הפונקציה $\frac{1}{x}$ ונגזרתה

העיסוק בקשר בין הפונקציה לפונקציה הנגזרת הוא אחד מאבני הבניין החשובות ביותר של הוראה ולמידה של אנליזה. לעיסוק זה יש פנים רבות שאת חלקן הצגנו בפעילויות קודמות. כאשר הקשרים בין הפונקציה לפונקציה הנגזרת מתחילים להתבסס אצל התלמידים, כדאי לעסוק בקשרים אלה גם תוך כדי הצגת נגזרות חדשות.

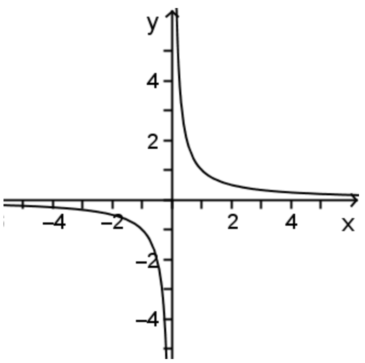
פעילות 1: הצגת הנגזרת של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ תוך כדי דיון בקשרים בין תכונות הפונקציה לתכונות הנגזרת

לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.

א. ערכו רשימה של תכונות הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.

ב. ערכו רשימה של תכונות הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ אותן ניתן להסיק מתכונות הפונקציה.

ג. היעזרו בתכונות שרשמתם וסרטטו גרף סכמתי של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

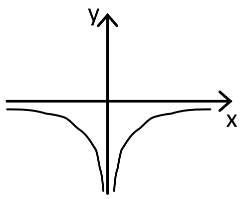


איור 1

טבלה 1 מציגה את תכונות הפונקציה ותכונות הפונקציה הנגזרת שניתן להסיק מהתבוננות בגרף.

	תכונות הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$	**תכונות הפונקציה הנגזרת**
(1)	הפונקציה אינה מוגדרת ב- $x=0$.	הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ אינה מוגדרת ב- $x=0$.
(2)	הפונקציה יורדת בתחום $x<0$ ובתחום $x>0$.	הנגזרת לא יכולה לקבל ערכים חיוביים בכל תחום הגדרתה. (אם נבחין ששיפוע המשיק הוא שלילי בכל נקודה על הגרף, נוכל להסיק שהפונקציה הנגזרת מקבלת ערכים שליליים בלבד.)
(3)	הגרף של $f(x)$ הולך ונהיה מאוד מתון ככל שערכי ה- x הולכים וגדלים בערכם המוחלט.	גרף הנגזרת יתקרב לציר ה-x ככל שנתרחק מציר ה- y .
(4)	הגרף של $f(x)$ תלול מאוד כאשר ערכי x קרובים לאפס.	ערכי הנגזרת יהיו גדולים מאוד (בערך מוחלט) כאשר ערכי x קרובים ל- 0.
(5)	גרף הפונקציה סימטרי ביחס לראשית הצירים.	שיפועי הגרף יהיו שווים בנקודות הסימטריות. הפונקציה הנגזרת היא פונקציה זוגית.

טבלה 1

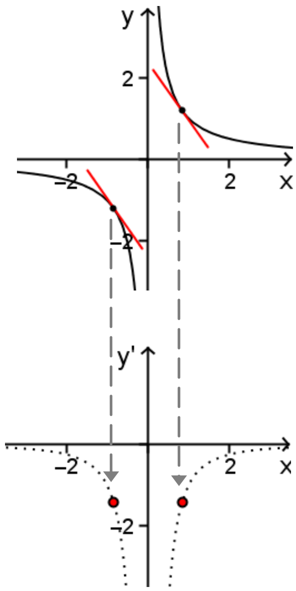


איור 2

כעת נוכל לסרטט גרף סכמתי משוער של הפונקציה הנגזרת (איור 2).

הערות

1. החץ בטבלה מצביע על תכונות של הנגזרת אותן ניתן להציג מתכונות הפונקציה.
2. חשוב לשים לב שמהעובדה שהפונקציה יורדת לא ניתן להסיק שהנגזרת שלילית בכל נקודה. ניתן להסיק שהנגזרת לא יכולה לקבל ערכים חיוביים. אם מסרטטים משיקים לאורך הגרף ניתן להבחין ששיפועיהם שליליים בכל נקודה.
3. ניתן להיעזר בתוכנה גרפית, לסמן נקודה על הגרף ולהעביר דרכה משיק. גם באופן זה ניתן לראות שהשיפועים הולכים וקטנים בערכם המוחלט כאשר ערכי x גדלים בערכם המוחלט.
4. איור 3 ממחיש את הזוגיות של הנגזרת. לנקודות סימטריות ביחס לראשית הצירים יש משיקים מקבילים, ולכן $f'(-x)=f'(x)$



איור 3

מציאת נגזרת הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.

נפתח את הנגזרת ישירות מתוך ההגדרה:

$$\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}=\frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h}=\frac{-1}{(x+h)x}\xrightarrow[h\to 0]{}\frac{-1}{x^2}$$

ומכאן: $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

תכונותיה של הפונקציה הנגזרת אכן מתאימות לתכונות הרשומות בטבלה.

פעילות 2: אל תסתכל בקנקן – זיהוי הפונקציה $\frac{1}{x}$ כשהיא משולבת בפונקציה אחרת[1]

נגזרת הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$

בכיתות שלא מכירות את הנגזרת של פונקציה מורכבת ניתן לגזור את הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ באמצעות כלל המכפלה:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{-1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{x^3}+\frac{-1}{x^3}=\frac{-2}{x^3}$$

חשוב לשים לב שאצל תלמידים המתקשים בעבודה עם שברים צפוי קושי בזיהוי השוויון $-\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$.

הנגזרות של הפונקציות $f(x)=\frac{1}{ax}$ ו- $f(x)=\frac{a}{x}$

כדי לגזור פונקציות אלה יש לשנות את הרישום של השבר באופן המאפשר להשתמש בכלל של מכפלת פונקציה בקבוע.

$$f(x)=\frac{a}{x}=a\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad f(x)=a\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{-a}{x^2} \qquad ;\ f(x)=\frac{1}{ax}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{-1}{x^2}$$

גם כאן צפוי קושי אצל תלמידים המתקשים בעבודה עם שברים.

תלמידים נתקלים לעתים בקושי לזהות את הפונקציה $\frac{1}{x}$ כשהיא משולבת בפונקציה אחרת. טעות נפוצה אחרת של תלמידים קשורה בכך שהם משתמשים בנגזרת של פונקציית שורש גם במקרים לא מתאימים, למשל כשהמשתנה מופיע במונה של שבר.

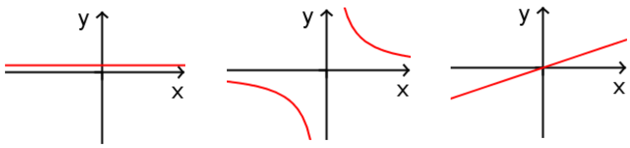
[1] הדוגמאות בפרק זה הן פשוטות במיוחד ומתאימות לכתות מתקשות. יחד עם זאת, חלק מההצעות לייעול הגזירה ולמניעת טעויות מתאימות גם לכיתות אחרות. לפונקציות רציונליות מוקדש פרק נפרד.

משימות להבחנה בין פונקציות שלביטוי האלגברי המייצג אותן חזות דומה

נתונות הפונקציות: א. $y=\frac{3}{x}$ ב. $y=\frac{x}{3}$ ג. $y=\frac{1}{3}$

א. התאימו לכל פונקציה את נגזרתה (1) $y'=\frac{1}{3}$ (2) $y'=0$ (3) $y'=-\frac{3}{x^2}$

ב. התאימו לכל פונקציה את הגרף שלה



איור 4

ג. רשמו 3 פונקציות נוספות שהגרפים שלהן דומים לגרפים בסעיף הקודם וגזרו אותן.

משימות לפישוט הביטוי האלגברי המייצג את הפונקציה ולחשיפת פונקציות מוכרות

שנו את צורת הכתיבה של הפונקציות הבאות כך שיהיה ניתן לגזור אותן באמצעות הנגזרת $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

א. $y=\frac{6}{x}$ ב. $y=\frac{1}{6x}$ ג. $y=\frac{-5}{6x}$ ד. $y=\frac{1}{x^2}$ ה. $y=\frac{x^2+1}{x}$ ו. $y=\frac{2x^4-5x^2+4x-1}{x}$

דוגמה לחקירת פונקציה פשוטה

1. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{3x}+\frac{x}{6}$.

א. מצאו, אם קיימות, נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצאו מהן נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ג. מצאו מהו תחום ההגדרה של הפונקציה.

ד. מצאו, אם קיימות, נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מצאו מהן נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ו. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ז. סרטטו גרף סכמתי של הפונקציה.

אבני דרך בחקירה

א. למציאת תחום ההגדרה של הפונקציה נדרוש שהמכנה יהיה שונה מאפס. $3x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$.

ב. כיוון ש- $x=0$ לא כלול בתחום ההגדרה אין לגרף הפונקציה נקודת חיתוך עם ציר ה- y . למציאת נקודות החיתוך עם ציר ה- x נפתור את המשוואה $0=\frac{2}{3x}+\frac{x}{6}$. למשוואה אין פתרון ממשי. גרף הפונקציה אינו חותך את הצירים.

ג. נרשום מחדש את הפונקציה ונגזור אותה:

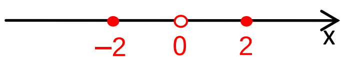
$$f(x)=\frac{2}{3x}+\frac{x}{6}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{6}=\frac{-2}{3x^2}+\frac{1}{6}$$

נשווה את הנגזרת לאפס ונפתור את המשוואה המתאימה:

$$-\frac{2}{3x^2}+\frac{1}{6}=0$$

$$x=\pm 2$$



איור 5

קיבלנו שתי נקודות חשודות כקיצון.

הנקודות החשודות ונקודת האי-הגדרה מחלקות את ציר ה- x ל- 4 תחומים (איור 5) חלקיים. נרשום תחומים אלה בטבלה ונבחר נקודה מייצגת בכל תחום חלקי.

תחום חלקי	$x<-2$		$-2<x<0$		$0<x<2$		$x>2$
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	+	0	−	הפונקציה אינה מוגדרת	−	0	+
y	↗	$-\frac{2}{3}$	↘		↘	$\frac{2}{3}$	↗

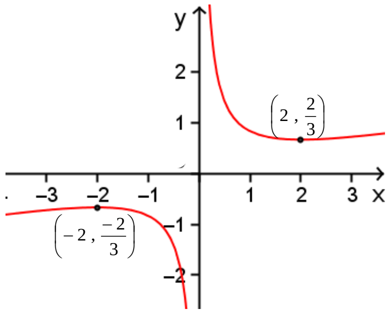
טבלה 2

נוכל להסיק:

לגרף הפונקציה נקודת מינימום $\left(2\ ,\ \frac{2}{3}\right)$ ונקודת מקסימום $\left(-2\ ,\ -\frac{2}{3}\right)$.

תחומי העלייה: $x > 2$; $x < -2$. תחומי הירידה: $0 < x < 2$; $-2 < x < 0$.

גרף הפונקציה מוצג באיור 6.



איור 6

הערות

1. בדוגמה זו, כמו בדוגמאות רבות שמשולבת בהן הפונקציה $\frac{1}{x}$, ערך המינימום גדול מערך המקסימום. זו הזדמנות לחזור ולחדד את המושגים מינימום מקומי ומקסימום מקומי.

2. ניתן לחשב את ערכי הפונקציה במקום את ערכי הנגזרת, ומהם להסיק את התנהגות הפונקציה. היתרון של הצבת ערכי הפונקציה הוא באפשרות לסרטט את גרף הפונקציה מתוך הטבלה. החיסרון הוא שלתלמידים המתקשים לעבוד עם שברים קשה להשוות בין השברים המתקבלים, וקל יותר לקבוע את העלייה והירידה על-פי סימן הנגזרת.

3. חשוב להסב את תשומת לב התלמידים לנקודת האי-הגדרה, ולכך שהגרף בנוי משני ענפים נפרדים שאין לחבר ביניהם.

4. גם כשהשאלה לא עוסקת במפורש באסימפטוטה, כדאי לעסוק בהתנהגות הפונקציה בסביבות נקודת האי-הגדרה, ולחשב ערכים של הפונקציה עבור ערכי x קרובים לאפס.

5. במקום לבקש סרטוט סכמתי של גרף הפונקציה אפשר להציג מספר גרפים ולשאול איזה מביניהם יכול להתאים לגרף הפונקציה הנתונה.