

פונקציה מורכבת

חלק גדול מהפונקציות בהן עוסקים בבית הספר הן פונקציות מורכבות, ולכן העיסוק בפונקציות אלה ממשיך לאורך כל לימודי האנליזה בבית הספר. הבנת הקשרים שבין הפונקציה המורכבת לבין הפונקציות המרכיבות אותה מאפשרת, פעמים רבות, לראות בדמיון את גרף הפונקציה הנחקרת, עוד לפני התחלת החקירה. חלק מהפעילויות המופיעות בפרק אינן מתאימות לתלמידים בעת ההיכרות הראשונה עם פונקציות מורכבות, אך הן מצביעות על נקודות חשובות עליהן כדאי לשים דגש שוב ושוב במהלך העיסוק בפונקציות מורכבות, תוך כדי מפגש חוזר עם פונקציות מורכבות במהלך ההוראה של משפחות פונקציות שונות. ברוב הפעילויות מתאים לשלב סרטוט גרפים באמצעות תוכנות מחשב.

הגדרה

תהיינה $f(x), g(x)$ שתי פונקציות ממשיות עם תחומי הגדרה D, G בהתאמה. הפונקציה $g(f(x))$, אשר תחומה הוא $W = \{x \in D \mid f(x) \in G\}$ נקראת פונקציה מורכבת.

במילים אחרות, כדי לחשב את ערך הפונקציה המורכבת $g(f(x))$ מציבים תחילה את הארגומנט x בפונקציה $f(x)$, ואת ערך הפונקציה $f(x)$ מציבים כארגומנט בפונקציה g .

בדומה ניתן להגדיר, על בסיס אותן שתי פונקציות, פונקציה מורכבת $f(g(x))$ בתחום

$$M = \{x \in G \mid g(x) \in D\}$$

לפעולת היצירה של פונקציה מורכבת $g(f(x))$ או $f(g(x))$ קוראים הרכבת פונקציות f ו- g ומסמנים לפעמים $f \circ g$ או $g \circ f$ בהתאמה.

דוגמאות

1. נתבונן בפונקציות $f(x) = \sqrt{x}$ ו- $g(x) = x^2 + 1$, שתחומיהן בהתאמה $D = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ו- $G = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, כאשר $\mathbb{R}$ קבוצת כל המספרים הממשיים ו- $\mathbb{R}_+$ קבוצת כל המספרים הממשיים האי-שליליים.

ניתן ליצור שתי פונקציות מורכבות: $g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$ לכל $x \in D$, $f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$, לכל $x \in G$.

נציין כי הפונקציה $y = x + 1$ מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$, אבל כפונקציה מורכבת $g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$ היא מוגדרת רק בתחום $D = \mathbb{R}_+$.

2. הפונקציה $z(x) = \sin(x - 1)$ היא הרכבה של הפונקציות $g(x) = x - 1$ ו- $f(x) = \sin x$. קבוצת הערכים של הפונקציה g היא קבוצת כל המספרים הממשיים, והיא מתלכדת עם תחום ההגדרה של פונקציה f . לכן, התחום של הפונקציה המורכבת הוא כמו התחום של g , שהוא גם קבוצת כל המספרים הממשיים.

גם בדוגמה זו ניתן לראות את החשיבות של סדר הפונקציות בפעולת ההרכבה. בדרך כלל ההרכבה $g(f(x))$ אינה זהה להרכבה $f(g(x))$. כך בדוגמה הנוכחית: הפונקציה $f(g(x)) = \sin(x - 1)$ היא הזזה אופקית של פונקציית הסינוס, והפונקציה $g(f(x)) = \sin x - 1$ היא הזזה אנכית של פונקציית הסינוס.

3. נתבונן בפונקציות הבאות: $f(x) = 3x + 2$ ו- $g(x) = 2x - 7$. ההרכבות הן:
 $f(g(x)) = 3(2x - 7) + 2 = 6x - 19$ ו- $g(f(x)) = 2(3x + 2) - 7 = 6x - 3$
 מה משותף לשתי ההרכבות?

4. פונקציה מורכבת יכולה להיות בנויה ממספר סופי כלשהו של פונקציות מרכיבות. לדוגמה, הפונקציה $z(x) = \sin^2(2x)$ התקבלה מהרכבה של שלוש פונקציות: $z(x) = f[g(h(x))]$, כאשר $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ ו- $h(x) = 2x$.

5. ניתן גם לבצע הרכבה של פונקציה על עצמה ולא רק פעם אחת, אלא מספר פעמים. למשל, נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \sqrt{3x}$. נרשום את ההרכבות הבאות:

$$f(f(f(f(x)))) = x^{16}, f(f(f(x))) = (x^4)^2 = x^8, f(f(x)) = (x^2)^2 = x^4$$

$$g(g(g(x))) = \sqrt{3^4 27x} = \sqrt[8]{2187x}, g(g(x)) = \sqrt{3\sqrt{3x}} = \sqrt[4]{27x}$$

הרכבה של פונקציה על עצמה מאפיינת תהליכים דינמיים.

ניתן לראות חישוב של ריבית דריבית כהרכבה של פונקציה על עצמה:

$$f(x) = x \left(1 + \frac{p}{100} \right) \quad \text{חישוב הריבית לאחר תקופה אחת:}$$

$$f(f(x)) = \left(x \left(1 + \frac{p}{100} \right) \right) \left(1 + \frac{p}{100} \right) = x \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2 \quad \text{חישוב הריבית לאחר שתי תקופות:}$$

חישוב הריבית לאחר שלוש תקופות:

$$f(f(f(x))) = \left(x \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2 \right) \left(1 + \frac{p}{100} \right) = x \left(1 + \frac{p}{100} \right)^3$$

6. דוגמה מיוחדת של הרכבת פונקציה על עצמה היא הרכבה על עצמה של פונקציה שהפוכה לעצמה.

א. הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$ הפוכה לעצמה. הסבירו זאת בדרכים אחדות.

ב. הראו כי $f(f(x)) = x$.

ג. מצאו את הפונקציה $p(x) = f(f(x))$ לכל אחת מן הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = 1 - x \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x}{x-1}$$

פונקציה מורכבת ופעולות חשבון בפונקציות - מה מייחד את פעולת ההרכבה?

תלמידים לפעמים מתקשים, בעיקר במפגש הראשון עם פונקציה מורכבת, לזהות פונקציות מורכבות, להבחין בין לבין פונקציות אחרות, ולפרק פונקציה מורכבת לפונקציות המרכיבות אותה. מה מייחד את פעולת ההרכבה?

בפעולות חשבון כמו חיבור וכפל של פונקציות, מציאת ערך הפונקציה עבור משתנה נתון x , כוללת הצבה של x בכל אחת מן הפונקציות בנפרד. הפעולה הסופית מתבצעת בין שני ערכי הפונקציות המתקבלים בשלב הראשון.

בפעולת ההרכבה מציאת ערך הפונקציה עבור משתנה נתון x , מתבצעת בשני שלבים. בשלב הראשון מציבים את x בפונקציה הפנימית. בשלב השני מציבים כמשתנה בפונקציה החיצונית את ערך הפונקציה שהתקבל בשלב הראשון.

נתבונן לדוגמה בפונקציות $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$ ובפעולות ביניהן.

הטבלה הבאה מדגימה את ההבדל בין פעולת ההרכבה לבין פעולות חשבון בפונקציות, באמצעות תרשימי זרימה המתארים את תהליך החישוב של ערך הפונקציה, בכל אחת מן הפעולות. בכל הדוגמאות החישוב מודגם באמצעות הצבת 2 בפונקציה.

סכום פונקציות	מכפלת פונקציות	הרכבה	הרכבה
$f(x) + g(x)$	$f(x) \cdot g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$
$y = x^2 + 1 + \frac{1}{x}$	$y = (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x}$	$y = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1$	$y = \frac{1}{x^2 + 1}$

טבלה 1

התחום של פונקציה מורכבת

נתבונן בשתי הפונקציות: $f(x) = \sqrt{1-x}$ ו- $g(x) = 3 + \sqrt{x}$, ובפונקציה המורכבת

$$f(g(x)) = \sqrt{1 - (3 + \sqrt{x})} = \sqrt{-2 - \sqrt{x}}$$

קל לראות כי תחום זה הוא קבוצה ריקה כי $-2 - \sqrt{x} < 0$ לכל $x \geq 0$.

מכאן נובע שהפונקציה $f(g(x))$ אינה קיימת.

מהו אפוא התנאי לקיומה של פונקציה מורכבת $f(g(x))$?

פונקציה מורכבת $f(g(x))$ קיימת אם ורק אם קבוצת הערכים של הפונקציה g מכילה לפחות איבר אחד השייך לתחום ההגדרה של הפונקציה f , כלומר, אם ורק אם המשותף של שתי קבוצות אלה אינו ריק.

במקרה שלנו, תחום ההגדרה של פונקציה $f(x) = \sqrt{1-x}$ הוא: $x \leq 1$ וקבוצת הערכים של פונקציה

$g(x) = 3 + \sqrt{x}$, היא: $x \geq 3$. לא קיים אף ערך של x המקיים את המערכת: $x \leq 1$ וגם $x \geq 3$,

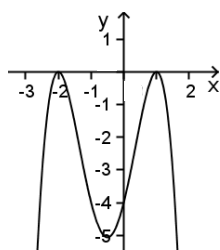
לכן הפונקציה $f(g(x))$ אינה קיימת.

משימות

1. הביאו דוגמה לפונקציה מורכבת שתחום ההגדרה שלה מכיל איבר אחד בלבד, למרות שתחומי ההגדרה של הפונקציות המרכיבות אותה הם קבוצות אינסופיות.
2. הביאו דוגמה לפונקציה מורכבת שתחום ההגדרה שלה מכיל שני איברים בלבד, למרות שתחומי ההגדרה של הפונקציות המרכיבות אותה הם קבוצות אינסופיות.
3. הביאו דוגמה לפונקציה $f(x)$ עבורה לא קיימת הפונקציה $f(f(x))$.

פתרונות

1. תחומי ההגדרה של הפונקציות: $g(x) = \sqrt{x}$ ו- $f(x) = -|x-2|$ הם קבוצות אינסופיות. לעומת זאת תחום ההגדרה של הפונקציה המורכבת $g(f(x)) = \sqrt{-|x-2|}$ מכיל איבר אחד בלבד $x = 2$ (הסבירו מדוע).



איור 1

2. נתבונן בפונקציות $g(x) = \sqrt{x}$ ובפונקציה $f(x)$ אשר הגרף שלה מוצג באיור 1. קבוצת הערכים של f , היא קבוצת כל המספרים האי-חיוביים $\mathbb{R}_-$, ותחום הפונקציה g הוא קבוצת המספרים האי-שליליים $\mathbb{R}_+$. לשתי הקבוצות איבר משותף אחד 0. הערך $f(x) = 0$ מתקבל עבור שני ערכי x : $x = -2$ ו- $x = 1$, ומכאן שתחום הפונקציה $g(f(x))$ הוא $\{-2, 1\}$.

3. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = -\sqrt{x} - 1$ הוא $x \geq 0$. פונקציה זו מקבלת ערכים שליליים בלבד מכאן שלא קיימת הפונקציה $f(f(x))$.

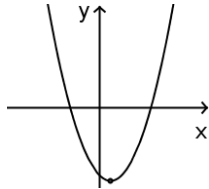
פונקציה מורכבת – רגע לפני הנגזרת

חקירת קשרים בין הפונקציה המורכבת לפונקציות המרכיבות אותה ללא שימוש בנגזרת

המטרה של סדרת פעילויות זו היא להתבונן בקשרים בין הפונקציה המורכבת לבין הפונקציות המרכיבות אותה, ולשקול שיקולים באמצעות מושגי יסוד הקשורים בפונקציות, וללא שימוש בנגזרת.

פעילות 1: מגרף הפונקציה לגרף הפונקציה המורכבת

בסרטוט נתון גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - x - 3$.

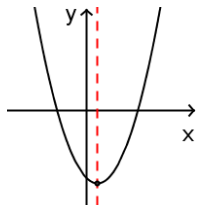


איור 2

1. סרטוט באופן סכמתי את הגרפים של הפונקציות הבאות ללא טבלת ערכים:

א. $y = \sqrt{f(x)}$ ב. $y = 2f(x)$ ג. $y = (f(x))^3$.

2. גרף הפונקציה f סימטרי ביחס לישר $x = 0.5$. האם תכונה זו נשמרת גם אצל שלוש הפונקציות האחרות של סעיף 1? הסבירו. (מה כולל הסבר לשאלה מסוג זה? האם העובדה שבתחום שסרטוטנו, או בתחום המשתקף על צג המחשב, גרף הפונקציה סימטרי ביחס לישר $x = 0.5$ היא הצדקה מספיקה?)

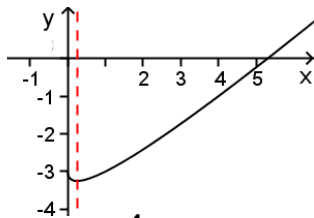


איור 3

3. האם הגרף של כל פונקציה מורכבת שהפונקציה הפנימית שלה היא $f(x) = x^2 - x - 3$ סימטרי ביחס לישר $x = 0.5$? הסבירו.

4. נהפוך את כיוון ההרכבה כך שהפעם הפונקציה $f(x) = x^2 - x - 3$ היא פונקציה חיצונית.

איור 4 מציג את גרף הפונקציה $k(x) = (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 3$.



איור 4

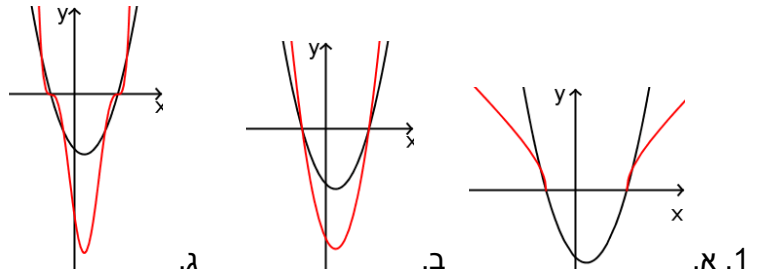
מצאו, ללא שימוש בנגזרת, את שיעורי נקודת הקיצון. הסבירו כיצד קבעתם את שיעור ה- x וכיצד קבעתם את שיעור ה- y .



5. א. ערכו רשימה של מרכיבי ידע הבאים לידי ביטוי בסעיפים 1-4. בחרו לפחות שלושה מרכיבי ידע מהרשימה שערכתם, וחברו משימות קלות יותר לתלמידים בהן באים לידי ביטוי מרכיבי ידע אלה.

ב. בחרו לפחות שלושה מרכיבי ידע מהרשימה שערכתם, וחברו משימות מאתגרות יותר לתלמידים, בהן באים לידי ביטוי מרכיבי ידע אלה.

מבחר תשובות

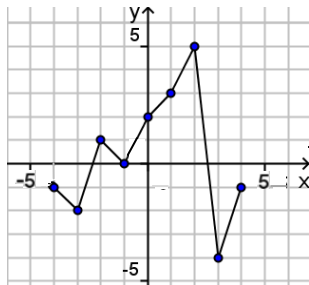


2. תכונת הסימטריה נשמרת. בגלל הסימטריה מתקיים לכל x $f(0.5+x) = f(0.5-x)$. לכן לכל x מתקיים גם $\sqrt{f(0.5+x)} = \sqrt{f(0.5-x)}$, $2f(0.5+x) = 2f(0.5-x)$ ו- $(f(0.5+x))^3 = (f(0.5-x))^3$.

3. כן. תהי $g(x^2 - 2x - 3)$ פונקציה מורכבת. בגלל הסימטריה של f מתקיים לכל x $f(0.5+x) = f(0.5-x)$. לפיכך מתקיים גם $g(f(0.5+x)) = g(f(0.5-x))$.

4. נקודת המינימום $(0.25, -3.25)$. נקודת המינימום של הפונקציה החיצונית $f(x) = x^2 - x - 3$ היא $(0.5, -3.25)$. שיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה $k(x) = (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 3$ צריך לקיים $\sqrt{x} = 0.5$, ומכאן $x = 0.25$.

שיעור ה- y של נקודת המינימום של הפונקציה $k(x) = (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 3$ הוא -3.25 כמו שיעור ה- y המינימלי של הפונקציה החיצונית.



איור 5

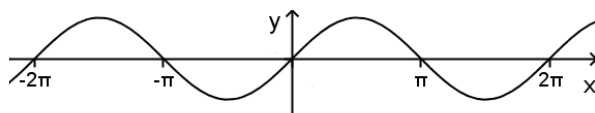
פעילות 2: הפונקציות $|f(x)|$ ו- $f(|x|)$

1. הפונקציה f המוגדרת בתחום $-4 \leq x \leq 4$ נתונה באמצעות הגרף באיור 5. סרטנו את גרף הפונקציה $|f(x)|$ ואת גרף הפונקציה $f(|x|)$.

2. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$ (איור 6). סרטנו

את הגרפים של הפונקציות $f(x) = |\sin x|$

ו- $f(x) = \sin(|x|)$.



איור 6

3. סרטנו את גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 3$ יחד עם

הגרפים של הפונקציות $|f(x)|$ ו- $f(|x|)$. איזו תופעה מודגמת כאן?

4. האם נכון ש...?

אם כן – הסבירו מדוע.

אם לא – הביאו דוגמה נגדית.

א. פונקציה $|f(x)|$ היא תמיד פונקציה זוגית.

ב. פונקציה $f(|x|)$ היא תמיד פונקציה זוגית.

ג. הגרף $y = |f(x)|$ עובר תמיד דרך ראשית הצירים.

ד. הגרף $y = f(|x|)$ עובר תמיד דרך ראשית הצירים.

ה. כל ערכי הפונקציה $|f(x)|$ הם אי-שליליים.

ו. כל ערכי הפונקציה $f(|x|)$ הם אי-שליליים.



חברו תרגילים נוספים ברוח התרגילים במשימה זו וציינו מה ניתן להדגיש בעזרתם.

הערות

- סדרת המשימות "פונקציה מורכבת – רגע לפני הנגזרת" מחייבת לעשות שיקולים הקשורים לפונקציה מורכבת באמצעות מושגי יסוד בנושא של פונקציות, וללא שימוש בנגזרת. שילוב של משימות מסוג זה לעתים תכופות ובהקשרים שונים, מחזק את ההבנה של מושגי יסוד כגון עלייה, ירידה, נקודות קיצון, ומאיר עליהם בכל פעם מזווית אחרת.
- אפשר וכדאי לחזור אל שאלות דומות גם אחרי ההיכרות עם הנגזרת של פונקציה מורכבת, ולנמק את המסקנות בשתי דרכים – באמצעות הנגזרת ובאמצעות שיקולים אחרים.
- משפחת הפונקציות הדו-ריבועיות אף היא משפחה של פונקציות מורכבות. ניתן לשלב את המשימות בנושא זה המוצגות בפרק "רגע לפני הנגזרת" בהוראת הפונקציה המורכבת.

נגזרת של פונקציה מורכבת

משפט

אם פונקציה $u(x)$ גזירה בנקודה x ופונקציה $v(u)$ גזירה בנקודה $u(x)$, אזי הפונקציה המורכבת $f(x) = v(u(x))$ גזירה בנקודה x ומתקיים: $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$.

הוכחה

יהיו Δx תוספת ל- x , ו- Δu , Δv תוספות לפונקציות $u(x)$ ו- $v(u)$ בהתאמה, כלומר:

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$$

$$\Delta v = v(u + \Delta u) - v(u)$$

נציין כי הפונקציה $u(x)$, בהיותה גזירה בנקודה x , רציפה בנקודה זו, ולכן $\Delta u \rightarrow 0$ כאשר $\Delta x \rightarrow 0$. לפי-כך, על-פי הגדרת הנגזרת והמשפט על גבול של מכפלת פונקציות מקבילים:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = v'(u) \cdot u'(x)$$

ובכך הוכחה טענת המשפט.

הערה 1

הכלל הנ"ל למציאת הנגזרת של פונקציה מורכבת נקרא "כלל השרשרת" כיוון שמתבצעת שרשרת של פעולות גזירה.

דוגמה

תהי $f(x) = \sin(x^2)$. פונקציה זו היא הרכבת שתי פונקציות: $u(x) = x^2$ ו- $v(u) = \sin u$. לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = (\sin u)' \cdot (x^2)' = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2)$$

הערה 2

את כלל השרשרת ניתן בקלות להכליל למספר כלשהו של מרכיבי הפונקציה המורכבת. למשל, אם $f(x) = w(v(u(x)))$ אז $f'(x) = w'(v) \cdot v'(u) \cdot u'(x)$.

דוגמה

תהי $f(x) = \sin(e^{x^2})$. פונקציה זו היא הרכבת שלוש פונקציות: $u(x) = x^2$, $v(u) = e^u$ ו- $w(v) = \sin v$. לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = w'(v) \cdot v'(u) \cdot u'(x) = (\cos v) \cdot e^u \cdot 2x = 2xe^{x^2} \cdot \cos(e^{x^2})$$

הערות דידקטיות

- אחד הקשיים של תלמידים, בעיקר בשלבים הראשונים של העיסוק בפונקציה מורכבת, כרוך בזיהוי פונקציות מורכבות, ובזיהוי הפונקציה הפנימית והפונקציה החיצונית. לכן חשוב לתרגל זאת בכתב וגם בעל פה. התרגול צריך לכלול גם זיהוי של פונקציה מורכבת המופיעה כמחובר בתוך סכום, כגורם במכפלה, כמונה או מכנה של שבר וכו'. למשל, כל אחד מהביטויים להלן מכיל פונקציה מורכבת:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}, \quad x^3 \cdot (2x-15)^2, \quad x^3 + \sqrt{7x+5}$$

- הטיפול בפונקציות מורכבות ובנגזרותיהן נמשך לאורך לימודי האנליזה תוך כדי המפגש עם משפחות שונות של פונקציות. בכל פעם כשחוזרים לחקור פונקציות מורכבות, תוך כדי ההוראה של משפחות פונקציות נוספות, כדאי לעסוק בקשר שבין הפונקציה המורכבת לפונקציות המרכיבות אותה משתי נקודות מבט: לפעמים יש לשער איך תיראה הפונקציה המורכבת על בסיס היכרותנו עם הפונקציות המרכיבות אותה, ולבדוק את השערותינו באמצעות הכלים של החשבון הדיפרנציאלי, ולפעמים כדאי להתחיל בחקירת הפונקציה המורכבת בכלים של החשבון הדיפרנציאלי, ובסוף התהליך לשאול את התלמידים מה יכלו לדעת לפני החקירה בעזרת נגזרות.
- טיפול בפונקציות מורכבות כאשר לפחות אחת הפונקציות המרכיבות, הפנימית או החיצונית, נתונה בייצוג גרפי ללא תבנית, מאפשר לדון בקשר בין הפונקציה המורכבת לפונקציות המרכיבות. למרות שהתבניות אינן נתונות הדיון מתבסס לפעמים על נגזרת הפונקציה.

ארגון הכתיבה בגזירה של פונקציה מורכבת

בדוגמה הבאה מוצגת דרך לארגן את הכתיבה של הפונקציות המרכיבות ונגזרותיהן לקראת כתיבת הנגזרת של הפונקציה המורכבת. לחלק מהתלמידים נוח לרשום כך את הפונקציות גם לאחר שצברו ניסיון בעבודה עם פונקציות מורכבות ובגזירתן.

נתונה הפונקציה $y = (2x - 1)^3$. נראה אותה כפונקציה מורכבת, נרשום את הפונקציות המרכיבות ונגזור אותן.

$$u(x) = 2x - 1 \Rightarrow u'(x) = 2$$

$$v(u) = u^3 \Rightarrow v'(u) = 3u^2 = 3(2x - 1)^2$$

$$y' = v'(u) \cdot u'(x) = 3(2x - 1)^2 \cdot 2 = 6(2x - 1)^2 \quad \text{לכן:}$$

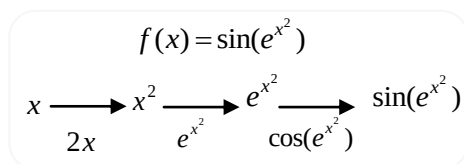
הערה: גזירת הפונקציה הנתונה גם כפונקציית פולינום נותנת בידי התלמיד כלי בקרה:

$$y = (2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

מכאן, על-ידי גזירת פונקציית פולינום, מקבלים: $y' = 24x^2 - 24x + 6$.

פישוט מראה שבשתי הדרכים התקבלה אותה התוצאה.

לחלק מהתלמידים נוח להיעזר בתרשים של הפונקציות המרכיבות. איור 7 מדגים תרשים לגזירת הפונקציה $f(x) = \sin(e^{x^2})$.



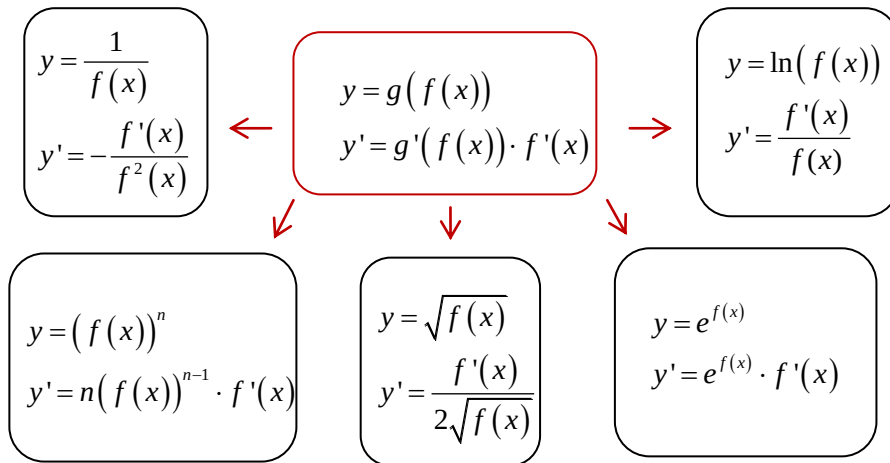
איור 7

יתרונם של התרשים בכך שהוא תומך בתפיסת הפונקציה המורכבת כשרשרת של פונקציות המופעלות בזו אחר זו על ערך הפונקציה שהתקבל בשלב הקודם.

חלק מהתלמידים, לאחר שצברו ניסיון בגזירת פונקציות מורכבות, מעדיפים לרשום את הנגזרת ללא שלבי ביניים.

נוסחאות שימושיות של נגזרת הפונקציה המורכבת במקרים פרטיים

חוקים והכללות מאפשרים לנו להחזיק מידע "ארוז", שאפשר ליישמו במקרים רבים. יחד עם זאת במקרים רבים נוח לעשות שימוש בנוסחאות המתייחסות למקרים פרטיים.



איור 8

איור 8 מציג מקרים פרטיים שימושיים של נגזרת הפונקציה המורכבת. לחלק מהתלמידים נוח יותר לזכור את הנוסחאות לנגזרות במקרים הפרטיים, מאשר ליישם את נגזרת הפונקציה המורכבת במקרה הכללי. השימוש בחוקי הנגזרת במקרים הפרטיים אף זורע זרעים לקראת זיהוי של נגזרת פונקציה מורכבת כאשר מחפשים פונקציה קדומה.

מהגרפים של הפונקציות המרכיבות אל גרף הפונקציה המורכבת

פעילות 3: שתי נקודות מבט על הפונקציה ההופכית $\frac{1}{f(x)}$

$$1. \text{ נתונה הפונקציה } y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$$

מצאו תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון של הפונקציה.

פתרון א: בעזרת שיקולים המבוססים על נגזרת הפונקציה

$$\text{נסמן: } f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$y' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{2x - 4}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 2$$

תחום הפונקציה $x \neq 1, 3$.

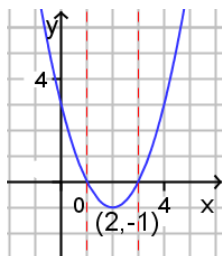
מונה הנגזרת חיובי כאשר $x > 2$ ושילי כאשר $x < 2$ (בתחום ההגדרה).

מכנה הנגזרת חיובי בכל תחום ההגדרה, ולכן סימן הנגזרת מנוגד לסימן המונה.

תחומי הירידה: $2 < x < 3$, $3 < x$.

תחומי העלייה: $1 < x < 2$, $x < 1$.

כאשר $x = 2$ הפונקציה עוברת מעלייה לירידה. הנקודה $(2, -1)$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה.



איור 9

פתרון ב: מבוסס על שיקולים הקשורים לתכונות הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 3$

נסרטט את הפרבולה (איור 9). $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

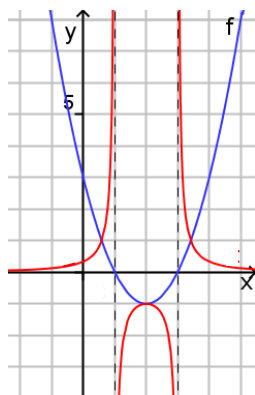
נוסיף קווים מרוסקים בנקודות האי-הגדרה. נבחן את תכונות הפונקציה $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ בארבעה תחומים חלקיים, בהתאם לתחומי העלייה והירידה ולתחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה f שבמכנה. התכונות מוצגות בטבלה 2.

התחום	ניתוח תכונות
$3 < x$	f חיובית ועולה ולכן $\frac{1}{f}$ חיובית ויורדת. בפרט, כאשר ערכי f קרובים מאוד לאפס, ערכי $\frac{1}{f}$ גדולים מאוד. כאשר ערכי f גדולים מאוד, ערכי $\frac{1}{f}$ קרובים מאוד לאפס.
$2 < x < 3$	f שלילית ועולה ולכן $\frac{1}{f}$ שלילית ויורדת. בפרט, כאשר ערכי f קרובים מאוד לאפס, ערכי $\frac{1}{f}$ גדולים מאוד בערכם המוחלט.
$1 < x < 2$	f שלילית ויורדת ולכן $\frac{1}{f}$ שלילית ועולה, בפרט, כאשר ערכי f קרובים מאוד לאפס, ערכי $\frac{1}{f}$ גדולים מאוד בערכם המוחלט.
$x < 1$	f חיובית ויורדת ולכן $\frac{1}{f}$ חיובית ועולה. בפרט, כאשר ערכי f קרובים מאוד לאפס, ערכי $\frac{1}{f}$ גדולים מאוד. כאשר ערכי f גדולים מאוד ערכי $\frac{1}{f}$ קרובים מאוד לאפס.
ל- f מינימום כאשר $x = 2$, ולכן ל- $\frac{1}{f}$ מקסימום כאשר $x = 2$. ערך הפונקציה $\frac{1}{f}$ בנקודת המקסימום, הוא המספר ההופכי של ערך הפונקציה f בנקודת המינימום.	

טבלה 2

איור 10 מציג זה לצד זה את גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ואת הגרף של הפונקציה ההופכית לה

$$y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$$



איור 10



שאלות למחשבה

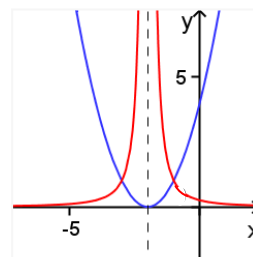
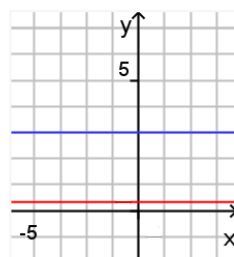
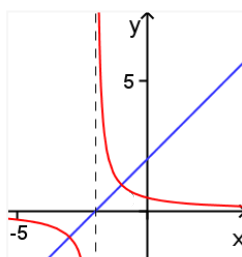
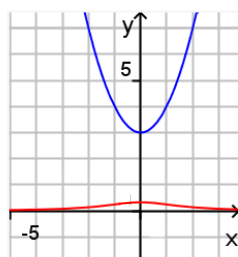
- האם תוכלו להציע דרכים נוספות לחקירת הפונקציה $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$?
- מהם היתרונות והחסרונות של הדרכים שהוצגו ושל דרך הפתרון שלכם?
- מהו הידע הדרוש לתלמידים על מנת להבין את כל אחת מדרכי הפתרון שהוצגו?
- מהם הזרעים הנזרעים בכל אחת מדרכי הפתרון לקראת המשך לימודי האנליזה?

הערות

את הקשר בין פונקציה f לבין הפונקציה ההופכית שלה $\frac{1}{f}$ כדאי לבסס באמצעות מגוון של פונקציות, במגוון

וואריאציות.

הפונקציה f יכולה להיות נתונה באמצעות נוסחה או גרף. גרף הפונקציה יכול להיות נתון במערכת צירים שבה נראים קווי הסריג או ללא קווים אלה.

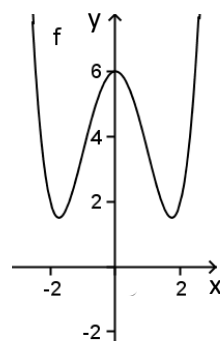


איור 11

פעילות 4: עוד על קשרים בין נקודות מיוחדות של הפונקציה הפנימית לבין נקודות מיוחדות של הפונקציה המורכבת

לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6$.

לפונקציה זו יש נקודת מקסימום $x=0$, שתי נקודות מינימום: $x=\sqrt{3}$ ו- $x=-\sqrt{3}$, ושתי נקודות פיתול $x=1$ ו- $x=-1$.



איור 12

1. באמצעות גרף הפונקציה בלבד סרטטו גרף סכמתי של הפונקציה

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6}$$

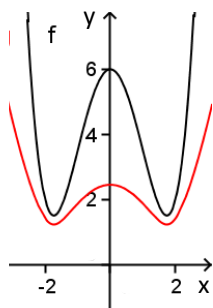
2. שערו, ללא שימוש בנגזרת, האם נקודות הקיצון של הפונקציה g מתקבלות עבור אותם ערכי x כמו נקודות הקיצון של הפונקציה f ?

3. שערן, ללא שימוש בנגזרת, האם נקודות הפיתול של הפונקציה g מתקבלות עבור אותם ערכי x כמו נקודות הפיתול של הפונקציה f ?

4. בדקו את תשובותיכם בסעיפים ב ו- ג באמצעות נגזרות הפונקציה. (ניסיון לאפס את הנגזרת השנייה מוביל למשוואה ממעלה שלישית שאינה נפתרת באמצעות הוצאת גורם משותף או חיפוש פתרונות פשוטים. נסו לענות על השאלה בדרך עוקפת.)

פתרון

איור 13 מציג את שני הגרפים במערכת צירים אחת.



איור 13

1. כיוון שפונקציית השורש היא פונקציה עולה, ניתן לדעת גם ללא שימוש בנגזרת שתחומי העלייה והירידה של הפונקציה המורכבת זהים לתחומי העלייה והירידה של הפונקציה שבתוך השורש. מכאן ניתן להסיק שנקודות הקיצון של שתי הפונקציות מתקבלות עבור אותם ערכי x .

2. בנקודת המקסימום הפונקציה קעורה כלפי מטה ובנקודות המינימום היא קעורה כלפי מעלה. כיוון שהפונקציה רציפה, מעבר בין סוגי קעירות חייב להתרחש בנקודת פיתול של הפונקציה. מכאן יכולה לעלות השערה שנקודות הפיתול של הפונקציה g מתקבלות עבור אותם ערכי x כמו נקודות הפיתול של הפונקציה f . בהמשך נראה כי השערה זו אינה נכונה.

3. נחשב את הנגזרת של $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{2x^3 - 6x}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6}} = \frac{x^3 - 3x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6}}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ ו- $x = -\sqrt{3}$. בדיקה נוספת מגלה כי כאשר $x = 0$ גם לפונקציה g יש מקסימום, ובשתי הנקודות האחרות יש לה מינימום, כמו לפונקציה f .

$$g''(x) = \frac{(3x^2 - 3)\sqrt{\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6} - (x^3 - 3x)\frac{x^3 - 3x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6}}}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6}\right)^2}$$

הנגזרת השנייה של g היא:

המשוואה למציאת נקודות האפס של $g''(x)$ היא:

$$g''(x) = 0 \Rightarrow (3x^2 - 3)\sqrt{\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6} - (x^3 - 3x)\frac{x^3 - 3x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6}} = 0$$

אחרי כפל של שני אגפי המשוואה במכנה של השבר ופישוט, מקבלים:

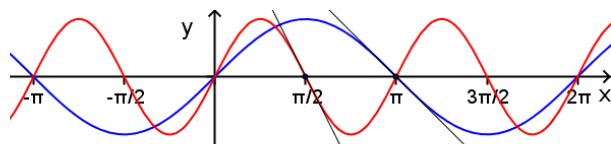
$$(3x^2 - 3)\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6\right) - (x^3 - 3x)^2 = 0$$

מתקבלת משוואה ממעלה ששית, אשר על-ידי ההצבה $x^2 = t$ ופישוט מובאת למשוואה ממעלה שלישית:

$$t^3 - 9t^2 + 36t - 36 = 0$$

אם כי קיימות נוסחאות לפתרון אלגברי של משוואה ממעלה שלישית, ניתן לענות על השאלה שבמשימה בדרך עוקפת: בדיקה ישירה מוכיחה כי $t=1$ אינו שורש של המשוואה לעיל. מכאן נובע כי הנגזרת השנייה אינה מתאפסת בנקודות $x = \pm 1$. לפונקציה אשר גזירה פעמיים, נקודת פיתול היא בהכרח נקודת אפס של הנגזרת השנייה. מכאן אפשר להסיק כי נקודות הפיתול של הפונקציה g אינן מתקבלות עבור אותם ערכי x כמו נקודות הפיתול של הפונקציה f .

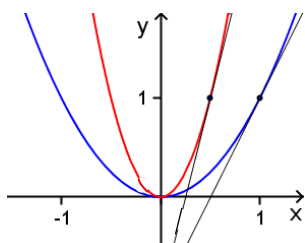
פעילות 5: טרנספורמציות לינאריות של פונקציות כפונקציות מורכבות – המקרה של כיווץ אופקי



איור 14

1. באיור 14 מופיעים גרף הפונקציה $f(x) = \sin(x)$ (בכחול), וגרף הפונקציה $g(x) = \sin(2x)$, שהתקבלה מהפונקציה f באמצעות הטרנספורמציה $g(x) = f(2x)$ (באדום), שהיא כיווץ פי 2 לאורך ציר x .

הנקודה $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ על הגרף האדום התקבלה מהנקודה $(\pi, 0)$ שעל הגרף הכחול, באמצעות הטרנספורמציה $g(x) = f(2x)$. חשבו את שיפועי המשיקים לגרפים בנקודות אלה. מה הקשר בין המשיקים? כיצד ניתן להסביר אותו? הדגינו את הקשר באמצעות זוג נוסף של נקודות. כדי להתייחס אל g כפונקציה מורכבת אפשר לרשום $g(x) = f(u(x))$, $u(x) = 2x$.

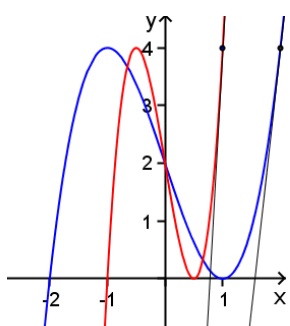


איור 15

2. באיור 15 מופיעים גרף הפונקציה $f(x) = x^2$ (בכחול), וגרף הפונקציה $g(x) = (2x)^2$, שהתקבלה מהפונקציה f באמצעות הטרנספורמציה $g(x) = f(2x)$ (באדום).

הנקודה $(0.5, 1)$ שעל הגרף האדום התקבלה מהנקודה $(1, 1)$ שעל הגרף הכחול באמצעות הטרנספורמציה $g(x) = f(2x)$. חשבו את שיפועי המשיקים לגרפים בנקודות אלה. מה הקשר בין המשיקים?

3. באיור 16 מופיעים גרף של פונקציה f (בכחול), וגרף של פונקציה g , שהתקבלה מהפונקציה f באמצעות הטרנספורמציה $g(x) = f(2x)$ (באדום). באיור מופיעים המשיק לגרף פונקציה f בנקודה $(2, 4)$, והמשיק לגרף פונקציה g בנקודה $(1, 4)$.



איור 16

מה הקשר בין השיפועים של שני המשיקים המופיעים באיור? הסבירו את הקשר גם באמצעות טרנספורמצית הכיווץ וגם באמצעות הנגזרת של פונקציה מורכבת.

4. אחת המטרות של סדרת המשימות בפעילות זו היא להסביר את הנגזרת של הפונקציה המורכבת $g(x) = f(2x)$ באמצעות התבוננות בטרנספורמצית הכיווץ של הפונקציה $f(x)$ אשר הכפילה את שיפועיה. בטרנספורמציה זו כל נקודה $B(x, y)$ על גרף הפונקציה g מתאימה לנקודה $A(2x, y)$ על גרף הפונקציה f . שיפוע המשיק בנקודה B כפול משיפוע המשיק בנקודה A . עובדה זו משתקפת

$$\text{בנוסחה לנגזרת של הפונקציה המורכבת } g(x) = f\left(\frac{2x}{u}\right)$$

$$g'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = 2f'(u)$$

לפי נוסחה זו כדי לחשב את ערך הנגזרת של g בנקודה x (ההיטל של B על ציר x), יש לכפול ב-2 את ערך הנגזרת של f בנקודה $u = 2x$ (ההיטל של A על ציר x).

בחרו טרנספורמציה ליניארית אחרת ובנו סדרת משימות שמאירות את הקשר בין הפונקציה המקורית לפונקציה שהתקבלה לאחר הטרנספורמציה באמצעות הנגזרת של פונקציה מורכבת.

הערה

השימוש בפונקציה $f(x) = x^2$ להדגמת טרנספורמציות הכיווץ יתרונו בכך שהפונקציה פשוטה ומוכרת. לשימוש בפונקציה זו גם חסרונות. אחד מהם: קל לפשט את הפונקציה $g(x) = (2x)^2$ ולהתייחס לפונקציה $f(x) = 4x^2$ שהמבנה החיצוני שלה אינו מעיד על טרנספורמציות הכיווץ.

נגזרת של פונקציה הפוכה דרך כלל השרשרת

בפרק הקודם עסקנו בפונקציה הפוכה.

נציג כאן הוכחה נוספת לנגזרת של פונקציה הפוכה, באמצעות הנגזרת של פונקציה מורכבת.

אחד מהקשרים בין פונקציה $f(x)$ וההפוכה לה $g(x) = f^{-1}(x)$ הוא: $f(g(x)) = x$ לכל x בתחום הפונקציה המורכבת.

נגזור את הפונקציות שבשני אגפי השוויון $f(g(x)) = x$, כאשר באגף שמאל נמצאת פונקציה מורכבת שאותה נגזור על-ידי כלל השרשרת:

$$(f(g(x)))' = (x)' \Rightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

מכאן נרשום את הנגזרת של הפונקציה g :

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad (*)$$

הערה

השימוש בכלל השרשרת למציאת הנגזרת של פונקציה מורכבת $f(g(x))$ מותר רק בתנאי ששתי הנגזרות $g'(x)$ ו- $f'(g(x))$ קיימות. בפרק "הפונקציה ההפוכה" הוכח כי קיום של אחת מהנגזרות האלה השונה מ-0 גורר את קיומה של השנייה. לכן הנוסחה (*) תקפה בהנחה זו.

דוגמה

נתונה פונקציה $f(x) = x^3 - 1$ מצאו את הנגזרת של הפונקציה ההפוכה $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

פתרון

נגיע אליו בשתי דרכים:

דרך א: הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x) = 3x^2$. על-פי הנוסחה (*) שלעיל מקבלים:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{3 \cdot (\sqrt[3]{x+1})^2} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

כאשר $x \neq -1$

דרך ב: נמצא $g'(x)$ על-ידי גזירה ישירה של הפונקציה $g(x)$:

$$g'(x) = (\sqrt[3]{x+1})' = \frac{1}{3} \cdot (x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

הנגזרת קיימת עבור כל $x \neq -1$.

כצפוי, בשתי הדרכים התקבלה אותה התוצאה.

השפעת תכונותיהן של הפונקציות המרכיבות על התכונות של פונקציה מורכבת

בפעילויות הקודמות ראינו כי ניתן להסיק תכונות רבות של פונקציה מורכבת מתוך תכונות הפונקציות המרכיבות אותה. הפעילויות הבאות מאורגנות על-פי תכונות של פונקציות.

רציפות

האם ההרכבה של שתי פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה?

כדי לבדוק את התשובה לשאלה, נניח כי עבור שתי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, המוגדרות כל אחת בתחום שלה, קיימת פונקציה מורכבת $h(x) = f(g(x))$ המוגדרת בתחום לא ריק D . ניזכר, כי D הוא אותו חלק של תחום הפונקציה הפנימית g בה ערכיה שייכים לתחום הפונקציה החיצונית f .

נניח ש- $g(x)$ רציפה בנקודה $x = x_0 \in D$, ו- $f(x)$ רציפה בנקודה $x = g(x_0)$. אז על-פי ההגדרה של רציפות פונקציה בנקודה מקבלים:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(g(x_0)) = h(x_0)$$

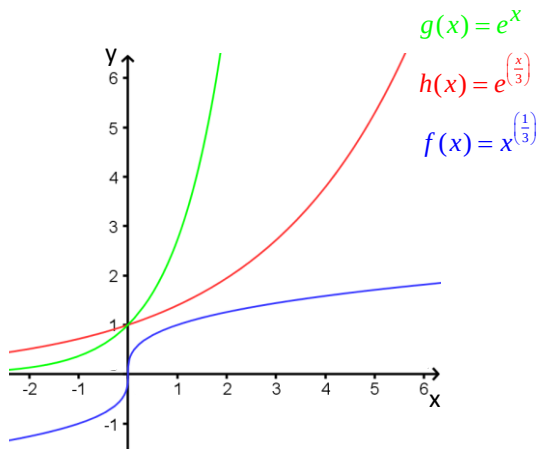
כלומר, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0)$ ומכאן, שוב על-פי ההגדרה של רציפות פונקציה בנקודה, נובע כי הפונקציה המורכבת

$$h(x) = f(g(x)) \text{ רציפה בנקודה } x = x_0.$$

בכך הוכח כי פונקציה מורכבת שנוצרת מהרכבה של שתי פונקציות רציפות (כל אחת בתחומה) היא פונקציה רציפה בתחומה.

עלייה וירידה

פעילות 6: הרכבה של פונקציות מונוטוניות



איור 17

1. באיור 17 מופיעים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ו- $g(x) = e^x$.

שתיים מונוטוניות עולות בכל התחום של מספרים ממשיים. הפונקציה המורכבת

$$h(x) = f(g(x)) = \sqrt[3]{e^x}$$

זה מקרי?

הערה

ניזכר כי אם אומרים שפונקציה ממשית עולה/יורדת **ללא ציון של תחום**, אז פירוש הדבר הוא שהיא עולה/יורדת בכל תחום הגדרתה.

2. הביאו דוגמה לשתי פונקציות נוספות עולות, שניתן ליצור מהן לפחות פונקציה מורכבת אחת. האם הפונקציה המורכבת גם היא פונקציה עולה?

3. הביאו דוגמה לשתי פונקציות יורדות, שניתן ליצור מהן לפחות פונקציה מורכבת אחת. מה ניתן לומר על המונוטוניות של הפונקציה המורכבת? האם זה מקרי?

4. נוכיח בשתי דרכים את הטענה:

אם הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ שתיים פונקציות עולות, אז הפונקציה המורכבת שלהן $h(x) = f(g(x))$ גם היא פונקציה עולה.

הוכחה א

ניקח שתי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, שכל אחת מהן עולה, בתחומה. עלינו להוכיח כי לכל שתי נקודות $x_1 < x_2$ בתחום הפונקציה המורכבת $f(g(x))$ מתקיים: $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$.

אם הנקודות x_1, x_2 שייכות לתחום ההגדרה של הפונקציה המורכבת $f(g(x))$ הן שייכות גם לתחום הפונקציה הפנימית g , והערכים $g(x_1), g(x_2)$ שייכים לתחום הפונקציה החיצונית f .

מכאן, תוך התבססות על ההגדרה של פונקציה עולה, נובע:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2))$$

על סמך העלייה של
הפונקציה g

על סמך העלייה של
הפונקציה f

בכך הוכח כי הפונקציה המורכבת היא פונקציה עולה.

הוכחה ב

הוכחה זו מתבססת על נגזרת הפונקציה המורכבת ולכן היא תקפה רק לפונקציות גזירות. אם f פונקציה עולה וגזירה בכל תחומה, אז הנגזרת שלה f' חיובית בכל התחום. אם גם g פונקציה עולה וגזירה בכל תחומה, אז גם הנגזרת שלה g' חיובית בכל התחום.

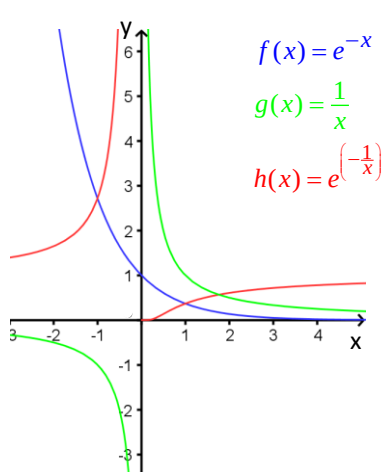
ומכאן: $f'(g(x)) \cdot g'(x) > 0$ בכל נקודה x בתחום של הפונקציה $f(g(x))$. מכאן, הפונקציה המורכבת היא פונקציה עולה.

הערה: יתרונה של ההוכחה הראשונה הוא שהיא אינה מוגבלת לפונקציות גזירות.

הטענה הבאה יכולה להראות מפתיעה במבט הראשון. הוכיחו אותה באופן דומה להוכחה דלעיל.

אם הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ שתיהן פונקציות יורדות, אז הפונקציה המורכבת שלהן $h(x) = f(g(x))$ היא פונקציה עולה.

דוגמה



איור 18

באיור 18 מתוארים גרפים של שלוש פונקציות: $y = e^{-x}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = e^{-x}$.

הפונקציה $f(x) = e^{-x}$ יורדת בכל התחום $-\infty < x < \infty$, הפונקציה

$g(x) = \frac{1}{x}$ יורדת בכל אחד מהתחומים $x < 0$ ו- $x > 0$, והפונקציה המורכבת

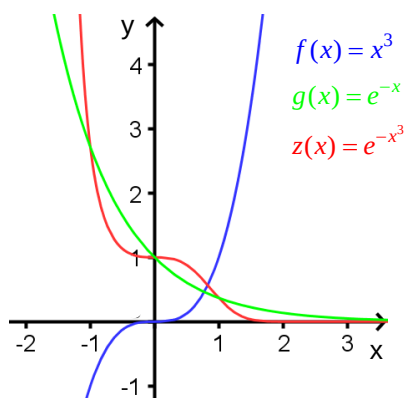
$h(x) = f(g(x)) = e^{-\frac{1}{x}}$ עולה בכל אחד מהתחומים $x < 0$, $x > 0$.

באיורים 19, 20 מתוארים גרפים של שתי פונקציות: הפונקציה העולה

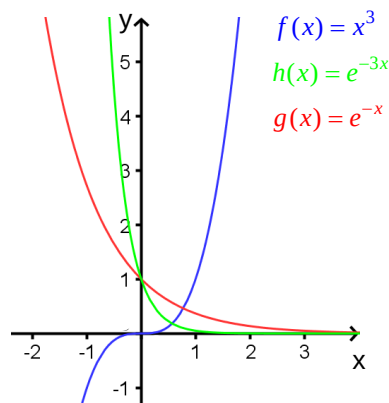
$f(x) = x^3$ והפונקציה היורדת $g(x) = e^{-x}$. הפונקציות המורכבות הן

$h(x) = f(g(x)) = e^{-3x}$ ו- $z(x) = g(f(x)) = e^{-x^3}$ ושתיהן פונקציות יורדות

(ראו את e^{-3x} באיור 19 ואת e^{-x^3} באיור 20).



איור 20



איור 19

5. הוכיחו את הטענות הבאות:

- א. אם אחת מהפונקציות המרכיבות של פונקציה מורכבת $h(x) = f(g(x))$ עולה בכל תחומה והשנייה יורדת בכל תחומה אז הפונקציה המורכבת יורדת בכל תחומה.
- ב. אם לשתי פונקציות מונוטוניות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש מונוטוניות מאותו סוג, כלומר, שתיהן עולות או שתיהן יורדות, אזי הרכבתן בכל סדר (במקרה וקיימת) היא פונקציה עולה.

פעילות 7: תחומי עלייה וירידה של פונקציה מורכבת

מה קורה כאשר אחת מהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מונוטונית (עולה ממש או יורדת ממש בכל התחום שלה) ואילו לפונקציה השנייה בתחומה יש תחומי עלייה ותחומי ירידה חלקיים?

1. סרטטו את הגרפים של הפונקציות: (1) $f(x) = e^{x^2+1}$, (2) $g(x) = \ln(x^2+1)$, (3) $h(x) = (x^2+1)^3$.

מה משותף לשלושת הגרפים?

2. שערו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציות: $t(x) = \sin^3 x$, $k(x) = e^{\cos x}$.

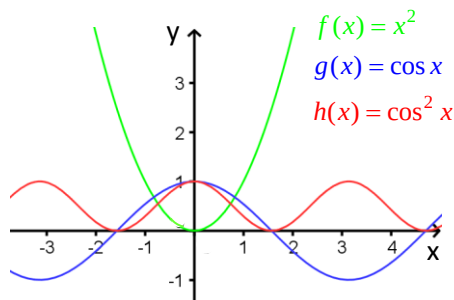
3. הסבירו מדוע תחומי העלייה והירידה של פונקציה מורכבת שהפונקציה החיצונית שלה היא פונקציה עולה, זהים לתחומי העלייה והירידה של הפונקציה הפנימית.

4. מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של פונקציה מורכבת שהפונקציה החיצונית שלה היא פונקציה יורדת? נמקו את תשובתכם והביאו דוגמאות תומכות.

5. באיור 21 מופיעים הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ו-

$g(x) = \cos x$ יחד עם גרף הפונקציה המורכבת

$h(x) = f(g(x)) = \cos^2 x$. הסבירו את הקשר בין תחומי העלייה והירידה של הפונקציה המורכבת, לבין תחומי העלייה והירידה של הפונקציות המרכיבות אותה.



איור 21

זוגיות ואי-זוגיות

זוגיות ואי-זוגיות של פונקציה הן תכונות יעילות מאוד לחקירת פונקציות ולסרטוט הגרפים שלהן, כיוון שהן מאפשרות לסרטט את גרף הפונקציה בחלק החיובי של ציר ה- x , ולהשלים את הגרף באמצעות שיקולי סימטריה.

תזכורת

- פונקציה $f(x)$ היא זוגית אם ורק אם לכל x בתחומה מתקיים: $f(-x) = f(x)$.
- פונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית אם ורק אם לכל x בתחומה מתקיים: $f(-x) = -f(x)$.

ניתן לדבר על זוגיות או אי-זוגיות רק לגבי פונקציות שתחום ההגדרה שלהן הוא תחום סימטרי ביחס לנקודה $x = 0$.

פעילות 8: זוגיות ואי-זוגיות של פונקציות מורכבות

בפעילות זו נחקור את הקשר בין תכונות הזוגיות והאי-זוגיות של פונקציה מורכבת $f(g(x))$ לבין תכונות הפונקציות f ו- g המרכיבות אותה.

נכון או לא? 

להלן רשימת טענות שחלק מהן נכונות וחלק – לא.

אם הטענה נכונה הוכיחו אותה והדגימו באמצעות דוגמה מתאימה.

אם הטענה אינה נכונה – הביאו דוגמה נגדית.

א. אם הפונקציה הפנימית של פונקציה מורכבת היא פונקציה זוגית, אז הפונקציה המורכבת גם היא פונקציה זוגית.

ב. אם הפונקציה הפנימית של פונקציה מורכבת היא פונקציה אי-זוגית, אז הפונקציה המורכבת גם היא פונקציה אי-זוגית.

ג. אם הפונקציה הפנימית והפונקציה החיצונית שתיהן פונקציות אי-זוגיות, אז גם הפונקציה המורכבת היא פונקציה אי-זוגית.

ד. אם הפונקציה הפנימית היא פונקציה אי-זוגית והפונקציה החיצונית היא פונקציה זוגית, אז הפונקציה המורכבת היא פונקציה זוגית.

תשובות

א. הטענה נכונה. אם g פונקציה זוגית אז $g(-x) = g(x)$ ולכן:

$$h(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = h(x)$$

ובמילים פשוטות: אם הפונקציה הפנימית זוגית כשמציבים שני מספרים נגדיים בפונקציה המורכבת, מציבים בפונקציה החיצונית את אותם המספרים, ולכן הפונקציה היא זוגית, ללא קשר לתכונות הפונקציה החיצונית.

ב. הטענה אינה נכונה. הפונקציה $y = \sin x$ היא פונקציה אי-זוגית. הפונקציה $y = e^{\sin x}$ אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

ג. הטענה נכונה. כאשר שתי פונקציות f, g אי-זוגיות, מתקיים:

$$h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -h(x)$$

ד. הטענה נכונה. כאשר הפונקציה הפנימית אי-זוגית, והחיצונית זוגית, מתקיים:

$$h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = h(x)$$

מחזוריות

תזכורת

נתונה $f(x)$ פונקציה ממשית עם תחום הגדרה D . פונקציה $f(x)$ נקראת **מחזורית** אם קיים מספר ממשי $T \neq 0$ כך שלכל $x \in D$ מתקיים:

$$(1) \quad x+T \in D \text{ וגם } x-T \in D.$$

$$(2) \quad f(x+T) = f(x).$$

המספר T נקרא **מחזור** של $f(x)$.

השאלה שעולה היא: האם המחזוריות של פונקציות f, g או אחת מהן גוררת את המחזוריות של הרכבתן? מהם המקרים בהם פונקציה מורכבת מחזורית?

אם פונקציה פנימית g מחזורית עם מחזור T , אז הפונקציה המורכבת $h(x) = f(g(x))$ מחזורית עם אותו מחזור T .

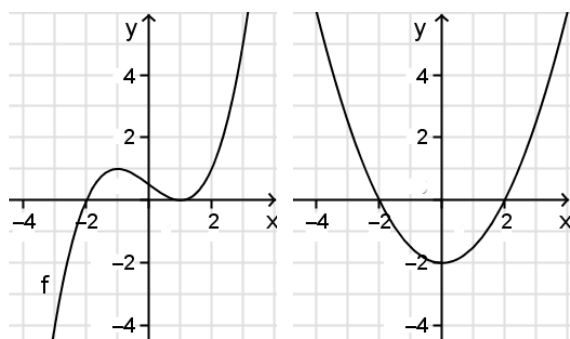
אכן, במקרה זה קל לוודא שלכל נקודה x בתחום הגדרתה של $h(x)$ גם הנקודות $x \pm T$ שייכות לתחום זה

$$\text{ומתקיים: } h(x+T) = f(g(x+T)) = f(g(x)) = h(x).$$

לדוגמה, אפשר להתבונן באיור 21 לעיל, בו מופיעות הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \cos x$ והפונקציה המורכבת: $h(x) = f(g(x)) = \cos^2 x$, שהיא פונקציה מחזורית בעלת אותו מחזור $T = 2\pi$, כמו $\cos x$. נציין כי ל- $h(x)$ יש עוד מחזור $T = \pi$ שאינו מחזור של $\cos x$.

אם פונקציה חיצונית g מחזורית, הפונקציה המורכבת לא בהכרח מחזורית. למשל $g(x) = \cos x$ היא פונקציה מחזורית ואילו הפונקציה המורכבת $\cos(x^2)$ אינה מחזורית.

פעילות 9: שיקולים המבוססים על נגזרת הפונקציה המורכבת – גם כאשר הפונקציות המרכיבות נתונות בדרך גרפית



איור 23

איור 22

בפעילות זו נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה המורכבת על סמך הגרפים של הפונקציות המרכיבות אותה, מבלי להכיר את תבניתיה.¹

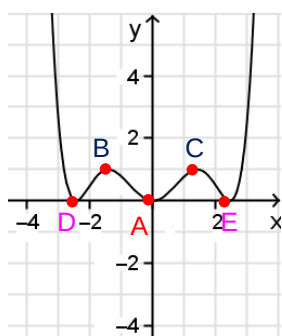
באיורים 22 ו-23 מופיעים הגרפים של שתי פונקציות f ו- g .

א. סרטטו גרף סכמתי של הפונקציה $f(g(x))$.

ב. מהן נקודות הקיצון של $f(g(x))$? האם קיים קשר בין נקודות אלה לנקודות הקיצון של הפונקציות f ו- g ?

¹ מעובד על פי פרל (1996)

תשובות



איור 24

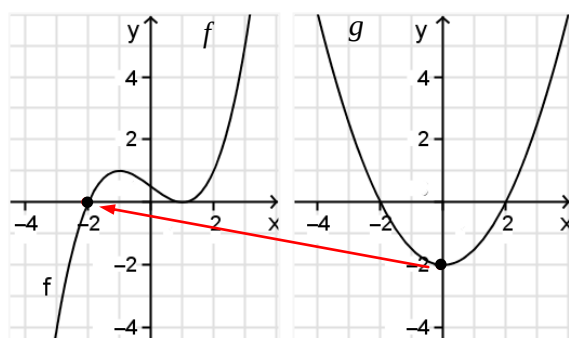
א. גרף סכמתי של $f(g(x))$ מוצג באיור 24. לחישוב, לדוגמה, של ערך הפונקציה המתאים ל- $x=2$ נציב: $f(g(2)) = f(0) = 0.5$. העובדה ש- g פונקציה זוגית מקלה על סרטוט הגרף, כיוון שגם $f(g(x))$ זוגית.

ב. נסביר את מקומן של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(g(x))$:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{לפי הנגזרת של פונקציה מורכבת.}$$

בהתאם, הנקודות החשודות כנקודות קיצון של $f(g(x))$ הן משני סוגים:

- נקודות המקיימות $g'(x) = 0$ שמקורן בנקודות חשודות כנקודות קיצון של הפונקציה הפנימית. בנקודות אלו בפונקציה המורכבת $f(g(x))$ נשמר שיעור x של נקודת הקיצון של הפונקציה הפנימית g .



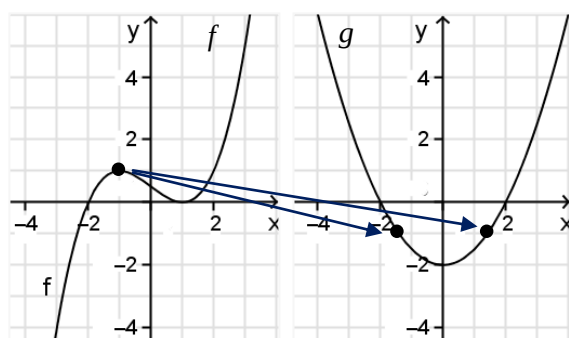
איור 25

- נקודות המקיימות $f'(g(x)) = 0$ שמקורן בנקודות

הקיצון של הפונקציה החיצונית. בנקודות אלו בפונקציה המורכבת $f(g(x))$ נשמר שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה החיצונית f .

הנקודה $A(0, 0.5)$ (איור 24) היא נקודה מהסוג הראשון, כלומר, מקורה בנקודת המינימום של הפונקציה הפנימית g . מגרף הפונקציה g נסיק $g(0) = -2$. מגרף הפונקציה f נסיק $f(-2) = 0$ ומכאן $f(g(0)) = 0$. החץ באיור 25 מוביל מנקודת המינימום $(0, -2)$ של הפונקציה הפנימית, אל הנקודה על גרף הפונקציה החיצונית בה $x = -2$.

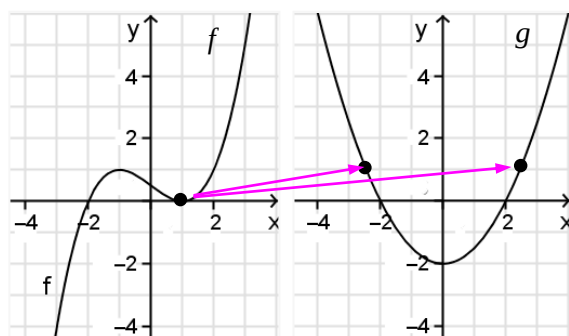
השיעור $y = 0$ של נקודה זו קובע את שיעור ה- y של הנקודה A .



איור 26

שאר הנקודות הן נקודות מהסוג השני ומקורן בנקודות הקיצון של הפונקציה החיצונית.

הנקודות B ו- C באיור 24 מקורן בנקודת המקסימום $(-1, 1)$ של f ובהן $y = 1$. החצים באיור 26 מובילים מנקודת המקסימום $(-1, 1)$ של הפונקציה החיצונית f אל שתי נקודות על גרף הפונקציה הפנימית g , בהן $y = -1$. שיעורי ה- x של נקודות אלה קובעים את שיעורי ה- x של הנקודות B ו- C .



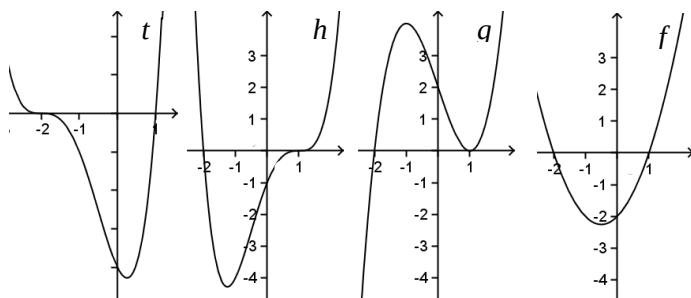
איור 27

הנקודות D ו- E מקורן בנקודת המינימום $(1, 0)$ של f ובהן $y = 0$. החצים הסגולים מנקודת המינימום $(1, 0)$ של הפונקציה החיצונית f אל שתי נקודות על גרף הפונקציה הפנימית g , בהן $y = 1$. שיעורי ה- x של נקודות אלה קובעים את שיעורי ה- x של הנקודות D ו- E .

עוד נקודת מבט על פונקציות פולינום

פעילות 10: מפגש חוזר עם נקודות אפס בריבוי זוגי ובריבוי אי-זוגי

פעילות זו מציעה הסבר, באמצעות הנגזרת של פונקציה מורכבת, לתופעה שנצפתה בפעילות קודמת מבלי שניתן לה שם הסבר (הערה 7, עמוד 124).



איור 28

1. באיור 28 מופיעים גרפים של הפונקציות:

$$f(x) = (x+2)(x-1) \quad g(x) = (x+2)(x-1)^2$$

$$h(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)^3$$

$$t(x) = \frac{1}{2}(x+2)^3(x-1)$$

לארבעת הגרפים באיור 28 אותן נקודות חיתוך עם ציר ה- x , אולם התנהגות הפונקציה בנקודות אלה שונה.

ראינו כי פונקציית פולינום המוצגת על-ידי פירוק לגורמים בלתי פריקים, מחליפה סימן בנקודת אפס אם ורק אם הגורם המתאפס בנקודה זו מופיע בחזקה אי-זוגית (ריבוי אי-זוגי). גורם שמופיע בריבוי זוגי אינו משפיע על סימן הפונקציה (ר' עמוד 127).

א. הסבירו מדוע בנקודת אפס שבה הגורם המתאפס מופיע בריבוי זוגי יש לפונקציה נקודת קיצון.

ב. הסבירו מדוע בנקודת אפס שבה הגורם המתאפס מופיע בריבוי אי-זוגי גדול מ-1 יש לפונקציה נקודת פיתול.

תשובות

א. על שאלה זו נוח יותר לענות ללא שימוש בנגזרת. כיוון שבמקרה הנידון הפונקציה אינה מחליפה סימן בנקודת האפס, קיימות שתי אפשרויות: הפונקציה חיובית משני צדי נקודת האפס, או שהיא שלילית משני צדי נקודת האפס.

אם הפונקציה חיובית משני צדי נקודת האפס, אז הפונקציה יורדת משמאל לנקודת האפס ועולה מימין לה, ולכן נקודת האפס היא נקודת מינימום. בדומה, אם הפונקציה שלילית משני צדי נקודת האפס, אז נקודת האפס היא נקודת מקסימום.

ב. אם הפונקציה מחליפה סימן בנקודת האפס, אז היא עולה או יורדת בנקודה זו, ולכן אינה יכולה להיות נקודת קיצון. לכן כדי להראות שלפונקציה יש נקודת פיתול בנקודת האפס, נראה שהנגזרת שלה מתאפסת בנקודה זו.

נתבונן בפונקציית פולינום f שיש לה נקודת אפס $x = a$ עם ריבוי אי-זוגי גדול מ-1 (n מספר אי-זוגי הגדול מ-1) ונרשום:

$$f(x) = k(x)(x-a)^n$$

כאשר $k(x)$ היא פונקציית פולינום שאינה מתאפסת בנקודה $x = a$ או פונקציה קבועה השונה מ-0.

על-פי חוק הנגזרת של מכפלת פונקציות מוצאים: $f'(x) = k'(x)(x-a)^n + k(x)n(x-a)^{n-1}$

$$\text{או: } f'(x) = (x-a)^{n-1} (k'(x)(x-a) + k(x)n)$$

x	$a - \varepsilon$	a	$a + \varepsilon$
f'	+	0	+

טבלה 3

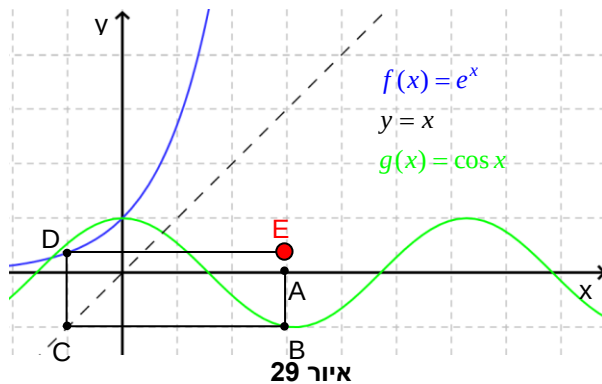
הנגזרת מתאפסת כאשר $x = a$. כיוון ש- $n-1$ מספר זוגי, הנגזרת אינה משנה את סימנה בנקודה זו (טבלה 3). במקרה של פונקציית פולינום, נקודה שבה הנגזרת מתאפסת והיא אינה נקודת קיצון, היא בהכרח נקודת פיתול.

מהי התנהגות הפונקציה הנגזרת בנקודת פיתול זו?

נחשוב על מקרה של פונקציה $f(x)$ עולה בסביבת נקודת האפס שלה

$x = a$. בנקודת האפס הנגזרת מתאפסת ומשני צדי נקודת האפס הנגזרת חיובית. לכן לנגזרת $f'(x)$ הנקודה $x = a$ היא נקודת מינימום.

בניית הגרף של פונקציה מורכבת - מסלול של חמש נקודות

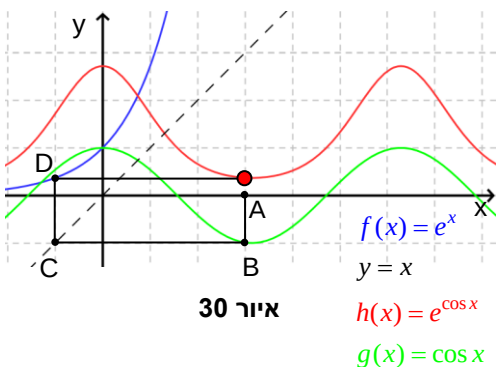


איור 29

לקינוח נציג בנייה גאומטרית לגרף של פונקציה מורכבת: $h(x) = f(g(x))$, שנקרא לה בשם 'מסלול של חמש נקודות'. לבנייה שני שלבים.

שלב ראשון - הכנה: מסרטטים, במערכת הצירים אחת, את הגרפים של שתי הפונקציות המרכיבות: $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ ואת הישר $y = x$.

שלב שני - מוצאים נקודה על גרף הפונקציה המורכבת: א. בוחרים באחד מערכי x מתחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ ומסמנים על ציר ה- x את הנקודה הראשונה $A(x, 0)$.



איור 30

ב. מעלים אנך מציר ה- x בנקודה A עד המפגש עם גרף הפונקציה $g(x)$. זו הנקודה השנייה $B(x, g(x))$.

ג. מהנקודה B מעבירים קטע המקביל לציר ה- x עד המפגש עם הישר $y = x$, זו הנקודה השלישית $C(g(x), g(x))$.

ד. מהנקודה C מעבירים קטע המקביל לציר ה- y עד המפגש עם גרף הפונקציה $f(x)$. זו הנקודה הרביעית $D(g(x), f(g(x)))$.

ה. בסוף, מנקודה D מעבירים קטע המקביל לציר ה- x עד המפגש עם האנך לציר x מהנקודה A (או עם המשכו). זו הנקודה החמישית $E(x, f(g(x)))$. הנקודה E שייכת לגרף הפונקציה המורכבת $h(x) = f(g(x))$.

יש לחזור על תהליך הבנייה, כאשר כל פעם בוחרים בנקודה $A(x, 0)$ אחרת מתחום ההגדרה של $f(g(x))$. אוסף כל הנקודות E הנמצאות בדרך זו מהווה את גרף הפונקציה המורכבת $h(x) = f(g(x))$.

באיור 30 מוצג מסלול המוביל אל נקודה E השייכת לגרף הפונקציה $h(x) = e^{\cos x}$.

כמו כן מוצג גרף הפונקציה $h(x) = e^{\cos x}$ עם הנקודה E עליו.