פונקציות הפוכות ונגזרותיהן

דוגמאות מבוא

חברת גינון המפתחת שטח ציבורי גובה מהעירייה 10,000 ₪ כתשלום קבוע, ו- 100 ₪ לכל מ"ר שהיא מפתחת. אפשר לייצג את הפונקציה f , המתאימה לגודל השטח בפיתוח, x, את התקציב הנדרש לפיתוח, על- ידי התבנית $f(x)=10000+100x$. לפעמים מעוניינים דווקא בכיוון ההפוך - בפונקציה המתאימה לגודל התקציב העומד לרשות העיריה, את גודל השטח שניתן לפתח בתקציב זה.

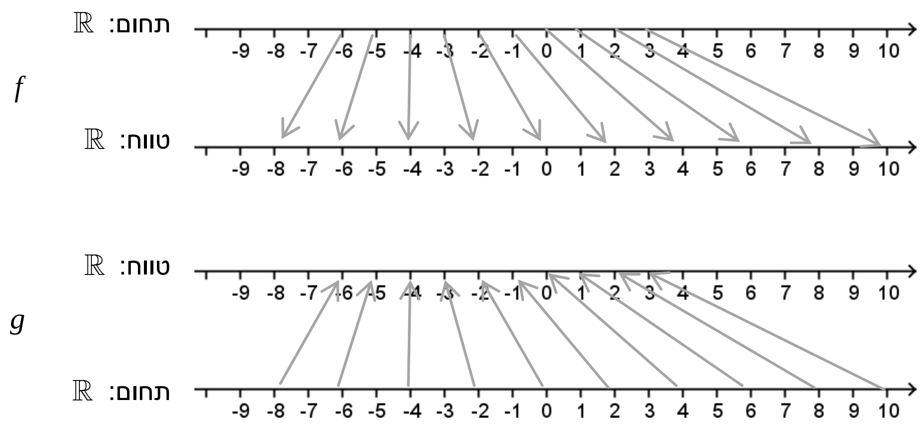
אדם עומד לקחת הלוואה ל- 20 שנה לצורך רכישת דירה. באמצעות פונקציה מתאימה יכול פקיד הבנק לומר לרוכש הדירה מהו התשלום החודשי שיידרש ממנו, בהתאם לגובה ההלוואה שייקח. לפעמים הלקוח מעוניין לקבוע את גודל ההלוואה שייקח בהתאם לתשלומים החודשיים. במצב זה הפקיד זקוק לפונקציה ההפוכה – לפונקציה המתאימה לגודל ההחזר החודשי את גודל ההלוואה שהלקוח יכול לקחת.

הדוגמאות לעיל סוללות דרך למושג הפונקציה ההפוכה ומראות את החשיבות של מושג זה.

הגדרה

פונקציה g נקראת פונקציה הפוכה לפונקציה f , אם ורק אם התחום של הפונקציה g הוא הטווח של הפונקציה f , הטווח של הפונקציה g הוא התחום של הפונקציה f , והפונקציה g מתאימה לכל ערך (תמונה) של הפונקציה f , את המשתנה הבלתי תלוי (מקור) שלו בפונקציה f .

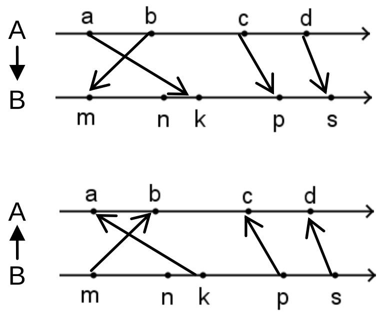
פונקציה הפוכה לפונקציה f נוהגים לסמן ב- f^{-1} .



איור 1

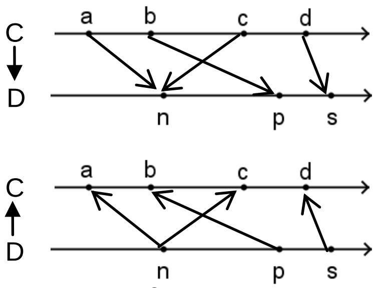
נתבונן בפונקציה ממשית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עם $f\left(x\right)=2x+4$, אשר מיוצגת באמצעות דיאגרמת החיצים שבאיור 1.[1]
ניתן להפוך את כיוון החיצים ולהתאים לכל ערך y של הפונקציה f את מקורו x .
בפעולה זו קיבלנו פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפוכה לפונקציה f .
דיאגרמת החיצים ממחישה כי כשמפעילים בזו אחר זו פונקציה f ופונקציה הפוכה g , "המצב חוזר לקדמותו".
למשל, הפונקציה f התאימה למקור 3 את הערך 8. פונקציה g מתאימה ל - 8 בחזרה את הערך 3.

[1] מעובד מתוך ספרד ופרל (1993)



איור 2

בדיאגרמת החיצים שבאיור 2 מוצגת הפונקציה f שתחומה $A=\{a,b,c,d\}$ והטווח שלה $B=\{m,n,k,p,s\}$. כפי שרואים בסרטוט, הפונקציה f **איננה פונקציה מהתחום על הטווח**. לאיבר n של הקבוצה B אין מקור ב- A. אם נהפוך את כיוון החיצים ל- n לא תהיה תמונה. לכן לא ניתן להפוך את כיוון החיצים ולקבל פונקציה.



איור 3

בדיאגרמת החיצים שבאיור 3 מוצגת הפונקציה g שתחומה $C=\{a,b,c,d\}$ והטווח שלה $D=\{n,p,s\}$. כפי שרואים בסרטוט, הפונקציה f **איננה** חד-חד-ערכית. לאיבר n של הקבוצה D יש שני מקורות ב- C. אם נהפוך את כיוון החיצים ל- n יתאימו שתי תמונות. לכן לא ניתן להפוך את כיוון החיצים ולקבל פונקציה.

כפי שראינו בדוגמאות לעיל, לא לכל פונקציה קיימת פונקציה הפוכה.

התנאים לקיום פונקציה הפוכה

פונקציה הפוכה לפונקציה $f:A\to B$ נתונה, קיימת אם ורק אם הפונקציה f היא פונקציה **חד-חד-ערכית** מהתחום A **על** הטווח B. פונקציה שיש לה פונקציה הפוכה נקראת **פונקציה הפיכה**.

הערות

- כל פונקציה ממשית מונוטונית $f(x)$ היא בהכרח פונקציה חד-חד-ערכית. לכן כל פונקציה מונוטונית שהיא התאמה מהתחום **על** הטווח היא פונקציה הפיכה.
- מן ההגדרה של הפונקציה ההפוכה ומהתנאים לקיום פונקציה הפוכה, נובע שאם פונקציה g היא פונקציה הפוכה לפונקציה f , אז גם g פונקציה הפיכה, והפונקציה ההפוכה שלה היא f .

נרשום שלושה קשרים בין שתי הפונקציות f ו- f^{-1} הנובעים מתוך ההגדרה של פונקציה הפוכה, ובתנאי שהיא קיימת:

א. $(f^{-1})^{-1}=f$.

ב. $f^{-1}(f(x))=x$ לכל x מהתחום של f .

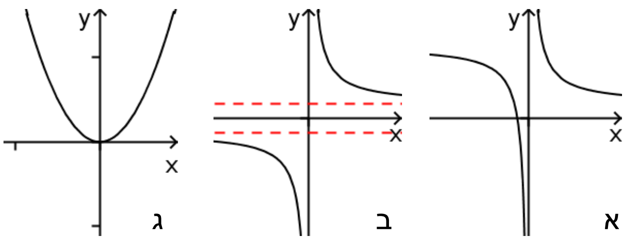
ג. $f(f^{-1}(y))=y$ לכל y מהטווח של f .

הערה: הסימון של פונקציה הפוכה f^{-1} עלול להטעות תלמידים בתחומי אלגברה ואנליזה המתייחסים אליו כאל חזקה עם מעריך שלילי. לכן חשוב להדגיש שהסימן f^{-1} אינו מסמן את הפונקציה $\frac{1}{f}$.

לדוגמה, אם $f(x)=x^5$, אז $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{x}$, ולעומת זאת $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^5}$.

שאלה

שלוש הפונקציות הממשיות שהגרפים שלהן מוצגים באיור 4, מוגדרות כפונקציות מתחום הגדרתן לטווח $\mathbb{R}$. הסבירו מדוע לאף אחת מהן לא קיימת פונקציה הפוכה.



איור 4

הגדרת פונקציה הפוכה בתחום חלקי

אחת האפשרויות להגדיר פונקציה הפוכה לפונקציה שאיננה חד-חד-ערכית ו/או אינה "על" הטווח, היא לצמצם את תחום הפונקציה ו/או את הטווח שלה. להלן שתי דוגמאות המאירות את העניין. דוגמאות נוספות יוצגו בהמשך.
באיור 4ג מוצג גרף הפונקציה $y=x^2$. אם פונקציה זו מוגדרת מקבוצת המספרים הממשיים אל קבוצת המספרים הממשיים, אין לה פונקציה הפוכה משתי סיבות. ראשית, הפונקציה איננה **על** הטווח - כל המספרים השליליים אינם ערכים של הפונקציה. שנית, הפונקציה איננה חד-חד-ערכית. לכל מספר חיובי יש שני מקורות בתחום הפונקציה.
לעומת זאת, לפונקציה עם אותו כלל ההתאמה $f(x)=x^2$, אבל עם תחום וטווח מצומצמים, $f:R_+\to R_+$, כאשר $\mathbb{R}_+$ קבוצת המספרים האי-שליליים, יש פונקציה הפוכה שהיא פונקציית השורש הריבועי.
משיקולים דומים, לא ניתן להגדיר פונקציה הפוכה לפונקציית הסינוס כהתאמה מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$. הגדרת הפונקציה $y=\arcsin x$ מחייבת להגדיר תחילה פונקציה חדשה המתקבלת על-ידי צמצום תחום הפונקציה ל- $\frac{-\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ וצמצום טווח הפונקציה ל- $-1\le y\le 1$ [ר' עמוד 417].

הערה

בכל מקרה שלא נאמר אחרת, הטווח של כל פונקציה ממשית $f(x)$ המוגדרת בתחום $D\subseteq\mathbb{R}$ הוא קבוצת הערכים של הפונקציה (קבוצת התמונות) בתחום זה. קבוצת הערכים של f בתחום D מסומנת $f(D)$.
בהסכמה זו קיים תנאי אחד ויחיד לקיום פונקציה הפוכה לפונקציה f , והוא חד-חד-ערכיות של f בתחומה.

פעילות 1: הבדלים קטנים שעושים שינוי גדול

פונקציות דומות הנבדלות זו מזו בפרטים קטנים, יכולות למקד את תשומת הלב בנקודות עדינות. פעילות זו נועדה לחדד סוגיות הקשורות בפונקציות הפוכות ובתחומיהן באמצעות השוואה בין 4 הפונקציות שלפניכם.

השלימו את הטבלאות 1א – 1ד הבאות, וענו על השאלות שאחריהן.

א **הפונקציה**	$g(x)$	$u(x)$ **היא הפונקציה ההפוכה של** $g(x)$
תבנית	$y = x^2$	
תחום	$\{x \mid x \ge 0\}$	
קבוצת הערכים	$\{y \mid y \ge 0\}$	
גרף הפונקציה		

ב **הפונקציה**	$f(x)$	$v(x)$ **היא הפונקציה ההפוכה של** $f(x)$
תבנית	$y = x^2$	
תחום	$\{x \mid x \le 0\}$	
קבוצת הערכים		
גרף הפונקציה		

ג **הפונקציה**	$m(x)$	$d(x)$ **היא הפונקציה ההפוכה של** $m(x)$
תבנית	$y = -x^2$	
תחום	$\{x \mid x \ge 0\}$	
קבוצת הערכים		
גרף הפונקציה		

ד **הפונקציה**	$n(x)$	$r(x)$ **היא הפונקציה ההפוכה של** $n(x)$
תבנית	$y = -x^2$	
תחום	$\{x \mid x \le 0\}$	
קבוצת הערכים		
גרף הפונקציה		

טבלה 1

שאלות למחשבה

1. אילו מרכיבי ידע ניתן לחדד באמצעות הפונקציות המוצגות בפעילות?
2. האם באחת הטבלאות סרטוט הגרף של הפונקציה ההפוכה היה לכם פשוט יותר ממציאת התבנית?
3. מהו הסדר הרצוי לדעתכם להצגת הטבלאות לתלמידים?

פעילות 2: מתבנית הפונקציה אל תבנית הפונקציה ההפוכה

להלן שתי גישות למציאת הפונקציה ההפוכה לפונקציה ממשית. בגישה א, המתאימה למקרים פשוטים בלבד, תהליך המעבר מתבנית של פונקציה אל תבנית הפונקציה ההפוכה נעשה באופן מילולי.
גישה ב מחייבת שני שלבים, שבאחד מהם מחליפים את מקומות המשתנים.

גישה א – החזרת המצב לקדמותו

נתבונן בפונקציה $f(x)=2x-4$.

מציאת התמונה המתאימה למקור x כרוכה בכפל המשתנה ב- 2 והפחתת 4 מהתוצאה.
כדי להחזיר את המצב לקדמותו צריך להוסיף לתמונה, שהיא המקור של הפונקציה ההפוכה, 4 ולחלק את התוצאה ב- 2.
לכן הפונקציה ההפוכה היא: $f^{-1}(x)=\frac{x+4}{2}$

הערה: מעניין לראות כי בתבנית הפונקציה ההפוכה, סדר ותוכן הפעולות במקור x הפוך לאלה שבתבנית של פונקציית המוצא.

גישה ב – החלפת מקומות המשתנים

בגישה זו נוח יותר לרשום את תבנית הפונקציה כ- $y=2x-4$. כדי שנוכל למצוא את תבנית הפונקציה ההפוכה נחליף את המקומות של המשתנים ונרשום:

$$x=2y-4$$

אם נבודד במשוואה זו את y , נגיע לתבנית הפונקציה ההפוכה:

$$y=\frac{x+4}{2}.$$

הערה: לאותה תוצאה ניתן להגיע אם תחילה נבודד את x בתבנית פונקציית המוצא, ואחר כך נחליף את מקומות המשתנים.

ציינו יתרונות וחסרונות של כל אחת מן הגישות המוצגות לעיל.

הערה

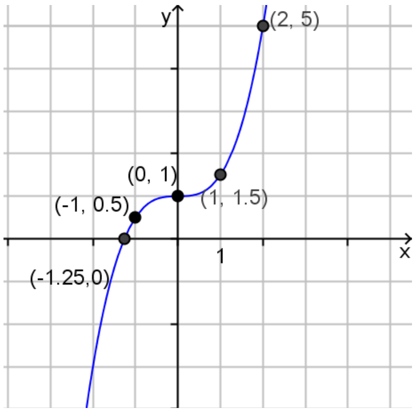
לא תמיד ניתן למצוא תבנית מפורשת של פונקציה הפוכה, גם כאשר הפונקציה ההפוכה קיימת. למשל, הפונקציה $y=f(x)=x+x^5$ עולה במובן החזק בכל התחום $-\infty<x<\infty$. לכן בתחום זה יש לה פונקציה הפוכה, ובכל זאת לא נוכל למצוא את התבנית האלגברית של הפונקציה ההפוכה, כי אין לנו כלים לפתור את המשוואה $y=x+x^5$ ביחס ל- x בצורת נוסחאות מפורשות. יחד עם זאת במקרים רבים מסוג זה לא קשה למצוא ערכים אחדים של הפונקציה ההפוכה $g\left(x\right)$, על-ידי חישוב הערכים של הפונקציה הנתונה. למשל, אם $f(x)=x+x^5$, אז:

$$f\left(-1\right)=-2 \quad \Rightarrow g\left(-2\right)=-1$$
$$f\left(0\right)=0 \quad \Rightarrow g\left(0\right)=0$$
$$f\left(1\right)=2 \quad \Rightarrow g\left(2\right)=1$$
$$f\left(2\right)=34 \quad \Rightarrow g\left(34\right)=2$$

פעילות 3: מגרף של פונקציה אל גרף הפונקציה ההפוכה

באיור 5 מופיע גרף של פונקציה f ללא תבנית הפונקציה.

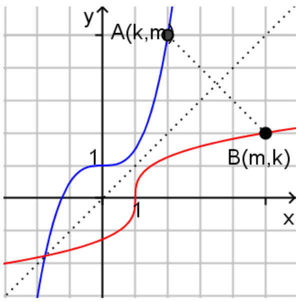
לכל אחת מן הנקודות המופיעות בסרטוט סמנו את הנקודה המתאימה על גרף הפונקציה ההפוכה.
הוסיפו לסרטוט, ביד חופשית, את גרף הפונקציה ההפוכה.
מה הקשר בין הגרפים?



איור 5

באיור 6 מופיעים זה לצד זה הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f^{-1}(x)$.
ניתן לראות כי הגרפים סימטריים זה לזה ביחס לישר $y=x$

בעמוד 271 מתואר מהלך דידקטי להמחשת הקשר בין הגרף של הפונקציה הריבועית בתחום $x\geq 0$, לבין הגרף של פונקציית השורש הריבועי, באמצעות הפיכה פיסית של מערכת הצירים. מהלך זה ניתן לאמץ, כמובן, להמחשת הקשר בין הגרפים של כל שתי פונקציות הפוכות זו לזו. המהלך ממחיש את ה**משפט**:



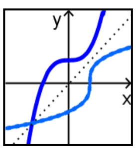
איור 6

גרפים של פונקציות הפוכות סימטריים זה לזה ביחס לישר $y=x$.

הוכחה

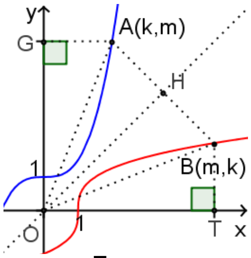
נוכיח את המשפט בדרך אלגברית.
כדי להראות ששתי צורות הן סימטריות ביחס לישר, יש להראות שלכל נקודה על אחת הצורות קיימת נקודה סימטרית על הצורה השנייה, כך שהישר הוא אנך אמצעי לקטע המחבר את הנקודות.
אם $A(k,m)$ נקודה על גרף הפונקציה $y=f(x)$, אז לפי הגדרת הפונקציה ההפוכה $B(m,k)$ היא נקודה על גרף הפונקציה $y=f^{-1}(x)$.
שיפוע הקטע AB הוא (-1) ולכן הוא מאונך לישר $y=x$ ששיפועו 1.
נקודת האמצע של הקטע AB נמצאת על הישר $y=x$ (מדוע?).
מכאן שהישר $y=x$ הוא אנך אמצעי לקטע AB. הנקודות A ו- B סימטריות ביחס ל- $y=x$
הראינו שלכל נקודה על הגרף של f יש נקודה על הגרף של f^{-1}, סימטרית לה ביחס לישר $y=x$, ומכאן שגרפים אלה סימטריים זה לזה ביחס לישר $y=x$.

כתמי דיו ...



אפשר לקבל את גרף הפונקציה ההפוכה גם בדרך הבאה:
נסרטט את גרף הפונקציה המקורית "בדיו מלכלך".
במהירות נקפל את הדף לאורך הישר $y=x$ ונפתח. הדיו שלא הספיק להתייבש יעתיק אל הניר המקופל את גרף הפונקציה ההפוכה.

אפשר גם אחרת



איור 7

באיור 7 חברו את A ו- B עם ראשית הצירים, והוכיחו את המשפט על-ידי חפיפת משולשים.

נקודות למחשבה

א. האם ייתכן כי לגרפים של שתי פונקציות הפוכות אין אף נקודה משותפת? אם כן, תנו דוגמה.

ב. ידוע כי לגרפים של שתי פונקציות הפוכות יש נקודה משותפת אחת. כיצד תוכלו לאפיין אותה?

ג. האם יתכן שגרפים של שתי פונקציות הפוכות נפגשים בשתי נקודות בדיוק? אם כן – תנו דוגמה (ועוד אחת...).

ד. האם ייתכן שגרפים של שתי פונקציות הפוכות נפגשים ביותר מאשר שתי נקודות? נמקו את תשובתכם.

ה. האם קיימת פונקציה שהגרף שלה מתלכד עם גרף הפונקציה ההפוכה לה? אם לא – הסבירו מדוע. אם כן, תנו דוגמה. האם קיימות דוגמאות נוספות?

ו. בכל מקום שהבאתם יותר מדוגמה אחת, בחנו את הדוגמאות: איזו פשוטה יותר? איזו מפתיעה? איזו ניתנת להכללה?

מבחר פתרונות

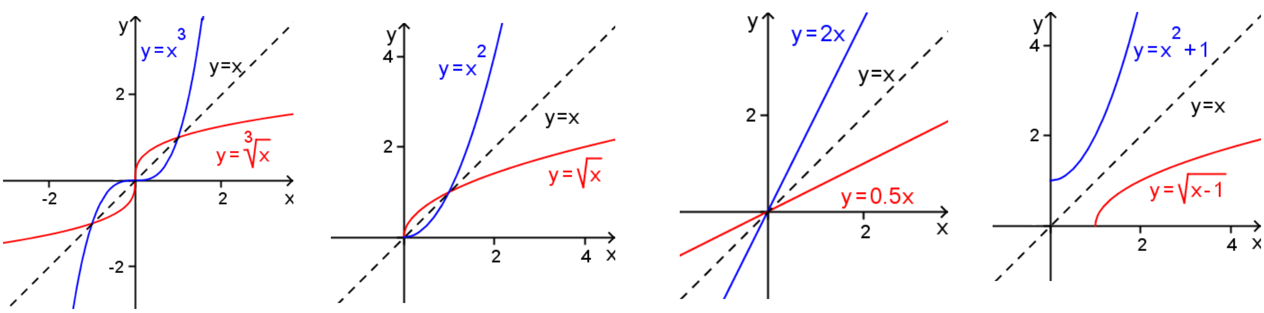
א. המצב ייתכן. למשל, לפונקציה $y=x^2+1$ בתחום $x\ge 0$ קיימת פונקציה הפוכה $y=\sqrt{x-1}$, המוגדרת בתחום $x\ge 1$ (איור 8א). כדי להוכיח שהגרפים לא נפגשים, נראה כי גרף הפונקציה $y=x^2+1$ נמצא כולו מעל הישר $y=x$, ואילו גרף הפונקציה $y=\sqrt{x-1}$, נמצא כולו מתחת לישר זה.

ב. הנקודה המשותפת של הגרפים של פונקציות הפוכות, אם היא קיימת, נמצאת תמיד על הישר $y=x$. למשל, הגרפים $y=2x$ ו- $y=0.5x$ נפגשים בראשית הצירים (איור 8ב).

ג. כן, למשל, הגרפים $y=x^2$ ו- $y=\sqrt{x}$ בתחום $x\ge 0$ נפגשים בשתי נקודות $(0,0)$ ו- $(1,1)$ (איור 8ג).

ד. כן, למשל, הגרפים $y=x^3$ ו- $y=\sqrt[3]{x}$ נפגשים בשלוש נקודות (איור 8ד).

ד ג ב א



איור 8

ה. כן, למשל, הפונקציה ההפוכה של $f(x)=1-x$ שווה לה. חשבו על דוגמה: פשוטה יותר, מורכבת יותר, מכלילה את שתי הדוגמאות הקודמות.

פעילות 4: פונקציות הפוכות לעצמן

1. רשמו את הפונקציות ההפוכות לפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ בתחום $0\le x\le 5$ **ב.** $g(x)=\sqrt[3]{27-x^3}$ **ג.** $h(x)=15-x$.

לכל אחת מן הפונקציות רשמו את קבוצת התמונות.

2. הפונקציות בסעיף 1 הפוכות לעצמן. אם לא קיבלתם בתור פונקציה הפוכה את הפונקציה המקורית פשטו את הביטוי שקיבלתם עד שתתקבל הפונקציה המקורית.
מה משותף לגרפים של שלוש הפונקציות בסעיף 1?

3. מה משותף לתבניות של שלוש הפונקציות בסעיף 1?

4. בחרו מספר מתחום הפונקציה f והציבו אותו בתבנית הפונקציה. חזרו והציבו את התוצאה בתבנית הפונקציה. מה קיבלתם? האם זה מקרי? בדקו בשתי הפונקציות הנוספות מסעיף 1.

השאלות בפעילות זו מובילות להכללה ומבליטות מאפיינים אחדים של פונקציות הפוכות לעצמן:

- הגרף של פונקציה הפוכה לעצמה סימטרי ביחס לישר $y=x$.
- את התבנית $y=f(x)$ של פונקציה הפוכה לעצמה ניתן, על-ידי שינויים אלגבריים מתאימים, להביא לצורת משוואה "סימטרית", כלומר, משוואה בה המשתנים x,y נמצאים באותו אגף ויש להם תפקידים סימטריים, כך שהחלפת מקומותיהם לא משנה את המשוואה.
למשל, את $y=\sqrt{25-x^2}$ ניתן לרשום $x^2+y^2=25$. משוואה זו סימטרית ביחס למשתנים x,y. בדומה, את התבניות $y=\sqrt[3]{27-x^3}$ ו- $y=15-x$ ניתן להביא למשוואות סימטריות $x^3+y^3=27$ ו- $x+y=15$, בהתאם.
- כשמציבים בתבנית של פונקציה הפוכה לעצמה ערך כלשהו, מקבלים בחזרה את אותו הערך. במילים אחרות: אם f הפוכה לעצמה אז $f\left(f\left(x\right)\right)=x$.

עוד על פונקציות הפוכות לעצמן בפרק על פונקציה מורכבת.

פעילות 5: פונקציה הפוכה לפונקציה קווית

לכל פונקציה קווית $f(x)=ax+b$ שאיננה פונקציה קבועה, קיימת פונקציה הפוכה.

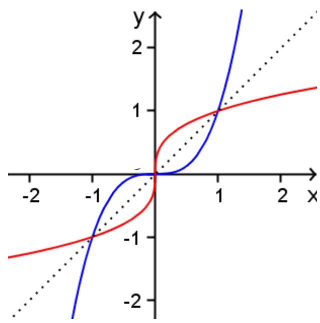
1. מדוע אין לפונקציה קבועה פונקציה הפוכה?
2. הראו כי הפונקציה ההפוכה של פונקציה קווית אף היא פונקציה קווית. (אפשר להיעזר באחת מן הגישות שהוצגה בפעילות 2.)
3. הפונקציות $f(x)=x$, וכל הפונקציות מהמשפחה $f(x)=-x+b$ הפוכות לעצמן. האם ישנן פונקציות קוויות נוספות שהן הפוכות לעצמן? נסו לנמק את תשובתכם בדרכים אחדות.

פעילות 6: פונקציית החזקה עם מעריך טבעי $f(x)=x^n$ $\left(n\in\mathbb{N}, n>1\right)$

נבחין בין שני מקרים, n זוגי ו- n אי-זוגי.

פונקציות חזקה עם מעריך אי-זוגי

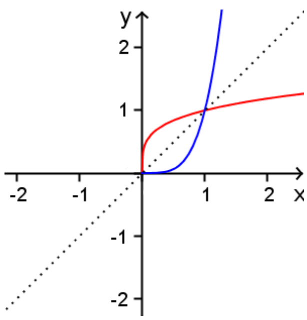
פונקציות חזקה עם מעריך אי-זוגי הן מונוטוניות עולות, והן פונקציות חד-חד ערכיות מ- $\mathbb{R}$ על $\mathbb{R}$. לכן יש להן פונקציות הפוכות. הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x)=x^n$ היא $g(x)=\sqrt[n]{x}$. באיור 9 מוצגים גרפים של פונקציות הפוכות זו לזו במקרה $n=3$. הוסיפו את גרף הפונקציה $f(x)=x^5$, ואת גרף הפונקציה ההפוכה לה.



איור 9

פונקציות חזקה עם מעריך זוגי

כמו במקרה של הפונקציה הריבועית, פונקציות חזקה עם מעריך זוגי בכל ה- $\mathbb{R}$ אינן חד-חד ערכיות ואינן על $\mathbb{R}$. לכן אין להן פונקציות הפוכות. כדי לקבל פונקציה הפיכה שמבוססת על פונקציית חזקה עם מעריך זוגי, מצמצמים את התחום ואת הטווח של הפונקציה. פונקציית השורש $g(x)=\sqrt[n]{x}$, כאשר n זוגי היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה המוגדרת כ- $f(x)=x^n \quad f:R_+\to R_+$.



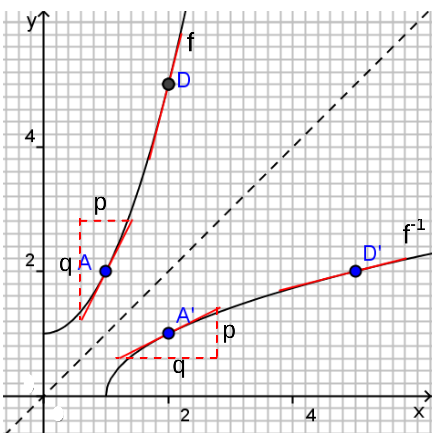
איור 10

באיור 10 מוצגים גרפים של פונקציות הפוכות במקרה $n=4$. הוסיפו את הגרפים של פונקציות הפוכות זו לזו במקרים $n=2$ ו- $n=6$.

פעילות 7: לקראת הצגת הנגזרת של פונקציה הפוכה

ראינו כי הגרפים של פונקציות הפוכות זו לזו סימטריים זה לזה ביחס לישר $y=x$. סימטריה זו היא ביטוי לעובדה שבמעבר מגרף של פונקציה לגרף הפונקציה ההפוכה הצירים מחליפים תפקידים. נבדוק את ההשפעה של תכונה זו על שיפועי המשיקים לגרפים של פונקציות בנקודות סימטריות ביחס לישר $y=x$. באיור 11 מוצגים הגרפים של פונקציה $y=f(x)$ ושל הפונקציה ההפוכה לה $y=f^{-1}(x)$.

ענו על השאלות הבאות מבלי להתבסס על נגזרת הפונקציה ההפוכה.



איור 11

א. מצאו בעזרת המשבצות את שיפועי המשיקים לגרפים של פונקציות בנקודה A ובנקודה A' הסימטרית ל- A ביחס לישר $y=x$. מה הקשר בין השיפועים? האם הקשר מקרי?

ב. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה D הוא 4. מהו שיפוע המשיק לגרף הפונקציה f^{-1} בנקודה D'? כיצד קבעתם זאת?

השאלות נועדו להמחיש, באמצעות הקשר בין הגרף של פונקציה f לגרף הפונקציה ההפוכה לה, ששיפועי המשיקים לגרפים של שתי פונקציות הפוכות, בנקודות סימטריות ביחס לישר $y=x$, הם מספרים הופכיים. מהחלפת תפקידי הצירים בזמן הגדרת פונקציה הפוכה, נובע כי אם שיפוע המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה A הוא $\frac{p}{q}$ אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה f^{-1} בנקודה A' הוא $\frac{q}{p}$.

מתכונת ההופכיות של שיפועי פונקציות הפוכות, אשר הובחנה לעיל באופן ניסיוני ויזואלי, נובע הקשר בין הנגזרות של פונקציות הפוכות. קשר זה בא לידי ביטוי במשפט הבא.

משפט על הקשר בין הנגזרות של פונקציות הפוכות

תהיינה f ו- g שתי פונקציות רציפות, הפוכות זו לזו. אם לאחת הפונקציות קיימת בנקודה (a,b) נגזרת עם ערך k שונה מאפס, אז לפונקציה השנייה יש בנקודה (b,a) נגזרת שערכה $\frac{1}{k}$.

הוכחה

כדי להוכיח את הטענת המשפט, נכניס סימונים מתאימים. תהי $y=f(x)$ פונקציה חד-חד-ערכית מתחום D בציר x **על** קבוצה E בציר y, כך ש- E היא קבוצת הערכים של f. תהי $x=g(y)$ פונקציה הפוכה ל- f, אשר תחומה E וקבוצת ערכיה D.

לפי הגדרת הנגזרת:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

$$x'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad (2)$$

היות ולפי הנחת המשפט, $y=f(x)$ ו- $x=g(y)$ הן פונקציות רציפות, התנאי $\Delta x\to 0$ גורר את התנאי $\Delta y\to 0$, ולהפך, התנאי $\Delta y\to 0$ גורר את התנאי $\Delta x\to 0$.

כל אחת מהפונקציה $y=f(x)$ ו- $x=g(y)$, בהיותה הפיכה, היא פונקציה חד-חד-ערכית, ולכן התנאי $\Delta x\neq 0$ גורר את התנאי $\Delta y\neq 0$ ולהיפך.

נניח כי בנקודה כלשהי $x\in D$ מתקיים $y'(x)\neq 0$, כלומר, קיים גבול (1) השונה מ- 0. על-פי המסקנות לעיל וחוקי גבולות מקבלים שבנקודה $y\in E$ שהיא התמונה של x ב- E קיים גבול (2), כלומר:

$$x'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}=\frac{1}{y'(x)}$$

בכך הוכח כי:

(*) $x'(y)=\frac{1}{y'(x)}$, כאשר $x\in D$, $y'(x)\neq 0$ ו- $y=f(x)\in E$.

מכאן, היות ופונקציות הפוכות $y=f(x)$ ו-$x=g(y)$ סימטריות, הן בהגדרתן הן בתכונותיהן, נובע כי

(**) $y'(x)=\frac{1}{x'(y)}$, כאשר $y\in E$, $x'(y)\neq 0$ ו- $x=g(y)\in D$.

טענת המשפט הוכחה.

הערה

בישומי המשפט, לפעמים משתמשים בנוסחה (*), לפעמים בנוסחה (**), תלוי אם מוצאים נגזרת של פונקציה הפוכה על-פי הנגזרת של הפונקציה המקורית, או, להיפך – נגזרת של פונקציה מקורית על-פי הנגזרת של הפונקציה ההפוכה.

אפשר גם אחרת

בכיתה שכבר למדה את כלל השרשרת, אפשר לקבל את נוסחת הנגזרת של פונקציה הפוכה בדרך יותר פשוטה.
אם $f:D\to E$ ו- $f^{-1}:E\to D$ שתי פונקציות הפוכות, אז בכל נקודה $x\in D$ מתקיים:

$$f^{-1}\Big(\underbrace{f(x)}_{y}\Big)=x$$

מכאן, בהנחה ש- $f'(x)$ ו- $\left(f^{-1}\right)'(y)$ קיימות, על-פי כלל השרשרת לנגזרת של פונקציה מורכבת, מקבלים על-ידי גזירת שני אגפיה של הזהות לעיל:

$$\left(f^{-1}\right)'(y)\cdot f'(x)=x'=1$$

מכאן נובע כי $f'(x)\neq 0$ ו- $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

הערה

בפיתוח לעיל קיום הנגזרת של פונקציה הפוכה לא הוכח אלא הונח. לעומת זאת במשפט על הקשר בין הנגזרות של פונקציות הפוכות, נטען והוכח כי קיום הנגזרת $y'=f'(x)\neq 0$ בנקודה מסוימת $x\in D$, גורר את קיום הנגזרת $x'=\left(f^{-1}\right)'(y)$ בנקודה מתאימה $y\in E$.

לאור הנ"ל, הפיתוח באמצעות כלל השרשרת אינו יכול לשמש תחליף להוכחת המשפט. אבל הוא חשוב כמראה דרך בה ניתן למצוא נגזרת של פונקציה הפוכה, אם כבר ידוע שהיא קיימת.

הדוגמאות להלן מדגימות דרך למציאת נגזרת פונקציה נתונה על-ידי מעבר לפונקציה הפוכה.

דוגמאות

א. מצאו נגזרת של פונקציית השורש הריבועי $y=\sqrt{x}$ בתחום $x\geq 0$.

פתרון

מהקשר $y=\sqrt{x}$ מקבלים $x=y^2$. מוצאים: $x'(y)=2y$,

ומכאן עבור $y\neq 0$ מקבלים:

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ .$$

הנוסחה תקפה כאשר $x>0$.

מהלך דידקטי אפשרי להצגת הנגזרת של פונקציית השורש הריבועי, המתבסס על הקשר בין תכונות הפונקציה לבין תכונות הפונקציה ההפוכה לה, מבלי להכיר קודם את הנגזרת של פונקציה הפוכה מוצג בעמוד 271. המהלך המוצג שם יכול להוות נחיתה רכה לנושא הפונקציה ההפוכה, ויכול לעמוד בפני עצמו.

ב. מצאו את הנגזרות של פונקציות השורש האחרות, $y=\sqrt[n]{x}$, n מספר טבעי, בתחום המתאים.

פתרון

כאשר n מספר זוגי, השורש $y=\sqrt[n]{x}$ הוא פונקציה מ- $\mathbb{R}_+$ על $\mathbb{R}_+$.

כאשר n מספר אי-זוגי, השורש $y=\sqrt[n]{x}$ הוא פונקציה מ- $\mathbb{R}$ על $\mathbb{R}$.

פונקציות אלה הפיכות.

מהקשר $y=\sqrt[n]{x}$ מקבלים $x=y^n$ (המשתנה x נמצא בתחום השורש $y=\sqrt[n]{x}$, ו- y בקבוצת הערכים שלו.) הנגזרת של הפונקציה ההפוכה היא: $x'(y)=ny^{n-1}$.

מכאן (בתנאי ש- $y\neq 0$) מוצאים:

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}.$$

הנוסחה תקפה לכל $x\neq 0$ בתחום של $\sqrt[n]{x}$.

עוד על פונקציות הפוכות ועל נגזרות של פונקציות הפוכות בפרק על פונקציות טריגונומטריות הפוכות (עמוד 417), ובפרק על פונקציות לוגריתמיות (עמוד 442)

הפונקציה ההפוכה - עיקרי הדברים

- **פונקציה הפוכה** לפונקציה נתונה $y=f(x)$ היא פונקציה המתאימה לכל ערך של y את ערך x המתאים לו.
- פונקציה הפוכה לפונקציה נתונה קיימת אם ורק אם, הפונקציה הנתונה היא העתקה חד-חד-ערכית מהתחום שלה על הטווח. פונקציה שיש לה פונקציה הפוכה נקראת **פונקציה הפיכה**.
- לפונקציות שאינן חד-חד-ערכיות ניתן לפעמים להגדיר פונקציה הפוכה **בתחום חלקי**. למשל, לפונקציה $y=x^2$ ניתן להגדיר פונקציה הפוכה בתחום $x\geq 0$. פונקציה זו היא פונקציית השורש הריבועי.
- פונקציה **מונוטונית** (עולה או יורדת) במובן חזק בתחום כלשהו, היא פונקציה חד-חד-ערכית בתחום זה, ולכן בתחום זה קיימת לה פונקציה הפוכה.
- לעתים, כמו במקרה של פונקציה הפוכה לפונקציה ליניארית שאינה קבועה, ניתן למצוא את כלל ההתאמה של הפונקציה ההפוכה **בדרך אלגברית**.
- במקרים אחדים, למשל, במקרה של פונקציה $y=x+x^5$, לא ניתן למצוא את כלל ההתאמה לפונקציה הפוכה בדרך אלגברית, אם כי פונקציה זו קיימת וניתן להציג אותה בדרך גרפית.
- **הגרפים** של הפונקציות $y=f(x)$ ו- $y=g(x)$ ההפוכות זו לזו, סימטריים זה לזה ביחס לישר $y=x$.
- אם פונקציה $y=f(x)$ היא פונקציה חד-חד-ערכית שתחומה D וקבוצת ערכיה E, והיא גזירה בתחום D, אזי היא הפיכה בתחום D. הפונקציה ההפוכה $y=g(x)$ גזירה בכל נקודה $x\in E$ שבה הפונקציה רציפה ו- $f'(g(x))\neq 0$. בין הנגזרות מתקיים הקשר: $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$.