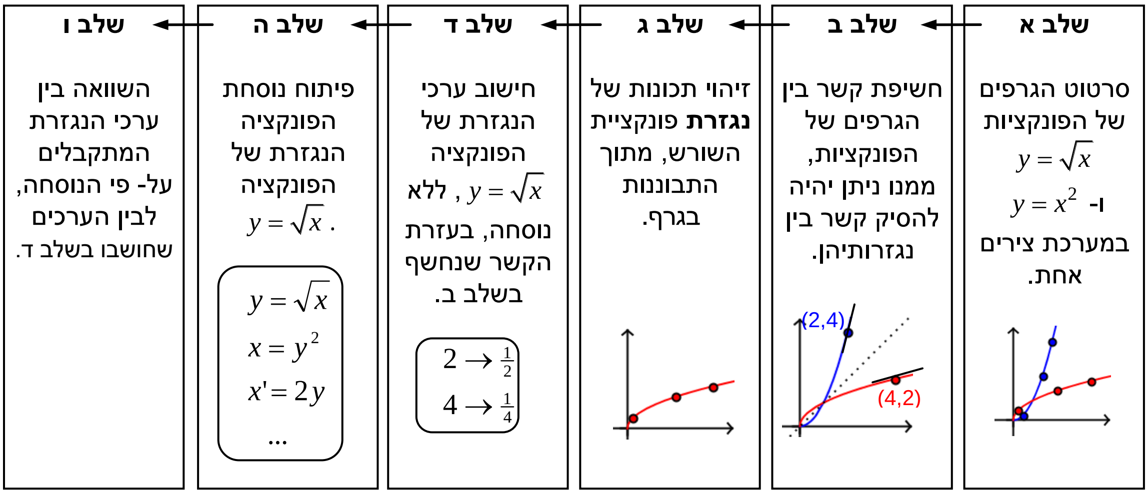
הפונקציה $y=\sqrt{x}$ ונגזרתה

המפגש הראשון של תלמידים עם פונקציה הפוכה הוא באמצעות פונקציית השורש הריבועי. כשתלמידים נפגשים לראשונה עם נגזרת השורש הריבועי ההיכרות הקודמת שלהם עם פונקציות שורש ממעלות אחרות מצומצמת מאוד, או שאינה קיימת כלל.

מציאת נגזרת של פונקציה בעזרת נגזרת הפונקציה ההפוכה – המקרה של הפונקציה $y=\sqrt{x}$

המהלך המוצג בפעילות זו מדגים, על-ידי מקרה פרטי של הפונקציה $y=\sqrt{x}$, דרך למציאת הנגזרת של פונקציה על-פי נגזרת הפונקציה ההפוכה לה, תוך דיון בקשרים שבין שתי פונקציות הפוכות, מבלי לעסוק תחילה בפונקציה ההפוכה כנושא. איור 1 מציג את שלבי המהלך.



איור 1

לאחר הפעילות יוצגו דרכים נוספות להוכחת הנגזרת של פונקציית השורש הריבועי.

שלב א: סרטוט גרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$ באמצעות טבלת ערכים והוספת גרף הפונקציה $y=x^2$

כדאי לפתוח את השיעור בסרטוט גרף הפונקציה, גם אם התלמידים כבר הכירו בעבר את הפונקציה ואת הגרף שלה. סרטוט גרף הפונקציה מאפשר לחזור אל הקשר בין פונקציה זו לבין הפונקציה המוגדרת בתחום $x\geq 0$ וחוק ההתאמה שלה $y=x^2$.

נשים לב לתחום הפונקציה ונכין טבלת ערכים:

x	0	0.25	1	4	9	16
$y=\sqrt{x}$	0	0.5	1	2	3	4

טבלה 1

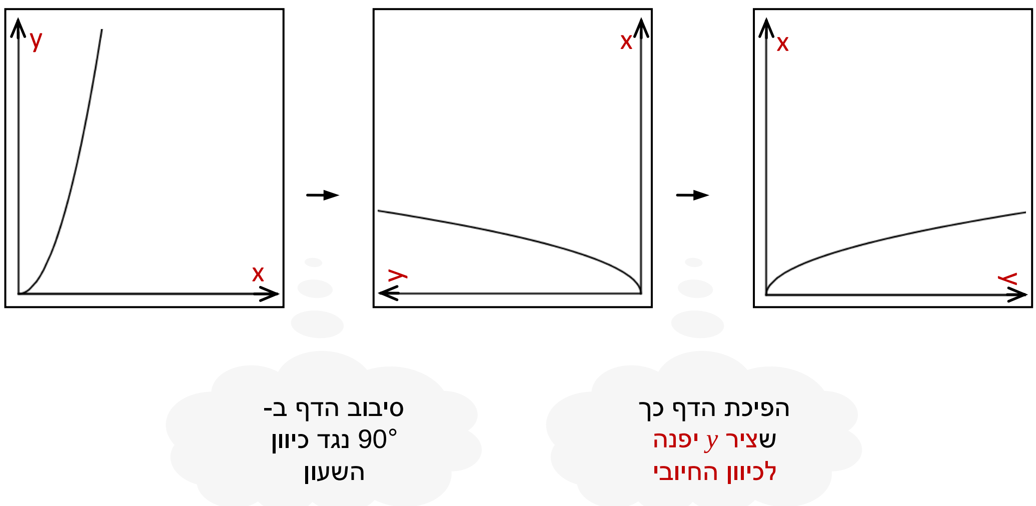
הערות דידקטיות

המהלך נועד לכוון לכך, שהרעיון לסרטט את שתי הפונקציות זו לצד זו יעלה באופן טבעי במהלך הדיון.

- עד עתה הדגשנו שטבלת ערכים אינה מספיקה לסרטוט גרף של פונקציה, כל עוד לא חקרנו את התנהגות הפונקציה. ההצדקה לסרטט את גרף הפונקציה באמצעות טבלה, נובעת מתכונות מוכרות של הפונקציה. למשל, אנחנו יודעים כי ככל שמספר גדול יותר גם השורש הריבועי שלו גדול יותר. לכן אנחנו יודעים שהפונקציה עולה בכל תחומה.
- כדאי לבחור ערכי x בתחום הפונקציה שהשורש הריבועי שלהם מוכר לנו.
- נתבונן בטבלה. האם זוגות המספרים מוכרים לנו מפונקציה אחרת?
- נסרטט במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$, ואת הענף הימני של הפרבולה $y=x^2$.

שלב ב: חשיפת קשר בין הגרפים של הפונקציות שיוביל להבנת הקשר בין נגזרותיהן

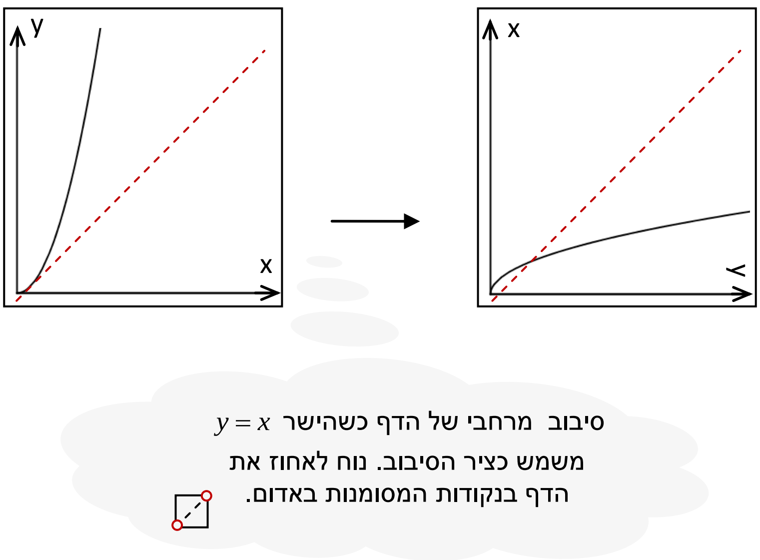
- נדון בקשר בין הגרפים. מומלץ לסרטט על דף משובץ את הענף החיובי של גרף הפונקציה $y=x^2$ (איור 2), ולבדוק איך לפעול על הדף כדי להחליף את המקומות של הצירים. סרטוט בטוש של לוח מחיק על פני הדף נראה היטב מצדו השני של הדף, ולכן כדאי להיעזר בו.



איור 2

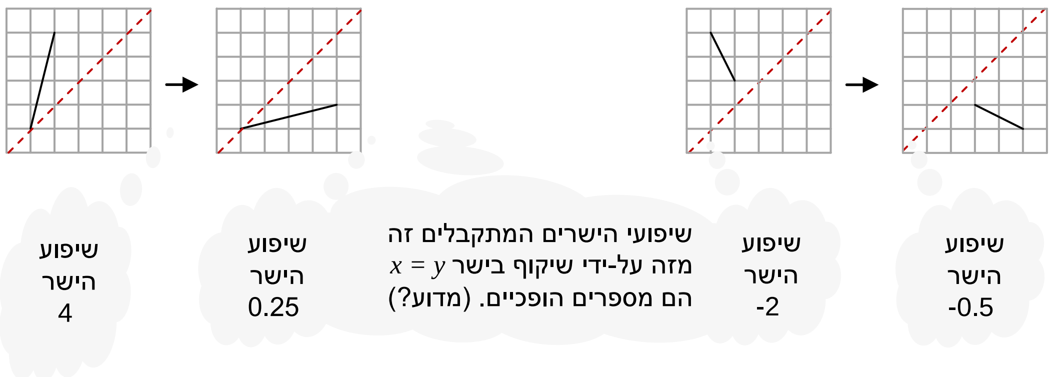
ניתן להיעזר בשקף. מסרטטים את הענף הימני של הפרבולה על נייר משובץ, מניחים עליו שקף ועוברים על הסרטוט של הצירים ושל הגרף. לאחר מכן ניתן לעשות את הפעולות רק על השקף. השימוש בשקף מאפשר לראות **בו-זמנית** את הענף החיובי של גרף הפונקציה $y=x^2$ ואת גרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$, ולהבחין בקשר בין שני הגרפים.

ניתן לשלב את שתי הפעולות ולבצען בתנועה אחת על-ידי סיבוב מרחבי של הדף כשהישר $y=x$ משמש כציר הסיבוב. כתוצאה מכך מתגלה, בצדו השני של הדף, גרף שהוא שיקוף של גרף הפונקציה $y=x^2$ ביחס לישר $y=x$ (איור 3).



איור 3

אם נשקף בדרך זו ישרים במערכת הצירים, נוכל לראות קשר בין שיפועי הישרים לפני ואחרי השיקוף: ערכי הנגזרת בנקודות סימטריות הם מספרים הופכיים.



איור 4

שלב ג: זיהוי תכונות של הפונקציה הנגזרת מתוך התבוננות בגרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$

אפשר להציע לתלמידים להתבונן בגרף של פונקציית השורש ולמנות תכונות של הפונקציה, למשל:

- תחום הפונקציה $x \geq 0$.
- הפונקציה אי-שלילית בכל התחום.
- הפונקציה עולה בכל התחום.
- השיפועים הולכים ונהיים מתונים כאשר מתרחקים מציר ה- y.

תחום ההגדרה של הנגזרת יזמן לנו הפתעה קטנה: הנגזרת לא קיימת כאשר $x = 0$.

נציין אילו תכונות יכולות ללמד על הנגזרת ואילו אינן רלוונטיות לעניין זה.

מניתוח תכונות הפונקציה מתקבל הרושם שהנגזרת חיובית ויורדת בכל התחום.

שלב ד: בניית טבלת ערכים לנגזרת הפונקציה $y=\sqrt{x}$ על-פי ערכי הנגזרת של $y=x^2$ בנקודות מתאימות

חישוב שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$ מתבסס על כך שהמשיקים בנקודות סימטריות מתקבלים זה מזה על-ידי שיקוף בישר $y=x$. (ראו איור בעמוד 276). החלפת תפקידי המשתנים המיוצגים על-ידי הצירים מתבטאת בהחלפת ערכי המונה והמכנה בעת חישוב השיפוע. לכן שיפועי המשיקים בנקודות סימטריות הם מספרים הופכיים.

$y=x^2$

נקודה (x,y) על הגרף $y=x^2$	שיפוע המשיק לגרף (חישוב על-ידי הצבת שיעור ה- x בנגזרת $y'=2x$.)
(0,0)	0
(0.5,0.25)	1
(1,1)	2
($\sqrt{3}$,3)	$2\sqrt{3}$
(2,4)	4
(3,9)	6

$y=\sqrt{x}$

נקודה (x,y) על הגרף $y=\sqrt{x}$	שיפוע המשיק לגרף (כל שיפוע מחושב כמספר ההופכי של שיפוע המשיק לגרף $y=x^2$ הסימטרי לו.)
(0,0)	אין שיפוע
(0.25,0.5)	$\frac{1}{1}$
(1,1)	$\frac{1}{2}$
(3, $\sqrt{3}$)	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
(4,2)	$\frac{1}{4}$
(9,3)	$\frac{1}{6}$

טבלה 2

העובדה ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$ אינו מוגדר בראשית הצירים, מתבהרת ישירות מתוך חילופי התפקידים של הצירים: אם המשיק לגרף $y=x^2$ בראשית הצירים הוא ציר ה- x, אזי המשיק לגרף $y=\sqrt{x}$ בראשית הצירים הוא ציר ה- y שהוא חסר שיפוע.

שלב ה: פיתוח נוסחת הפונקציה הנגזרת של הפונקציה $y=\sqrt{x}$

מהקשר האלגברי $y=\sqrt{x}$ (בתחום $x\geq 0$) נובע מידית הקשר השקול $x=y^2$ (בתחום $y\geq 0$).

נתייחס ל- x כפונקציה של y ונקבל: $x'(y)=2y$,

מהקשר בין שיפועי המשיקים, שראינו זה עתה, נובע: $y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (בתחום $x>0$).

שיפועי המשיקים בנקודות סימטריות הם מספרים הופכיים.

ובמעבר ל"שפת ה- x".

נשים לב שהפונקציה הנגזרת שהתקבלה היא בעלת תכונות שציפינו להן, כשהתבוננו בגרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$. היא חיובית לכל x בתחום הגדרתה, והיא פונקציה יורדת.

תכונות נוספות של הנגזרת משקפות אף הן את תכונות הפונקציה $y=\sqrt{x}$ ואת הקשר בינה לבין הפונקציה $y=x^2$:

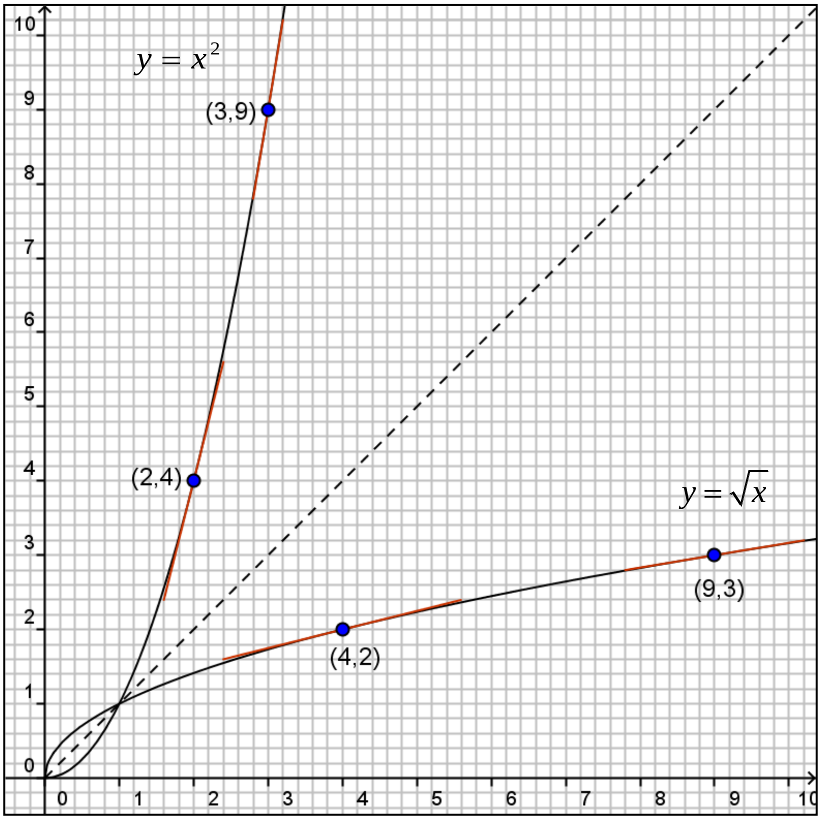
נגזרת פונקציית השורש הריבועי, היא פונקציה ללא נקודות קיצון, ואכן לפונקציית השורש הריבועי אין נקודות פיתול.

הנגזרת $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ אינה מוגדרת כאשר $x=0$. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו הוא הישר $x=0$, ישר חסר שיפוע. המשיק לגרף הפונקציה ההפוכה $y=x^2$ כאשר $x=0$ הוא ציר ה- x, הישר $y=0$.

שלב ו: השוואה בין ערכי נגזרת הפונקציה $y=\sqrt{x}$ המתקבלים על-פי תבניתה $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, לבין ערכי נגזרת זו שמצאנו בטבלה 2.

נציב, למשל, $x=9 \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$. התוצאה מתאימה לטבלה 2.

להמחשה מוצגים זה לצד זה הגרפים של שתי הפונקציות עם משיקים אחדים (מסומנים באדום) בנקודות סימטריות ביחס לישר $y = x$.



איור 5

דרכים נוספות לפיתוח נגזרת הפונקציה $y = \sqrt{x}$

בספרים שונים קיימות דרכים אחדות להציג את נגזרת הפונקציה $y = \sqrt{x}$. נציג כאן מבחר דרכי הוכחה, המבוססות על מרכיבי ידע מגוונים.

א. חישוב $\left(\sqrt{x}\right)'$ על-פי הזהות $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ ($x \geq 0$).

אם נגזור את הפונקציה $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ בתחומה, על-פי כלל הנגזרת של מכפלה, נקבל:

$$\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)' = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)'.$$

מצד שני: $\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right)'=1$ כמו נגזרת הפונקציה $y=x$.

מהשוויון $2\cdot\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=1$ נקבל: $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ כאשר $x>0$.

ב. חישוב $\left(\sqrt{x}\right)'$ כנגזרת של פונקציית חזקה עם מעריך רציונלי:

מפתחים נוסחה כללית לנגזרת של פונקציית חזקה עם מעריך רציונלי $\left(x^q\right)'=qx^{q-1}$ לכל מספר רציונלי $q=\frac{m}{n}$ (m - מספר שלם, n - מספר טבעי), ומוצאים את $\left(\sqrt{x}\right)'$ על-פי הנוסחה לעיל , כמקרה פרטי $q=\frac{1}{2}$:

$$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

ג. חישוב $\left(\sqrt{x}\right)'$ על סמך הגדרת הנגזרת:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ד. חישוב $\left(\sqrt{x}\right)'$ על-פי כלל השרשרת:

$$x=\left(\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow (x)'=\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)' \Rightarrow 1=2\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

בכל דרכי החישוב התקבלה הנוסחה $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ התקפה בתחום ההגדרה של הנגזרת $x>0$.

דוגמה לחקירת פונקציה פשוטה המכילה שורש ריבועי

חקירת הפונקציה $f(x)=3\sqrt{x}-x$.

אבני דרך בפתרון

תחום ההגדרה: $x\ge 0$. כיוון שהמשתנה מופיע תחת שורש, יש לדרוש כי הביטוי בשורש יהיה אי-שלילי. חשוב להדגיש שמדובר באי-שוויון חלש.

גרף הפונקציה (איור 6), חותך עם ציר ה- x בנקודות: $(9,0)$ $(0,0)$ המתקבלות מפתרון המשוואה $0=3\sqrt{x}-x$. חשוב להדגיש כי כאשר במהלך הפתרון מעלים את שני אגפי המשוואה בריבוע, יש לבדוק את הפתרונות המתקבלים.

החיתוך עם ציר ה- y הוא בנקודה $(0,0)$.

מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

$$f'(x)=3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=\frac{3}{2\sqrt{x}}-1 .$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=2.25$$

גם כאן מהלך הפתרון כולל העלאה בריבוע של אגפי משוואה, ולכן יש לבדוק את הפתרון.

כיוון שהביטוי האלגברי המתאים לפונקציה פשוט מהביטוי המתאים לנגזרת, נוח להשתמש בטבלה שבה מציבים את ערכי הפונקציה (טבלה 3).

כדאי להדגיש בטבלה שהפונקציה אינה מוגדרת כאשר $x<0$.

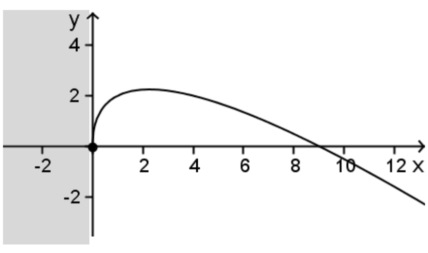
9	2.25	0		***x***
0	2.25	0		***y***
↘	מקסימום	↗		

טבלה 3

מהטבלה נסיק: לפונקציה נקודת מקסימום $(2.25,2.25)$.
הפונקציה עולה בתחום $0<x<2.25$ ויורדת בתחום $2.25<x$.

גרף הפונקציה מוצג באיור 6.

כדאי להדגיש בסרטוט את התחום בו הפונקציה אינה מוגדרת.



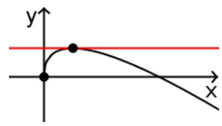
איור 6

אפשרויות להרחבת הדיון בשאלה

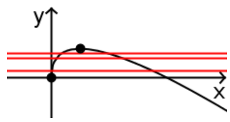
ניתן להוסיף שאלות הממקדות את הדיון בערכי הפונקציה, למשל:

עבור אלו ערכים של k:

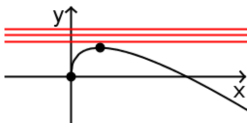
(א) הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת.



(ב) הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.



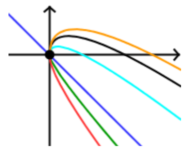
(ג) הישר $y=k$ אינו חותך את גרף הפונקציה.



איור 7

ניתן להוסיף שאלות המשלבות פרמטרים, בדרכים שונות, למשל:

חקירת משפחת הפונקציות $y=a\sqrt{x}-x$



פתיח כגון:

גרף הפונקציה $y=a\sqrt{x}-x$ עובר בנקודה $(9,0)$.
מצאו את a.

איור 8

הציעו דרכים נוספות לשלב פרמטרים בחקירת הפונקציה $y=a\sqrt{x}-x$.