשופעת: $y = x$.

גרף הפונקציה מוצג באיור 34.

פעילות 9: מנות קינוח לפונקציית מנה⁶



35

חקירת הפונקציה $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-4}$ מובילה לגרף המופיע

באיור 35.

פעילות זו מציעה חקירה של הפונקציה בדרך לא שגרתית, מלווה במגוון תוספות.

א. הקשר האלגברי

לפעמים עוסקים גם בשאלה:

עבור אילו ערכים של k יש למשוואה $f(x) = k$ שני

פתרונות? פתרון יחיד? אין פתרון?

נתחיל הפעם מהסוף. נענה על השאלה בדרך

אלגברית, וננסה להיעזר בתשובות על מנת לסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-4} = k$$

$$(x-3)^2 = k(x^2-4)$$

$$(k-1)x^2 + 6x - (4k+9) = 0$$

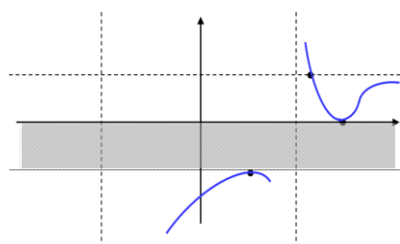
פתרון יחיד יכול להתקבל כאשר המשוואה היא לינארית ($k_1 = 1$), וכאשר המשוואה היא משוואה ריבועית עם

$$\Delta = 0, (k_3 = -1.25, k_2 = 0).$$

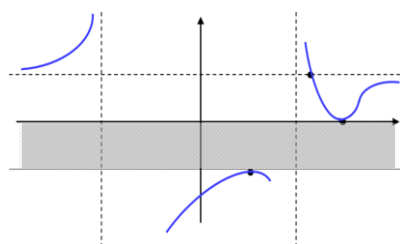
שני פתרונות מתקבלים כאשר $k < -1.25$ וכאשר $k > 0$.

כאשר $0 < k < 1.25$ אין למשוואה פתרונות.

⁶ מעובד על פי דולב (2009).



איור 36



איור 37

מעניין לראות שניתן לסרטט סקיצה של גרף הפונקציה בעזרת המידע שהסקנו בדרך אלגברית, ובעזרת האסימפטוטות של הפונקציה.

נדגיש תחילה במערכת הצירים את התחום $-1.25 < y < 0$ שבו גרף הפונקציה אינו עובר כלל. הישרים $y = 0$, $y = 1$ ו- $y = -1.25$ חותכים את גרף הפונקציה פעם אחת בלבד. כאשר $k < -1.25$ וכאשר $k > 0$, הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה פעמיים. נוכל להסיק כי יש לפונקציה נקודות מקסימום שבה ערך המקסימום $y = -1.25$. ונקודת מינימום שבה ערך המינימום הוא $y = 0$.

חישוב ערכי x בנקודות הקיצון מאפשר סרטוט של שניים מענפי הגרף.

צינו שיקולים שונים המאפשרים לקבוע היכן יעבור הענף השלישי. ראו איורים 36 ו- 37.

ב. בקצה האופק...

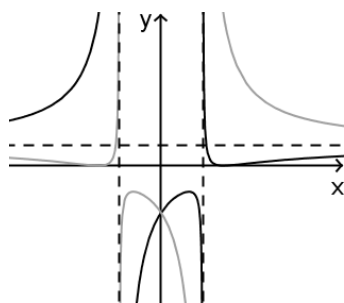
נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-4}$. איזו מבין הטענות הבאות נכונה:

$$f(-10^{100}) > f(10^{100})$$

$$f(-10^{100}) = f(10^{100})$$

$$f(-10^{100}) < f(10^{100})$$

ג. פונקציות במראה



38

1. באיור 38 מוצגות זו לצד זו הפונקציה $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-4}$ (בשחור),

והפונקציה $g(x) = \frac{(x+3)^2}{x^2-4}$ (באפור). גרף הפונקציה g הוא שיקוף של גרף הפונקציה f בציר ה- y . האם זה מקרי? הוכיחו את טענתכם.

2. האם גם הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-4}$ ו- $t(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2+4}$ מתקבלים זה מזה על-ידי שיקוף בציר ה- y ? הסבירו.

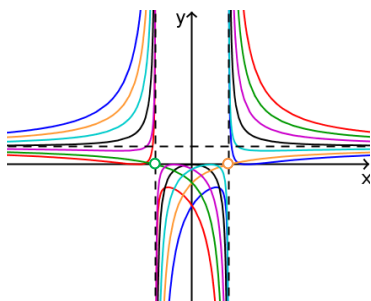
3. הביאו דוגמה לזוג נוסף של פונקציות רציונליות שהגרפים שלהם מתקבלים זה מזה על-ידי שיקוף בציר ה- y .

4. סרטטו, ללא חקירה, סקיצה של גרף הפונקציה $k(x) = \frac{(x-3)^2}{4-x^2}$ במערכת צירים אחת עם גרף הפונקציה

$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-4}$. בדקו את הסקיצה באמצעות המחשב או באמצעות חקירת הפונקציה. מה הקשר בין

הגרפים של שתי הפונקציות?

ד. טיפול משפחתי



איור 39

הפונקציות $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-4}$ ו- $g(x) = \frac{(x+3)^2}{x^2-4}$ יכולות להיות דוגמאות של

פונקציות מתוך המשפחה $m(x) = \frac{(x-a)^2}{x^2-4}$ (איור 39).

1. מבט משפחתי מגלה תמונה סימטרית. האם הגרפים של הפונקציות במשפחה זו סימטריים ביחס לציר ה- y ? האם קיימת במשפחה זו פונקציה שהגרף שלה סימטרי ביחס לציר ה- y ?

נחקור את $m(x)$ כמשפחה:

תחום הגדרה: $x \neq \pm 2$.

חיתוך עם הצירים: $(a, 0), (0, -\frac{a^2}{4})$. בתנאי ש- $a \neq 2, -2$.

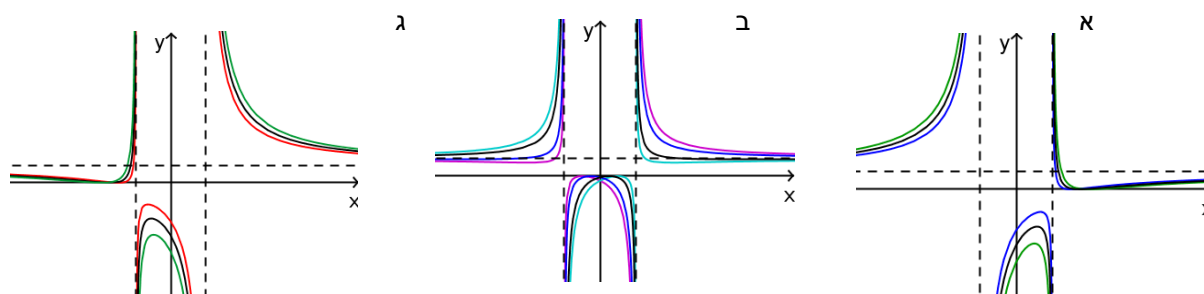
לכל הפונקציות במשפחה אסימפטוטה $y = 1$.

הנגזרת מתאפסת בנקודות: $(a, 0)$ ו- $(\frac{4}{a}, 1 - \frac{a^2}{4})$ בתנאי ש $a \neq 0$.

תחום ההגדרה אינו תלוי בפרמטר, אולם תכונות אחרות של הפונקציות כן תלויות בפרמטר. נחלק את הפונקציות לתת-משפחות.

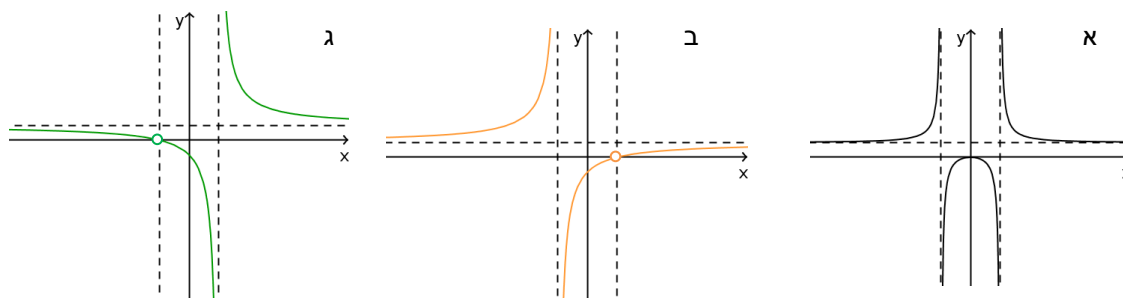
איור 40 מציג את הגרפים של התת-משפחות עבור $a > 2$, $-2 < a < 2$ ו- $a < -2$. בפונקציות ששייכות לתת-משפחות אלה יש אסימפטוטות אופקיות $x = 2$ ו- $x = -2$, נקודה חשודה כקיצון ב- $x = a$, ונקודת קיצון נוספת. מהו אם כן היתרון של הצגת הפונקציות בתת-משפחות? התשובה קשורה לכתיבה המאוחדת של תכונות הפונקציה בכל תת-משפחה.

2. הוכיחו כי בפונקציות ששייכות לשלוש התת-משפחות הנ"ל, שתי הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת הן אכן נקודות קיצון, זהו איזה גרף מייצג כל תת-משפחה, ורשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות באמצעות הפרמטר.



איור 40

באיור 41 מוצגים גרפים של בנות משפחה מיוחדות:



איור 41

הסבירו מדוע לכל אחת מן הפונקציות: $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$, $y = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 4}$ ו- $y = \frac{(x+2)^2}{x^2 - 4}$ השייכות למשפחה הנ"ל, יש לכל היותר נקודת קיצון אחת, וקבעו מי הגרף המתאים לכל פונקציה.

מבחר תשובות לפעילות 9

א. שיקול אפשרי: גילינו כי כאשר $k > 0$ למשוואה $f(x) = k$ שני פתרונות. ללא הענף החסר יש למשוואה הנ"ל רק פתרון אחד כאשר $y > 1$. לכן ערכי הפונקציה המתאימים לענף החסר של הגרף צריכים לקיים $y > 1$.

ב. $f(-10^{100}) > 1$ כיוון שכאשר $x = -10^{100}$ הגרף נמצא מעל האסימפטוטה $y = 1$. $f(10^{100}) < 1$ כיוון שכאשר $x = 10^{100}$ הגרף נמצא מתחת לאסימפטוטה $y = 1$. מכאן $f(-10^{100}) > f(10^{100})$.

ג.

1. התופעה אינה מקרית. לכל a גרף הפונקציה $f(x) = \frac{(x-a)^2}{x^2 - 4}$ סימטרי לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{(x+a)^2}{x^2 - 4}$ ביחס לציר ה- y . כדי להוכיח זאת מראים כי $f(-x) = g(x)$.

2. לא. הפונקציה $t(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2 + 4}$ מוגדרת בכל המספרים הממשיים, ומכאן ברור שהגרף שלה אינו סימטרי לגרף הפונקציה f .

3. למשל: $y = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 4}$ ו- $y = \frac{(x+2)^2}{x^2 - 4}$.

4. הגרפים של הפונקציות k ו- f סימטריים ביחס לציר ה- x . $k(x) = \frac{(x-3)^2}{4-x^2} = -\frac{(x-3)^2}{x^2-4} = -f(x)$.

ד.

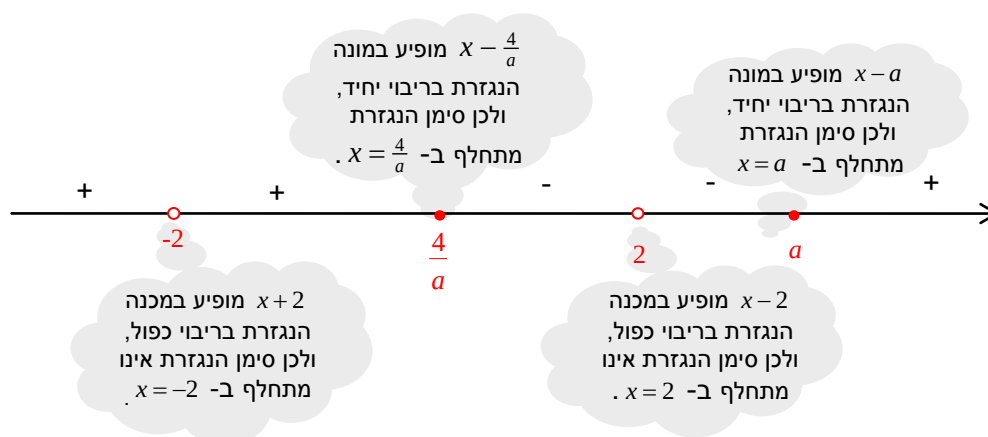
1. רוב הגרפים של הפונקציות מהמשפחה $m(x) = \frac{(x-a)^2}{x^2-4}$, כמו כל הפונקציות ממשפחה זו שפגשנו עד כה,

אינם סימטריים ביחס לציר ה- y . קיימת במשפחה פונקציה סימטרית ביחס לציר ה- y והיא $y = \frac{x^2}{x^2-4}$.

2. איור 38 מייצג את התת-משפחה שבה $a > 2$. איור 38 מייצג את התת-משפחה שבה $-2 < a < 2$. איור 38 מייצג את התת-משפחה שבה $a < -2$.

נתבונן, למשל, בתת-משפחה $a > 2$. לנגזרת שתי נקודות אפס: $x_1 = a$ ו- $x_2 = \frac{4}{a}$. כאשר $a > 2$ מתקיים

$0 < \frac{4}{a} < 2$. הנקודות החשודות ונקודות האי-הגדרה מחלקות את ציר ה- x לחמישה תחומים חלקיים.



איור 42

נמצא את סימן הנגזרת בתחום $x > 2$ על-ידי הצבת ערך מייצג $x = 2a$. נגלה כי $m'(2a) > 0$ ולכן בתחום $x > 2$ הפונקציה עולה. לפי מידת הריבוי של הגורמים במונה ובמכנה נוכל לדעת היכן הפונקציה מחליפה סימן והיכן הסימן נשאר קבוע. (איור 42).

על-פי סימני הנגזרת נוכל להסיק שכאשר $x = a$ יש לפונקציה מינימום, וכאשר $x = \frac{4}{a}$ יש לפונקציה

מקסימום.

באופן דומה נוכל לנתח את התנהגות הפונקציה בתת-משפחות האחרות.