وزارة المعارف
السكرتارية التربوية – دائرة العلوم
التفتيش على تدريس الرياضيات

وحدة تعليمية في موضوع "حساب المثلثات في المثلثات قائمة الزاوية"

http://www.hebrewkhan.org/lesson/533

القليل من التاريخ

المعنى الحرفي لكلمة "علم المثلثات טריגונומטריה Trigonometry" هو "قياس المثلثات".

"טריגונו Trigono"– من اليونانية - مثلّث

"מטריה metry " - من اليونانية- قياس

علم المثلثات، هو فرع من الرياضيات الذي يعمل، من بين أمور أخرى، في بحث المثلثات والعلاقة التي بين أطوال اضلاعها وزواياها. في المثلّث القائم الزاوية هناك ملائمة بين مقدار الزاوية والنسبة بين أطوال أضلاع المثلّث، على سبيل المثال النسبة بين طولي الضلعين القائمين أو بين أحد الاضلاع القائمة والوتر. هذه التناظرات هي جزء من مجموعات الدوال المثلثية والتي يتم التوسع بها خلال التعليم.

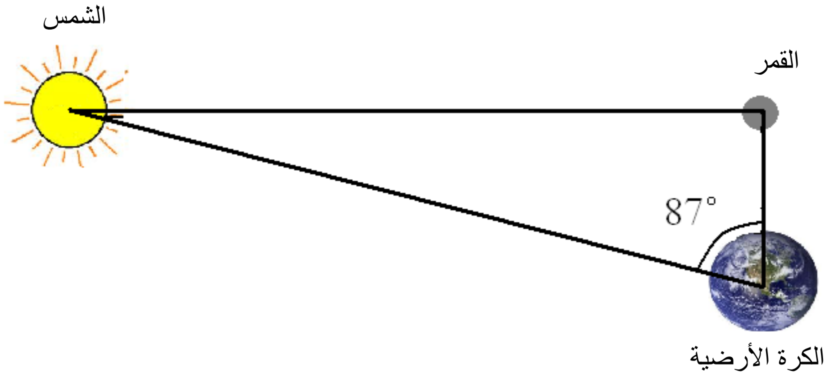
علم المثلّثات، كعلم يبحث العلاقات بين الزوايا والاضلاع في مثلثات وأشكال هندسية أخرى. تاريخه منذ أكثر من ألفي سنة. في أغلبية الحالات لا يمكن ايجاد هذه العلاقة بواسطة عمليات جبرية عادية، لذلك كانت هناك حاجة لتطوير اداة رياضية جديدة التي تمكّن من اجراء حساب الأضلاع والزوايا لأشكال هندسية مختلفة.

بدأ علم المثلثات في القرن الـ 3 قبل الميلاد كجزء من الهندسة. كانت معروفة صفات العلاقات بين اجزاء المثلّث في مصر القديمة، لكن فكرة قياس الزوايا اكتشف متأخرًا أكثر، على يد اليونانيين القدماء، لذلك من المقبول رؤية بداية علم المثلثات في هذه الفترة. هذه فترة إقليدس المعروف لدينا، من الهندسة، وارخميدس، المعروف لنا من قوانين الفيزياء.

يفترض المؤرخون أنّ علم المثلثات ولد على يد علماء فلك قدامى، وبعد ذلك بقليل بدأوا باستعمالها لقياس قطع الارض وايضا في الفن المعماري.

ظهر تفسير منطقي عام للعلاقات المثلثية في الهندسة اليونانية القديمة، لكن الرياضيين اليونانيين لم يحسبوها كجزء مستقل من الرياضيات انما رأوا فيها جزء من علم الفلك.

التقدّم الملحوظ في علم المثلثات متعلّق بعالم الفلك أرسطرخوس الساموسي (القرن الثالث قبل الميلاد). في كتابه "أبعاد الشمس والقمر" كتب عن تحديد الابعاد بين أجسام في الفضاء. أجرى ارسطرخوس حساباته عن طريق النسب بين اضلاع مثلث قائم زاوية وبين طول أحد أضلاعه المعروفة. تطرّق ارسطرخوس للمثلث القائم الزاوية الناتج بين الشمس، القمر والكرة الرضية (أنظروا الرسم).



فهو أراد أن يحسب طول الوتر (البعد بين الكرة الارضية والشمس) بواسطة الضلع القائم (البعد بين الكرة الارضية والقمر) ومقدار معلوم للزاوية الحادة (87°). من الواضح أنه بواسطة أدوات هندسية عادية لا تتوفّر امكانية حساب طول الوتر بشكل دقيق. وفق ارسطرخوس، البعد بين الكرة الارضية والشمس أكبر بـ 20 مرّة من بعد الكرة الارضية عن القمر. لم تكن حساباته دقيقة نتيجةَ الخطأ في قياس الزاوية. الحقيقة المعروفة اليوم أن الشمس تبعد عن الكرة الارضية 400 ضعف بعد الكرة الارضية عن القمر. رغم الخطأ، عمل ارسطرخوس هو تقدّم وحجر اساس في مجال العلوم.

أبرز إنجازات الرياضيين اليونانيين كانت حل أسئلة حساب كل اضلاع وكل زوايا مثلث اذا كانت معطاة الاضلاع الثلاثة، أو ان كان معطى ضلعان وزاوية واحدة أو ان كان معطى ضلع واحد وزاويتان.

حصل علم المثلثات على قوّة دافعة في القرن الـ 16 عندما استعمله البحّارة في قياس الزوايا لكواكب مختلفة، لتحديد مسار الابحار.

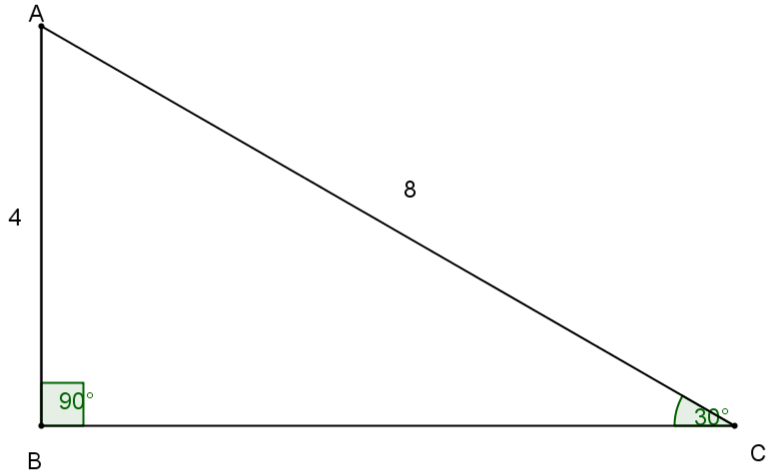
لعلم المثلثات تطبيقات كثيرة في العلوم المختلفة، أولًا وقبل كل شيء في الفيزياء (علم الميكانكيات، البصريات وغيرها)، في الكيمياء وعلم البلوريات، وفي العلوم الاخرى. أهميتها كبيرة خاصة في مجال القياسات الطوبوغرافية ويستعمل علم المثلثات في ايامنا تقريبا في كل مجال علمي، في الهندسة، الطب ومجالات أخرى.

(مناقشة)

أ. ماذا يمكنكم القول عن كل المثلثات القائمة الزاوية والتي فيها زاوية حادّة مقدارها معلوم، مثلاً °35؟

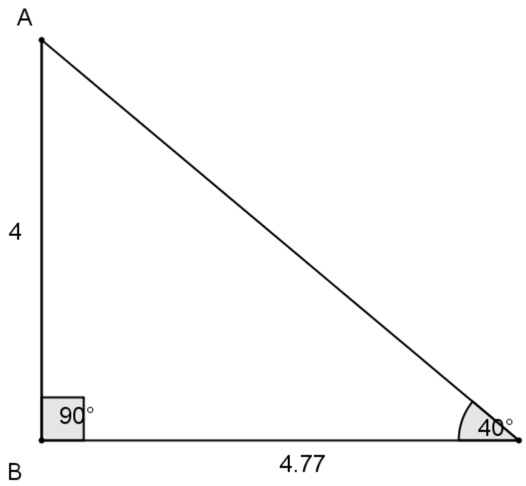
1. ما المعلوم عن زوايا المثلّثات؟
2. ما المعلوم عن أضلاع المثلثات؟
3. ما المعلوم عن النسبة بين أضلاع المثلّث؟

ب. ارسموا مثلثين قائمي الزاوية متشابهين مع المثلّث المعطى:



ما المشترك لكل هذه المثلثات؟

ت. ارسموا مثلّثين قائمي الزاوية متشابهين مع المثلّث المعطى:



ما المشترك لكل هذه المثلثات؟

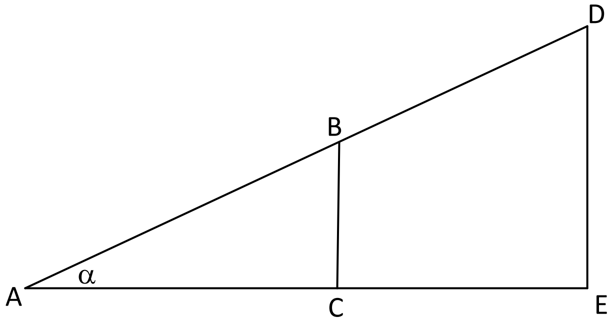
استنتاج: في كل المثلثات القائمة الزاوية النسبة بين الاضلاع هي مقدار ثابت عندما يكون للمثلثات نفس الزاوية لان المثلثات متشابهة.

في المثلّث القائم الزاوية هناك تناظر بين مقدار الزاوية وبين النسب المثلثيّة:

- **النسبة بين الضلع القائم المقابل للزاوية وبين الوتر.**
- **النسبة بين الضلع القائم المجاور للزاوية وبين الوتر.**
- **النسبة بين الضلع القائم المقابل للزاوية وبين الضلع القائم المجاور للزاوية.**

من الصواب أن نمعن النظر في النسب الثلاث التي بين أضلاع المثلث المناظرة لنفس الزاوية. التناظر بين مقدار الزاوية وبين النسب المثلثية هي السبب.

تمارين – مراجعة تشابه المثلثات



1. تمعّنوا في الرسم أمامكم:
القطعتان BC و- DE تعامدان القطعة AE.
ينتج لدينا مثلثان قائما الزاوية متشابهان.

$\Delta ABC \sim \Delta ADE$

أ. لماذا يتشابه المثلثان؟

ب. سجّلوا ازواجًا من الزوايا المتساوية.

ت. سجّلوا أزواجًا من الاضلاع المتناظرة.
ث. معطى أنّ: AD = 10 سم، BC = 3 سم، AC = 4 سم.

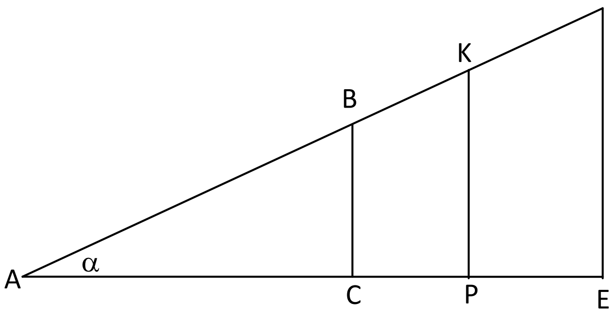
1.احسبوا طول القطعة: AB

2. احسبوا طول القطعتين AE، DE

ج. احسبوا النسب التالية: $\frac{DE}{AD}$ (2) , $\frac{BC}{AB}$ (1)

فسّروا النتيجة التي حصلتم عليها.

2. المعطيات من السؤال الاول 1 سارية للسؤال التالي: النقطة P، منتصف القطعة CE. ننزل ارتفاعا على الضلع AE والذي يقطع الضلع AD في النقطة K.



أ. برهنوا أنّ المثلّث ABC والمثلّث AKP هما مثلثان متشابهان.

ب. احسبوا أطوال القطع KP، AP و AK والنسبة: $\frac{KP}{AK}$ (3)

ت. هل حصلتم على أنّ: $\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{KP}{AK}$ ؟ اشرحوا.

المساواة بين النسب التي حصلنا عليها نابعة من مقدار الزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية، لانّ لكل زاوية حادّة في المثلّث القائم الزاوية يلائم نسبة ثابتة بين الضلع القائم المقابل للزاوية وبين الوتر.

من المتّبع أن نشير لهذه النسبة بـ $\sin\alpha$ سينوس الفا، عندما تكون الفا مقدار الزاوية.

مقدار الزاوية α	$\frac{a}{c} = \sin\alpha$
36.87°	$\frac{3}{5} = 0.6$
30°	0.5
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$

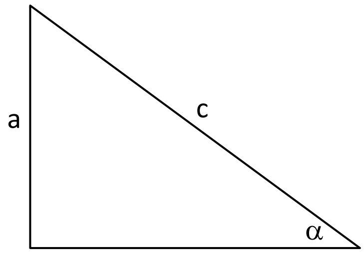
يصف الجدول العلاقة بين متغيّرين (الزاوية وسينوس الزاوية). لكل زاوية يمكننا أن نلائم قيمة سينوس الزاوية. لحساب ذلك نستعمل الحاسبة العلمية.

يمكننا ايجاد قيمة $\sin\alpha$ في الحاسبة لكل زاوية $0° \le \alpha \le 90°$.

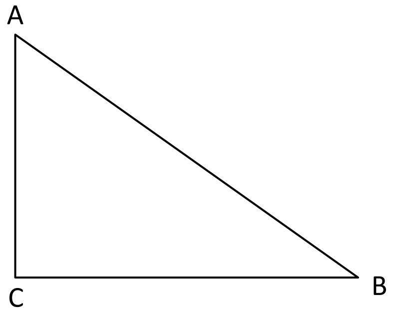
3. أكملوا الجدول بواسطة الالة الحاسبة:

لإيجاد قيمة الزاوية عليك الضغط في الالة الحاسبة على الزر $\sin^{-1}$

مقدار الزاوية α	$\frac{a}{c} = \sin\alpha$		مقدار الزاوية α	$\frac{a}{c} = \sin\alpha$
25°				0
50°				0.25
75°				0.50
80°				0.75
90°				0.9



حساب الاضلاع والزوايا في المثلثات– مسائل حسابية



4. معطى مثلّث قائم زاوية ABC ($\sphericalangle C = 90°$)
طول الوتر 12 سم والزاوية B مقدارها 40°.
احسبوا طول الضلع AC.

اقتراح للحل:

حساب : $\sin\sphericalangle B = \frac{AC}{AB}$

لذلك: $AC = AB \cdot \sin\sphericalangle\ B$

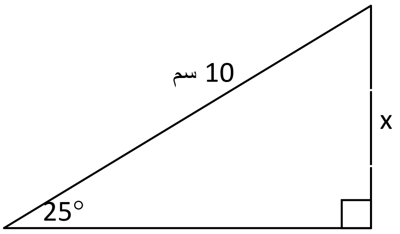
نعوّض القيم الملائمة في التعبير ونحسب بواسطة الالة الحاسبة:

$AC = 12 \cdot \sin 40° =$ 7.71 سم

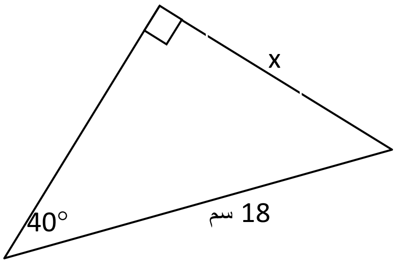
$AC = 12 \cdot \sin 40° = 7.71$

5. احسبوا طول الضلع x في كل واحد من المثلثات القائمة الزاوية التالية:

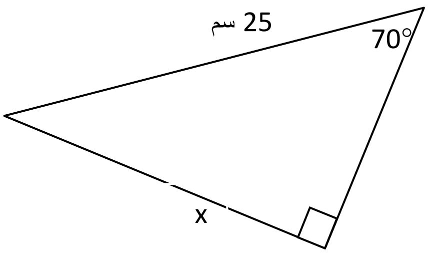
أ.



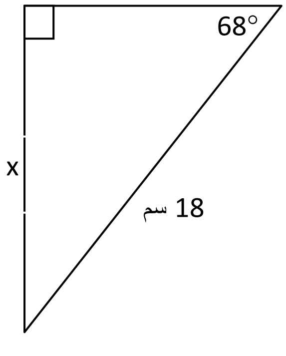
ب.

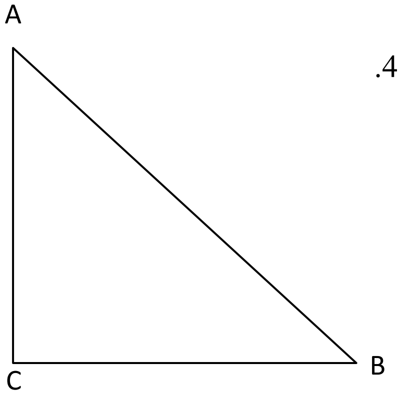


ت.



ث.





6. معطى مثلث قائم زاوية ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$)
طول الضلع القائم AC هو 12 سم والزاوية B مقدارها 40°.
احسبوا طول الوتر AB.

اقتراح للحل:

احسبوا: $$\sin\sphericalangle B = \frac{AC}{AB}$$

$$AB \cdot \sin\sphericalangle B = AC$$

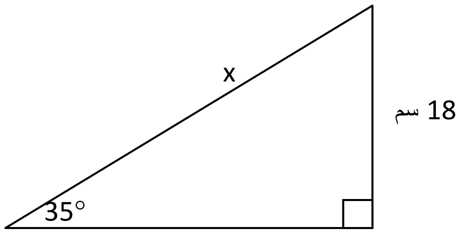
لذلك: $$AB = \frac{AC}{\sin\sphericalangle B}$$

نعوّض القيم الملائمة في التعبير ونحسب بواسطة الالة الحاسبة:

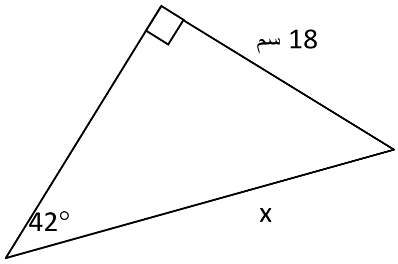
$$AB = \frac{12}{\sin 40^\circ} = 18.67$$

7. احسبوا طول الضلع x في كل واحد من المثلثات القائمة الزاوية التالية:

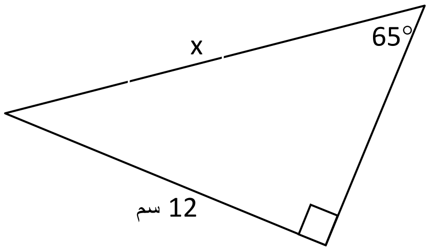
أ.



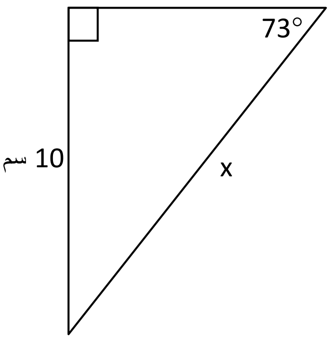
ب.



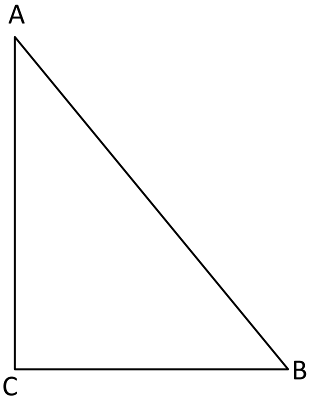
ت.



ث.



8.معطى مثلّث قائم زاوية ABC ($\sphericalangle C = 90°$)
طول الوتر AB هو 15 سم والزاوية A مقدارها 65°.
احسبوا طول الضلع القائم AC.



اقتراح للحل:

في هذا التمرين ليس معلومًا لنا طول الضلع القائم المقابل للزاوية. وهكذا، نستخدم الميزة بأن مجموع زوايا المثلّث 180°، ونحسب مقدار الزاوية B (التي تقابل الضلع AC).

$\sphericalangle B = 180° - (90° + 65°) = 25°$ وعليه يمكننا ان نكمل الحساب مثل تمرين 1.

احسبوا: $\sin\sphericalangle B = \frac{AC}{AB}$

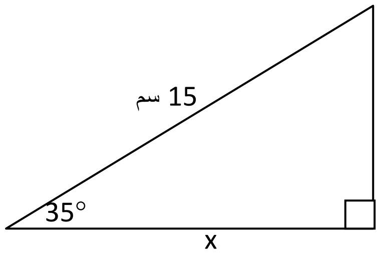
ولذلك: $AC = AB \cdot \sin\sphericalangle B$

نعوّض القيم الملائمة في التعبير ونحسب بواسطة الحاسبة:

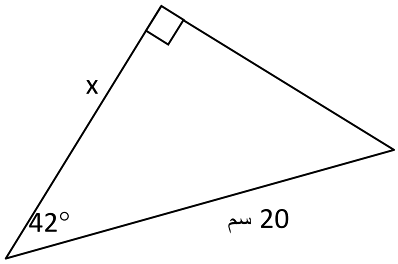
$$AC = 15 \cdot \sin 25° = 6.34$$

9.احسبوا طول الضلع x في كل واحد من المثلثات القائمة الزاوية التالية:

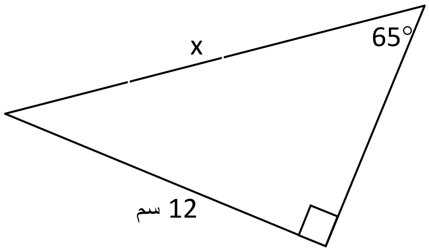
أ.



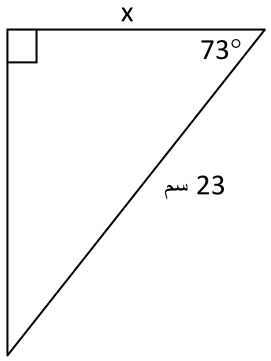
ב.



ג.



ד.



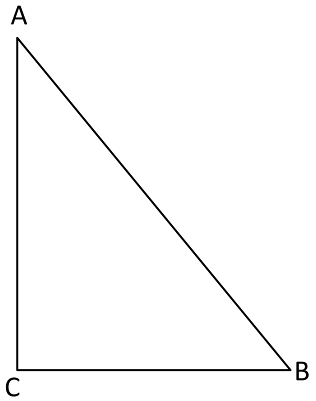
10.في مثلّث قائم زاوية ABC معطى:

$AB = 22$ سم، $\sphericalangle BAC = 35^\circ$، $\sphericalangle ACB = 90^\circ$
احسبوا:

أ. طولَي الضلعين القائمين CB و- AC.

ب. مساحة المثلّث.

ت. محيط المثلّث.



11.في المثلّث القائم الزاوية ABC معطى:

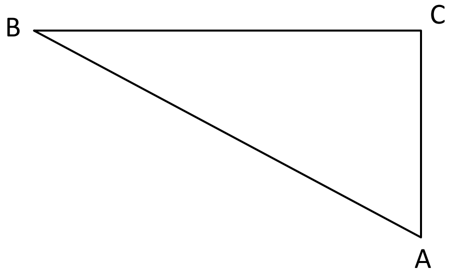
$BC = 15$ سم، $\sphericalangle ABC = 35^\circ$، $\sphericalangle ACB = 90^\circ$
احسبوا:

أ. طول الوتر AB

ب. طول الضلع القائم AC

ت. محيط المثلّث

ث. مساحة المثلّث

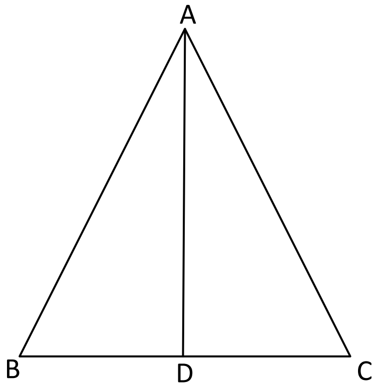


*12.معطى مثلّث متساوي الساقين ABC (AC = AB) طول ساق المثلّث 12 سم.
زاويتا القاعدة مقدارهما 50° كل واحدة.
احسبوا:

أ. ارتفاع المثلّث (AD).

ب. طول قاعدة المثلّث (BC).

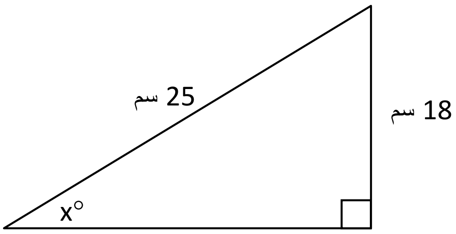
ت. مساحة المثلّث ABC



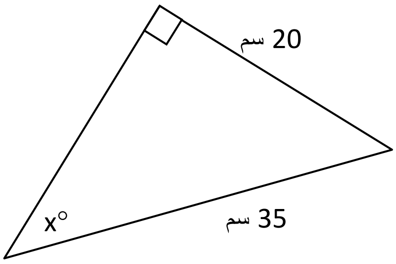
ارشاد: في المثلّث المتساوي الساقين الارتفاع على القاعدة متوسطًا عليها.

13.احسبوا مقدار الزاوية- x في كل واحد من المثلّثات التالية[1]:

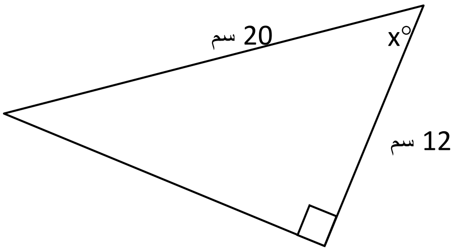
أ.



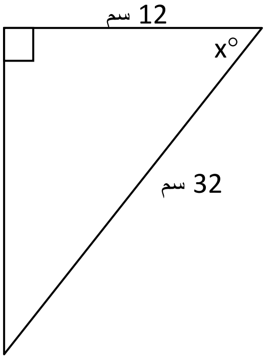
ب.



*ت.

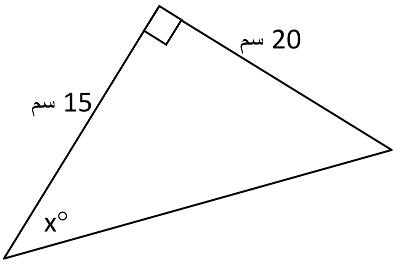


*ث.

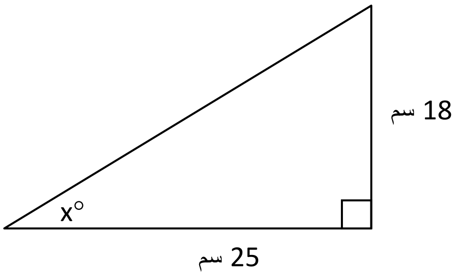


14.احسبوا مقدار الزاوية- x في المثلثات التالية: (استعينوا في نظرية فيثاغورس)

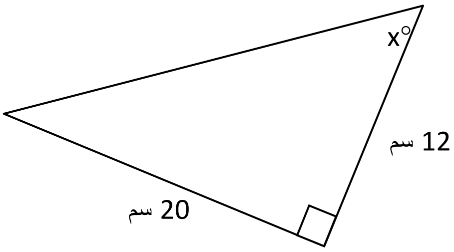
أ.



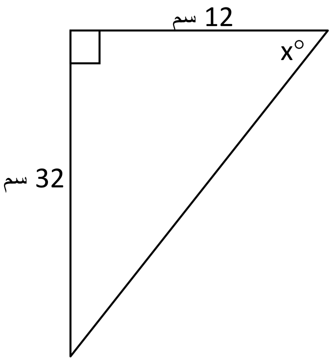
ب.



ت.



ث.



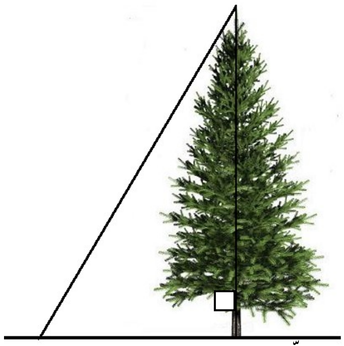
---

[1] حسب الحاجة يمكن الاستعانة في نظرية فيثاغورس أو في مجموع زوايا المثلّث.

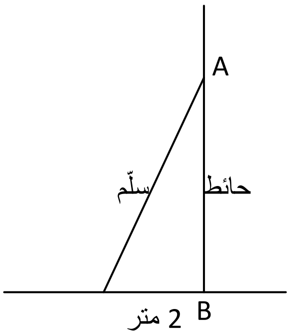
15. من أعلى الشجرة وعلى ارتفاع 12 مترًا شدّوا حبلًا حتى الارض طوله 15 مترًا وثبّتوه بواسطة وتدٍ في الارض.

أ. على أيّ بعد من الشجرة ثبتّوا الوتد؟

ب. ما هو مقدار الزاوية التي بين الحبل والارض؟



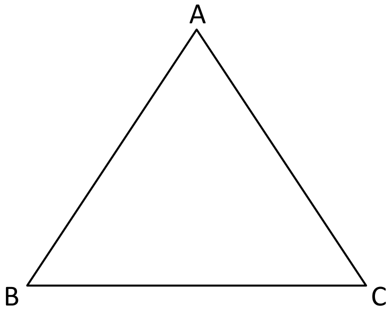
16. سلّم طوله 8 امتار يتكئ على حائط (أنظروا الرسم). البعد بين الحائط والسلّم هو متران.



أ. لأي ارتفاع يصل السلّم (ما هو طول AB)؟

ب. ما هو مقدار الزاوية التي بين السلّم والحائط؟

*17. في مثلّث متساوي الاضلاع ABC طول المتوسّط هو 8 سم.



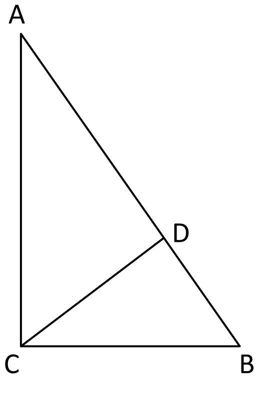
أ. احسبوا طول ضلع المثلّث.

ب. احسبوا حيط المثلّث.

ت. ما هو طول الارتفاع في المثلّث؟ فسّروا

ث. احسبوا مساحة المثلّث.

*18. في مثلّث قائم زاوية ABC ($\sphericalangle ACB = 90°$)
CD هو الارتفاع على الوتر.
معطى: 25 سم = CD و- 30 سم = CB.

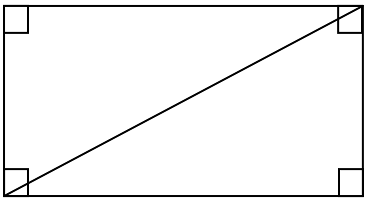


أ. احسبوا مقدار الزاوية $\sphericalangle DBC$

ب. احسبوا طول الضلع القائم AC

ت. احسبوا مساحة المثلّث ABC

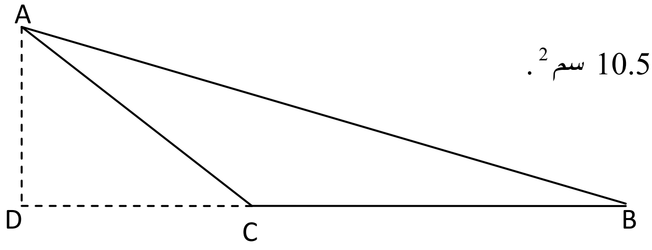
ث. احسبوا طول الوتر AB.



19.أطوال أضلاع مستطيل هي 12 سم و- 8 سم.

أ. احسبوا طول قطر المستطيل.

ب. احسبوا مقدار الزاوية التي يصنعها القطر مع كل ضلع من أضلاع المستطيل.



*20.مساحة مثلّث منفرج الزاوية ABC هي 10.5 سم^2 .

معطى: $BC = 7$ سم ، $AC = 5$ سم.

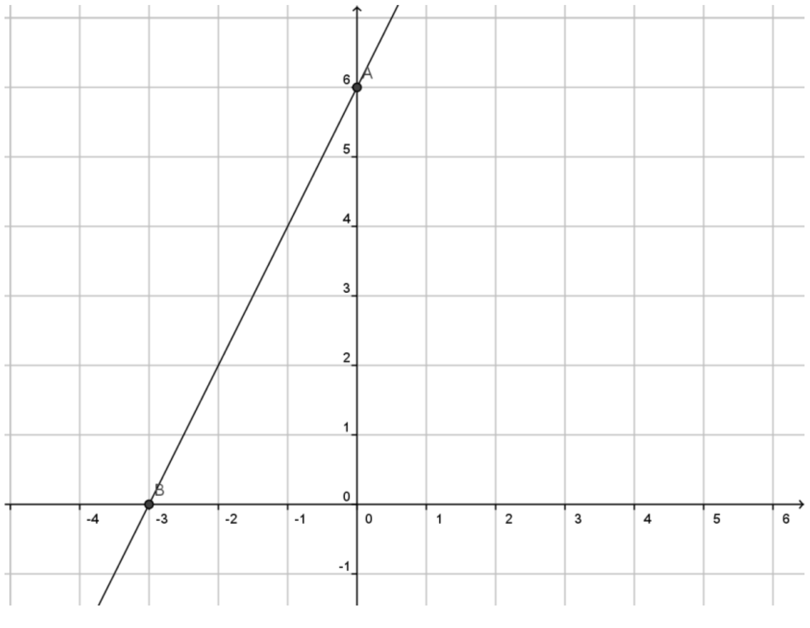
أ. احسبوا الارتفاع على الضلع- BC

ب. احسبوا مقدار الزاوية ∢ACB

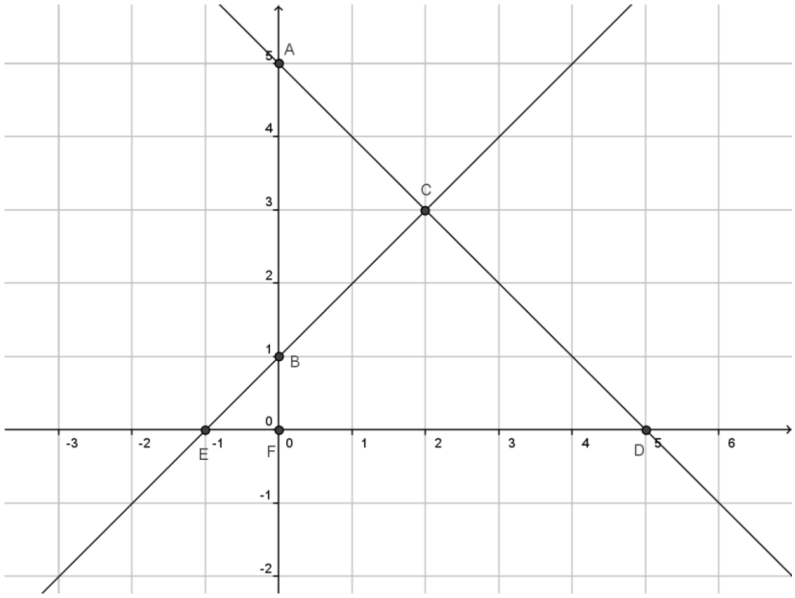
21.معطى الخط المستقيم $y = 2x + 6$. A و- B هما نقطتا تقاطع المستقيم مع المحورين.

أ. ما هو طول القطعة AB؟

ب. ما هو مقدار الزاوية التي بين المستقيم وبين الاتجاه الموجب لمحور - x (∢ABO)؟



22. معطى أمامك المستقيمان: $y = -x + 5$ و- $y = x + 1$. المستقيمان متعامدان.

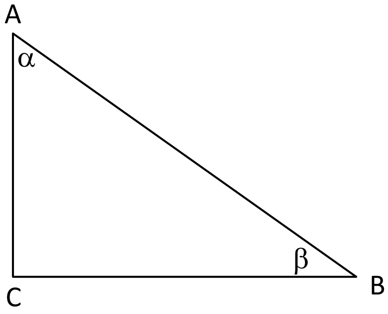


أ. سجّلوا كل المثلثات المتشابهة التي نتجت بواسطة المستقيمان في هيئة المحاور. فسّروا اجابتكم.

ب. احسبوا أطوال القطع BC و- CD.

كوسينوس الزاوية Cos

في المثلث القائم الزاوية ABC عرّفنا سينوس الزاوية كنسبة بين الضلع القائم المقابل للزاوية وبين الوتر.



$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\sin\beta = \frac{AC}{AB}$$

كوسينوس الزاوية هو النسبة بين الضلع القائم المجاور للزاوية وبين الوتر.

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

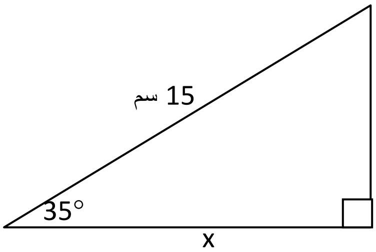
$$\cos\beta = \frac{BC}{AB}$$

في كل مثلّث قائم زاوية يمكننا استعمال كوسينوس الزاوية وأيضا سينوس الزاوية حسب الحاجة.

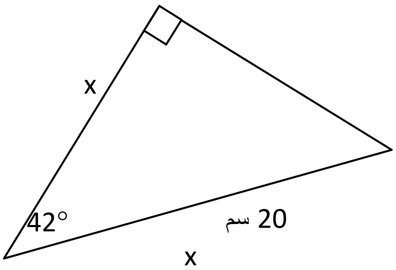
أمامكم تمرين 9 حللتموه بواسطة سينوس الزاوية ، نقوم بحلّه الان بواسطة كوسينوس الزاوية.

23. احسبوا طول الضلع x في كل واحد من المثلثات القائمة الزاوية التالية:

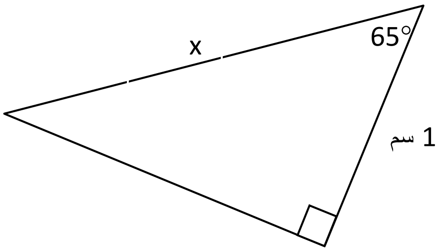
أ.



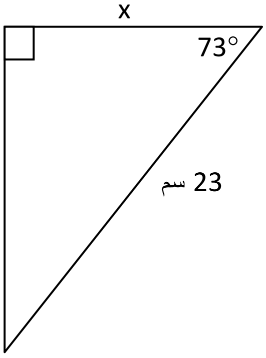
ب.



ت.



ث.



اقتراح لحل بند "أ":

$$\cos 35^\circ = \frac{x}{15}$$

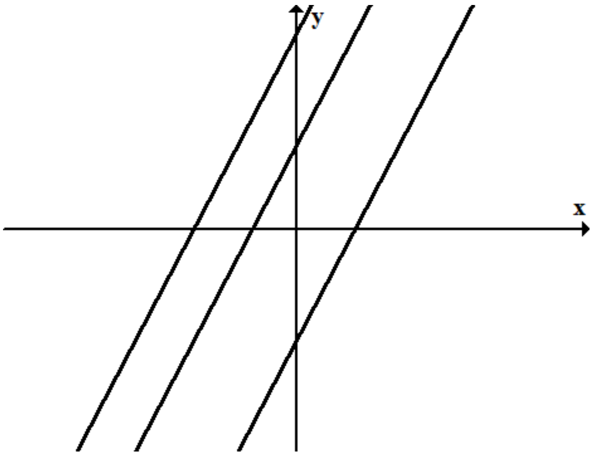
$$x = 15 \cdot \cos 35^\circ = 12.29$$

في هذا السؤال استعمال كوسينوس الزاوية أبسط من استعمال سينوس الزاوية.
حلّوا بقية الاسئلة بواسطة كوسينوس الزاوية.

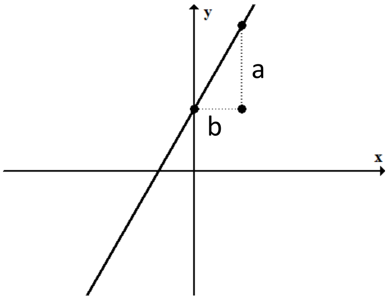
(نقاش) **تانجنس الزاوية** tag

.24

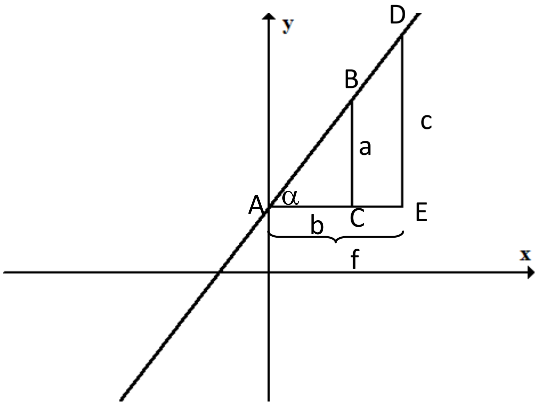
أ. أمامكم عدّة رسوم بيانية لدوال خطيّة متوازية.
1. ما المشترك لجميع هذه الرسومات؟
2. ماذا يمكنكم القول عن الزاوية التي بين كل واحد من المستقيمات وبين الاتجاه الموجب لمحور x؟



ب. في الرسم أمامكم a يمثّل التغيّر في قيمة y (عندما نتقدّم من نقطة لأخرى على طول الخط المستقيم) و- b يمثّل التغير في قيمة x (عندما نتقدّم من نقطة لأخرى على طول الخط المستقيم) كيف يُعرَّف ميل المستقيم المعطى؟

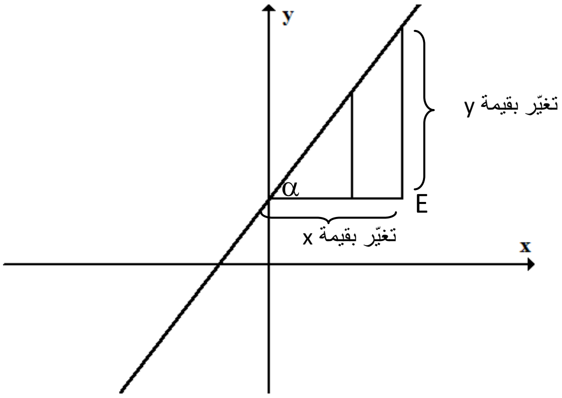


ت. A، B، D في الرسم هي نقاط على الخط المستقيم المرسوم.
BC و- DE يعامدان القطعة AE الموازية لمحور x.
فسّروا لماذا يتشابه المثلّثان ADE و- ABC.
ما هو الاستنتاج الذي تحصلون عليه من التشابه؟



أكملوا: $\frac{a}{\square} = \frac{b}{\square}$

لذلك: $\frac{a}{b} = \frac{c}{f}$ (لماذا؟)



ميل المستقيم يقاس بواسطة النسبة بين تغيّر قيمة y وتغيّر قيمة x.

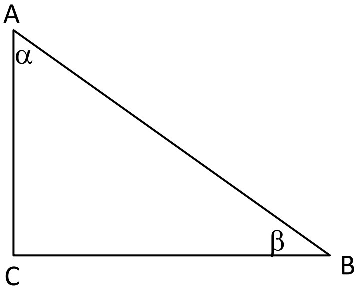
للنسبة بين القائم المقابل للزاوية والقائم المجاور للزاوية يدعى تانجنس الزاوية.

استنتاج: ميل الدالة الخطية هو أيضا تانجنس الزاوية.

يمكن تعلم تطبيق لتانجنس الزاوية بواسطة مشروع عالمي لقياس محيط الكرة الارضية:

http://highmath.haifa.ac.il/index.php?option=com_content&task=view&id=966

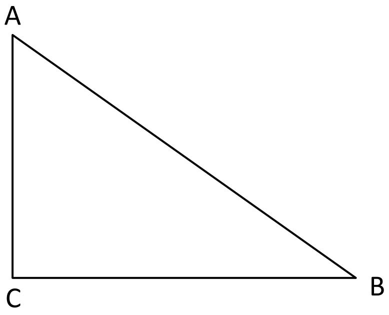
تانجنس الزاوية معرّف كنسبة بين الضلع القائم المقابل للزاوية وبين الضلع القائم المجاور للزاوية في مثلّث قائم زاوية.



$$\text{tag}\,\alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{tag}\,\beta = \frac{AC}{BC}$$

25.معطى مثلّث قائم الزاوية ABC ($\sphericalangle C = 90°$)
طول الضلع القائم AC هو 12 سم والزاوية B مقدارها 40°.
احسبوا طول الضلع القائم CB. (بمساعدة التانجنس الزاوية).

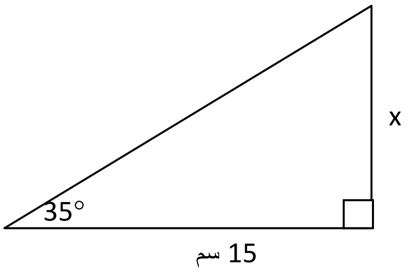


اقتراح للحل:

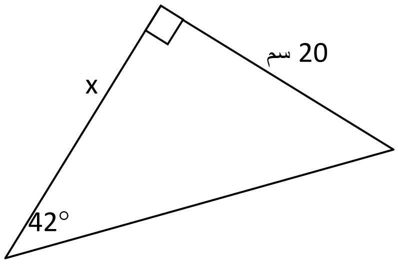
$$CB = \frac{12}{\tan 40°} = 14.30 \Leftarrow \tan 40° = \frac{12}{CB} \Leftarrow \tan\sphericalangle B = \frac{AC}{CB}$$

.26 احسبوا طول الضلع x في كل واحد من المثلثات القائمة الزاوية الاتية:

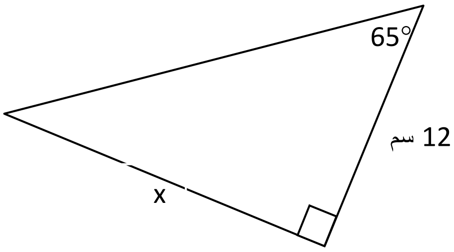
أ.



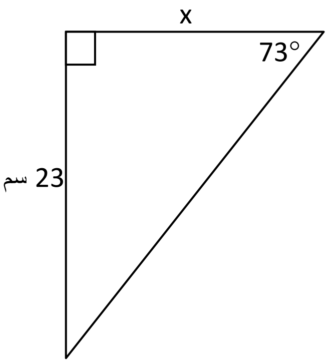
ب.



ت.

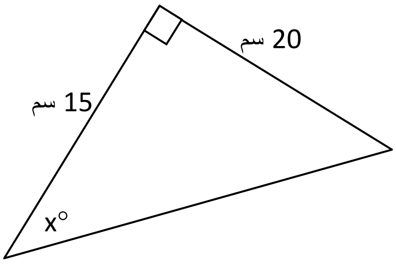


ث.

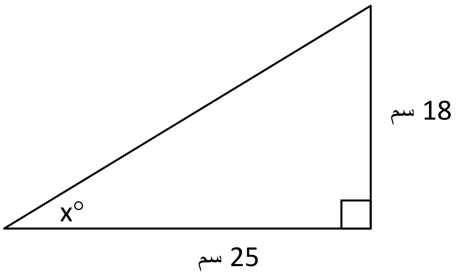


.27احسبوا مقدار الزاوية- x في المثلثات التالية:

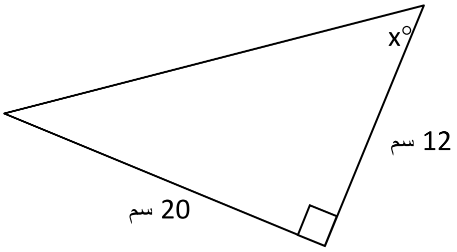
أ.



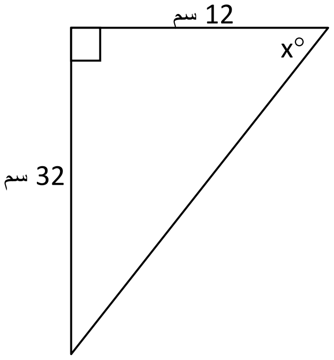
ب.



ت.

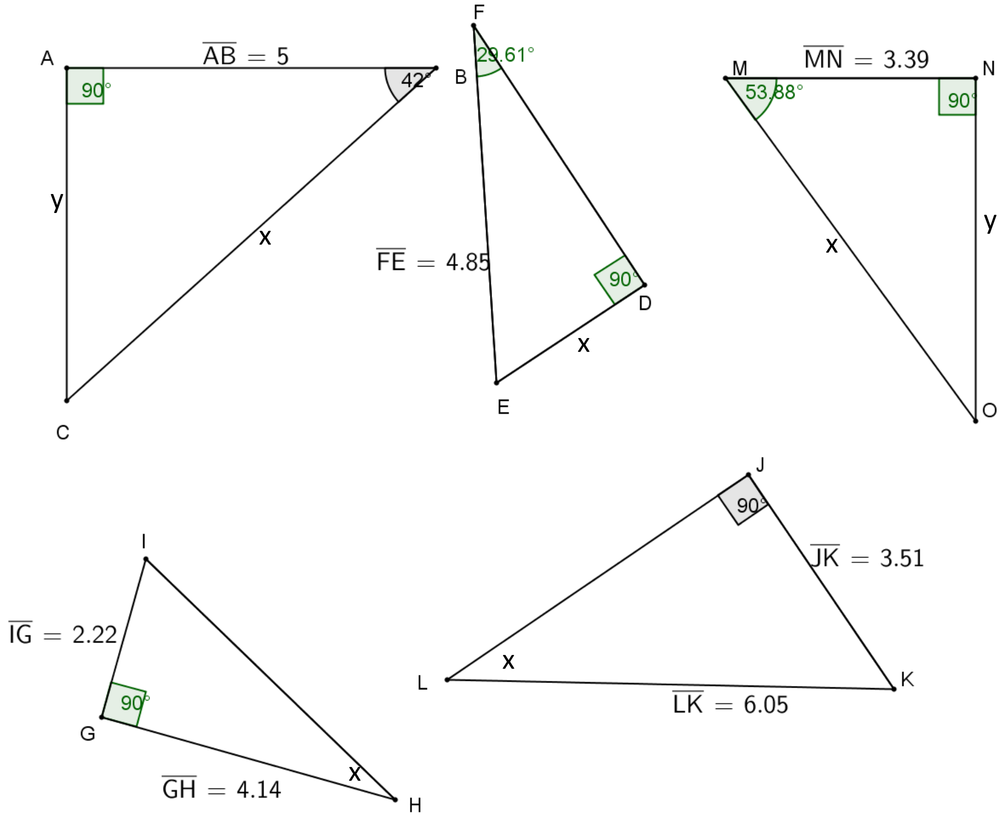


ث.



حلّوا التمارين التالية:

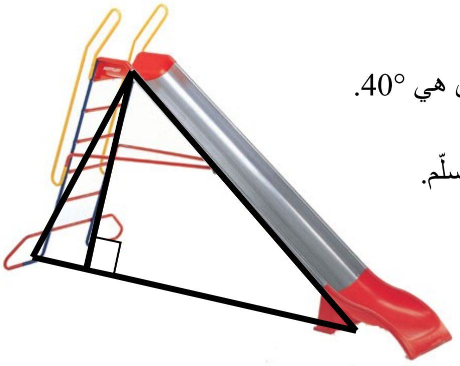
28.سجّلوا بجانب كل مثلّث أيّ من النسب علينا أن نستعمل حتى نجد قيمة x أو قيمة y: سينوس، كوسينوس، أم تانجنس.



.29

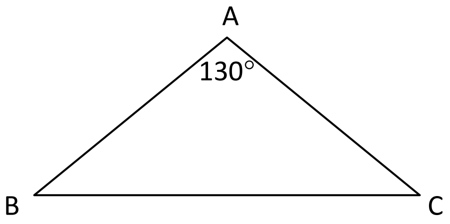
أ. طول السحسليّة 5 امتار. الزاوية التي بين السحسليّة والارض هي 40°.
احسبوا ارتفاع السحسليّة (AB)

ب. الزاوية التي بين السلّم والارض هي 70°. احسبوا طول السلّم.



A

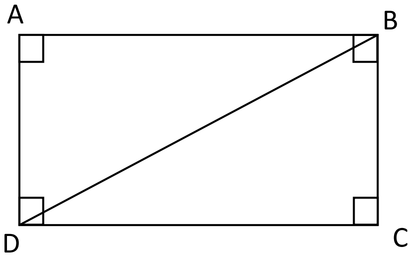
*30.في مثلّث متساوي الساقين ABC (AB = AC)
مقدار زاوية الرأس 130° (أنظروا الرسم)،
وطول الساق هو 15 سم.
احسبوا طول قاعدة المثلّث.



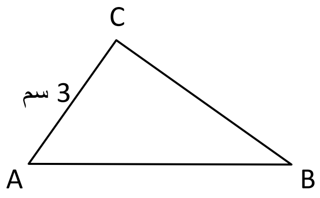
31.في مستطيل ABCD معطى:

CD = 12 سم، ∢BDC = 32°.

احسبوا مساحة المستطيل.



32.في مثلّث قائم الزاوية ABC (∢ACB =90°) طول الضلع القائم AC هو 3 سم.
(أنظروا الرسم). مساحة المثلّث هي 10.5 سم.



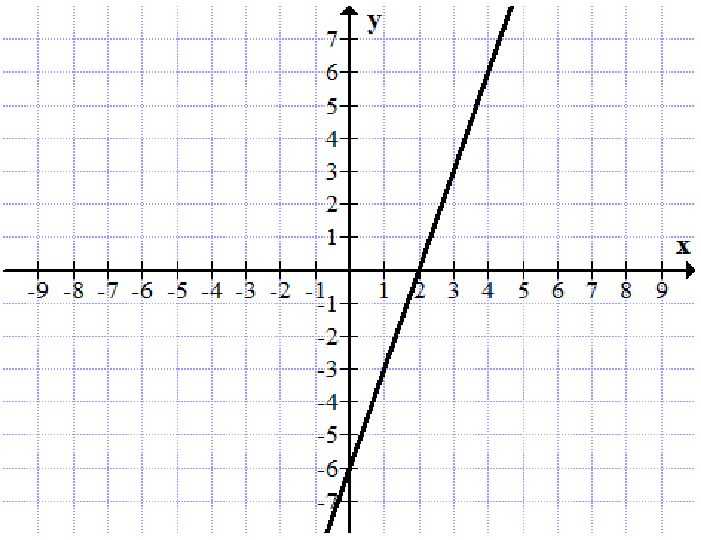
أ. احسبوا طول BC

ب. جدوا tan∢CAB .

ت. احسبوا مقدار الزاوية ∢CAB

ث. احسبوا محيط المثلّث.

33.احسبوا مقدار الزاوية التي بين المستقيم y = 3x – 6 وبين الاتجاه الموجب لمحور x.



*34. معطى أمامك مستقيمان: $y = 2x$ و- $y = –0.5x + 5$.

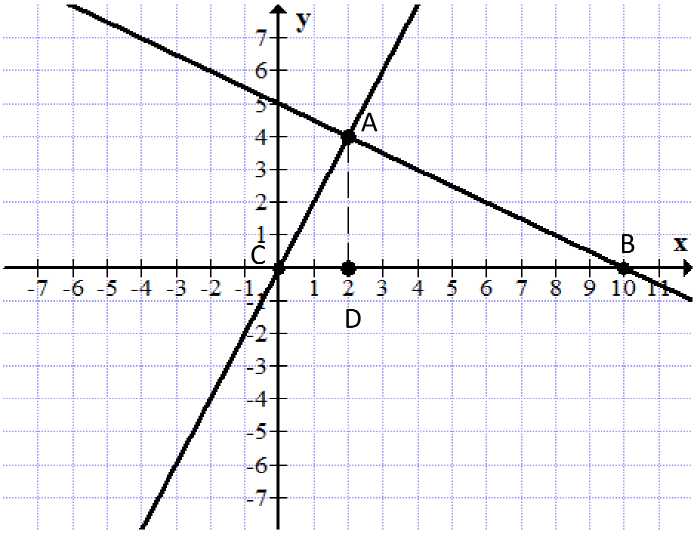
أ. احسبوا احداثيي النقطتين A, B

ب. احسبوا مقدار الزاوية ABC

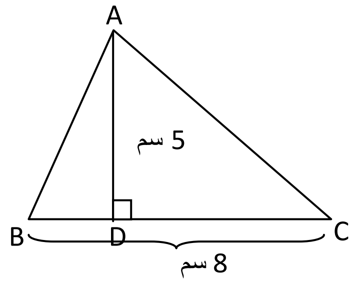
ت. احسبوا طول القطعة AB

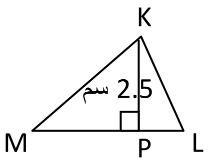
ث. احسبوا مقدار الزاوية CAB، بيّنوا طريقة الحل.

ج. احسبوا بطريقتين طول القطعة CA



*35. معطى: $\Delta ABC \sim \Delta KLM$ على التناظر.
جزء من المعطيات مبيّنة على الرسم.



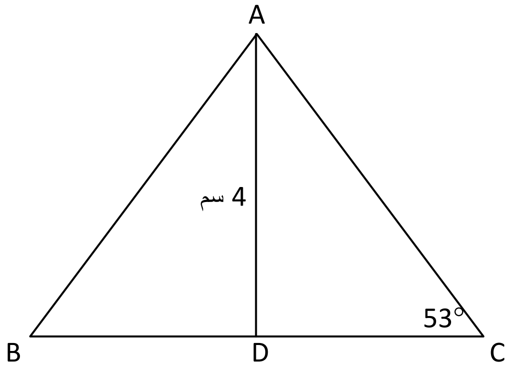


أ. احسبوا مساحة المثلّث ABC.

ب. ما هي مساحة المثلّث KLM؟ علّلوا.

ت. النقطة D تقسّم الضلع BC بنسبة 3 : 1، $BD < DC$. ما هو مقدار الزاوية C؟

ث. ما هو مقدار الزاوية M في المثلّث KLM؟



36. ΔABC هو مثلث متساوي الساقين $AB = AC$.
$AD \perp BC$، $AD = 4$ سم، $\measuredangle C = 53°$

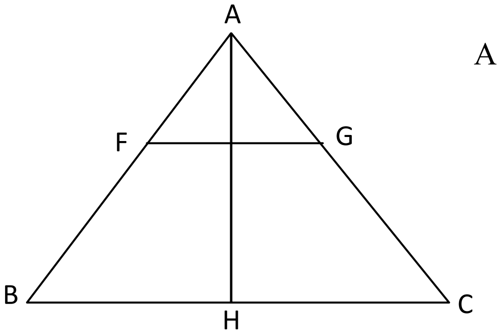
أ. احسبوا طول القاعدة BC.

ب. احسبوا مساحة المثلّث ABC.

ت. احسبوا محيط المثلّث ABC.

**37. ΔABC هو مثلّث متساوي الساقين (AB = AC)
نمرّر مستقيما يوازي القاعدة BC ويقطع الساقين AB و- AC

في النقطتين F و- G على التلائم.
بالاضافة، ننزل ارتفاعًا AH على القاعدة.
معطى: BC = 15 سم، FG = 5 سم، GC = 7 سم.



أ. برهنوا أنّ: ΔABC ~ ΔAFG

ب. احسبوا طول القطعة AG، بيّنوا طريقة الحساب.

ت. احسبوا مقدار ∢HAC.

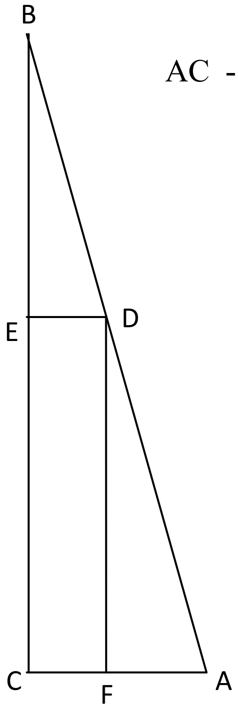
ث. احسبوا طول الارتفاع AH .

ج. احسبوا مساحة المثلّث ΔABC.

*38.في مثلّث قائم الزاوية ABC (∢C = 90°) محصور مستطيل DECF،

الرأس D يقع على الوتر AB والرأسان E و- F يقعان على الضّلعين القائمين BC و- AC

على التلائم. النقطة E تقسّم القطعة BC بنسبة 5 : 3 .
معطى: AC = 5 سم



أ. برهنوا أنّ: ΔDFA ~ ΔBED .

ب. احسبوا طول القطعة ED .

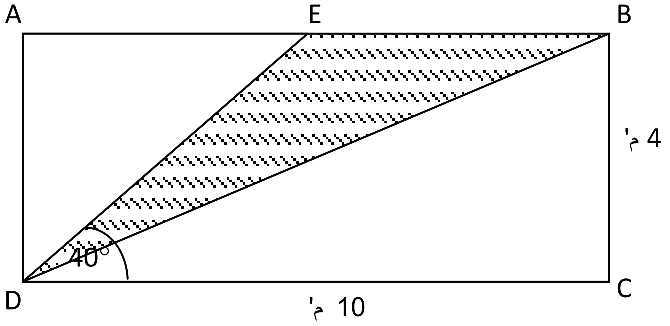
ت. إضافة الى ذلك معطى أنّ الضلع CE أكبر بـ 4 أضعاف من الضلع DE.
احسبوا مقدار الزاوية ∢A.

*39.في ملعب مستطيل الشكل أبعاده 4 أمتار و- 10 أمتار مدّوا حبلين: حبل على امتداد قطر الملعب (مؤشّر اليه بـ BD) وحبل أضافي (مؤشّر اليه بـ DE). الزاوية الناتجة بين الضلع DC وبين الضلع DE مقدارها 40° (أنظروا الرسم).

أ. احسبوا مقدار الزاوية BDC.

ب. احسبوا طول القطعة EB.

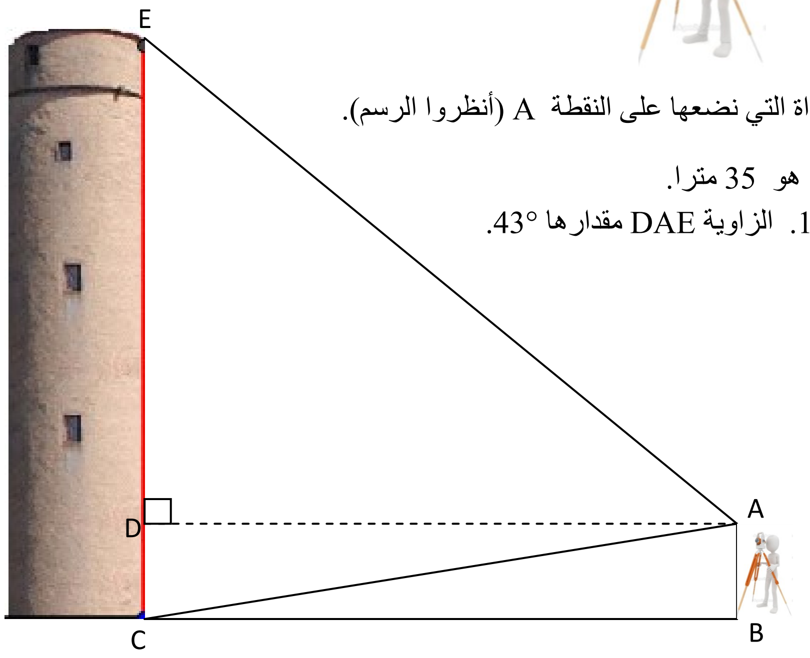
ت. احسبوا مساحة المثلّث EBD (المخطّط).



المزواة هي أداد لقياس الزوايا: الزاوية التي بين خط الرؤية وبين المستوى الافقي والزاوية التي بين خَطَّيْ الرؤية من نفس النقطة. للقياس بواسطة المزواة يتم وضعه على حامل ثلاثي القوائم:

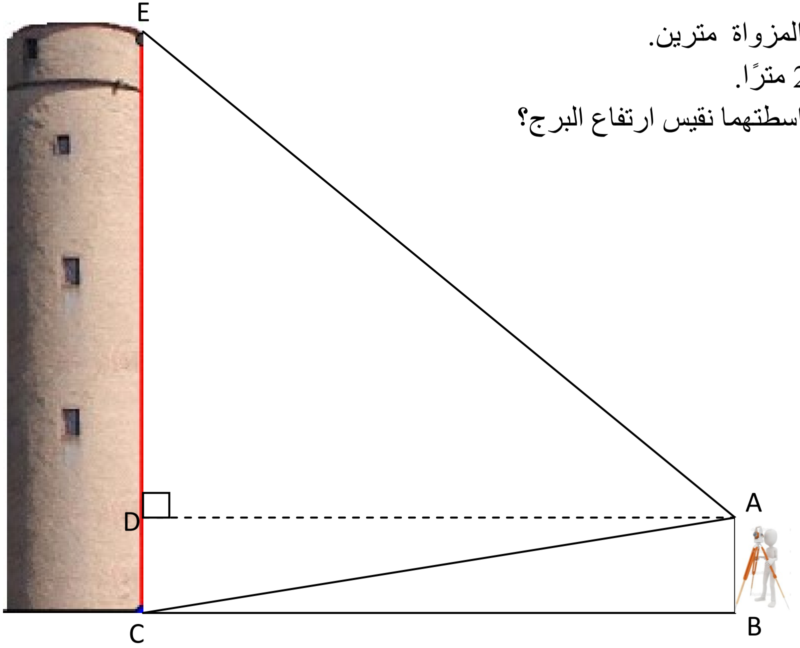
لقياس برج نستعين في المزواة التي نضعها على النقطة A (أنظروا الرسم).

40.البعد BC بين البرج والمزواة هو 35 مترا.
الزاوية DAC مقدارها 10.5°. الزاوية DAE مقدارها 43°.
ما هو ارتفاع البرج؟



41.ارتفاع البرج 50 مترًا. ارتفاع المزواة مترين.
البعد بين المزواة والبرج هو 20 مترًا.
ما هو مقدار الزاويتين اللتين بواسطتهما نقيس ارتفاع البرج؟

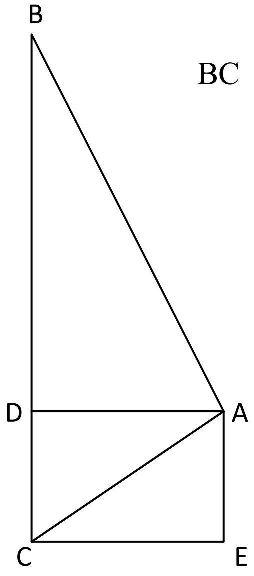
(الزاويتان DAC و- DAE)



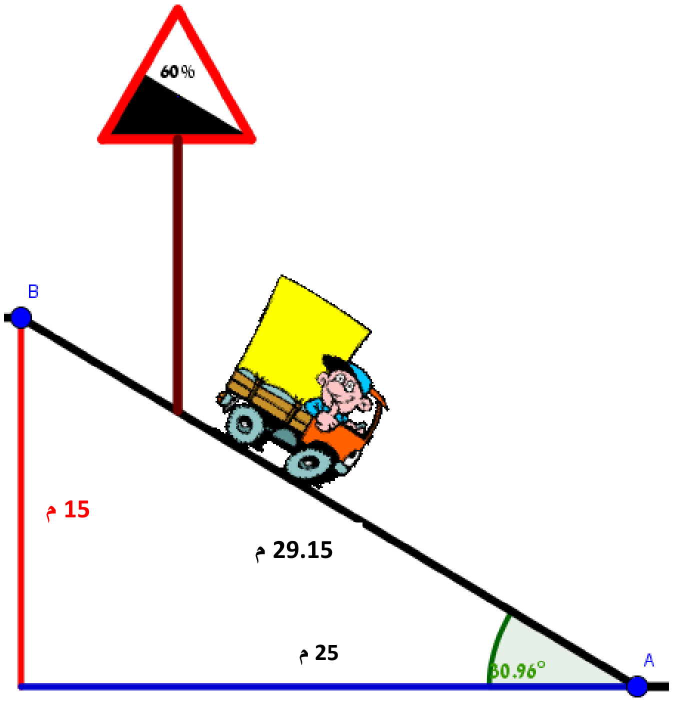
42.AE و- BC هما قطعتان تمثلان بنايتان.
من النقطة A التي تقع على سطح البناية AE والتي ارتفاعها 10 امتارٍ نرى بناية أعلى BC بزاوية مقدارها $\measuredangle BAC = 70^\circ$.
من النقطة C التي تقع في أسفل البناية BC نرى طرف البناية AE بزاوية مقدارها $\measuredangle ACE = 28^\circ$.

أ. احسبوا البعد بين البنايتين.

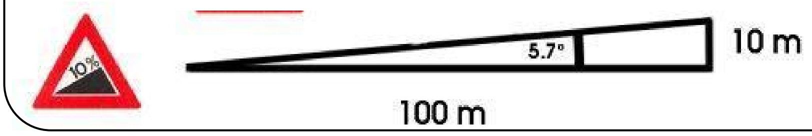
ب. احسبوا ارتفاع البناية BC.



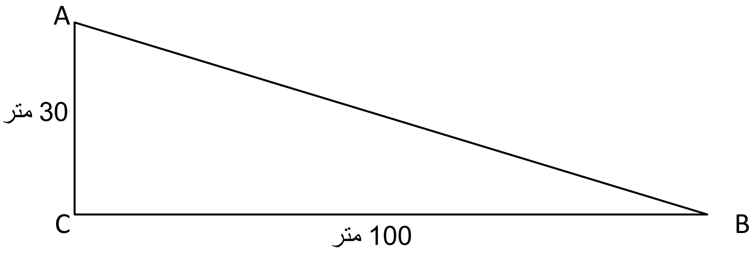
في الرسم أمامكم نرى مقطع من طريق AB ميله 60%.
الزاوية الملائمة للميل 60% هي 30.96°



تعريف: ميل مقطع من طريق مقداره 10% يعني أنّ لكل أزاحة عمودية مقدارها 10 امتار يجب التحرّك أفقيا 100 متر: $0.1 = \frac{10}{100}$. الزاوية الملائمة لميل 10% هي 5.7°.



43. في الرسم أدناه مبيّن مقطع من طريق AB ميله 30%.



ميل مقداره 30% معناه أنّه اذا أردنا أن نصل من النقطة A الى النقطة B، لكل أزاحة عمودية مقدارها 30 متر علينا أن نتحرّك أفقيًا 100 متر.
الميل هو تانجنس الزاوية ∢ABC.

أ. احسبوا الزاوية الملائمة لميل مقداره 30%.

ب. احسبوا الزاوية الملائمة لميل مقداره 20%.

44. معلوم أنّ طول مقطع طريق AB هو 2 كم وميله 30%

أ. احسبوا الزاوية الملائمة لميل مقطع الطريق. (استعينوا في رسم)

ب. احسبوا الازاحة الافقية لمقطع الطريق.

45. معلوم أنّ ميل مقطع طريق هو 25% والازاحة الأفقية 1.5 كم .

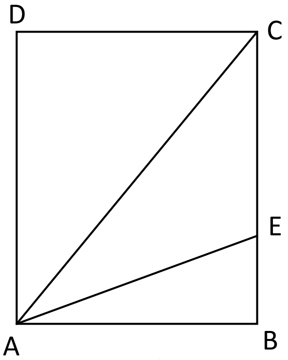
أ. احسبوا الزاوية الملائمة لميل المقطع. (استعينوا في رسم)

ب. احسبوا طول مقطع الطريق.

*ت. اذا كانت سرعة السيارة هي 60 كم في الساعة، كم دقيقة تحتاج السيارة لمقطع الطريق AB؟

46. في مستطيل ABCD طول الضلع AB هو 18 سم.

قسّموا الزاوية A بنسبة 2 : 3 : 4 بحيث أنّ- EAB∢ هي الاصغر و- DAC∢ هي الأكبر.

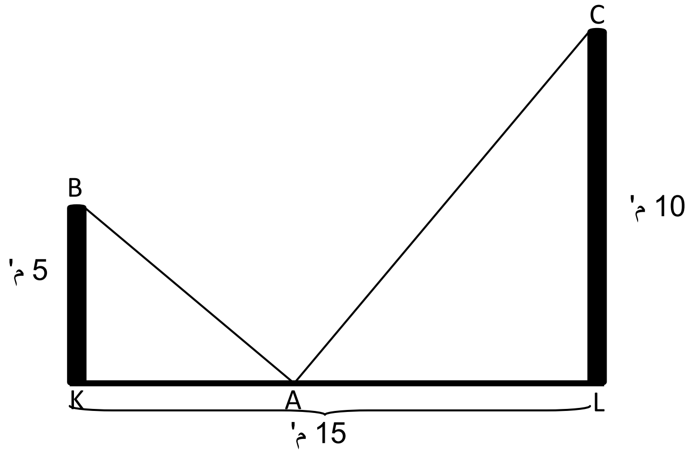


أ. ما هو طول القطعة EB؟

ب. ما هو طول القطعة CB؟

ت. ما هي النسبة CE : EB؟

**47. أمامكم عامودَا كهرباء، أحدهم طوله 5 م' والآخر طوله 10 م'. البعد بين العمودين هو 15 مترًا. نمدّ حبلًا من طرف كل عامود الى الارض كما هو موصوف في الرسم.



أ. ما هو مقدار الزاوية الناتجة بين كل واحد من العمودين والحبل النازل منه على الأرض عندما يتطابق المثلثان BKA و- CLA ؟

ب. اذا تطابق المثلّثان ما هو طول الحبلين سويّة؟

ت. على أي بعد من النقطة K يجب وضع نقطة التقاء الحبلين حتى يتشابه المثلثان الناتجان بين الحبلين؟ (ما هو طول القطعة KA)

ث. ما هو مقدار الزاوية الناتجة بين كل واحد من العامودين والحبل النازل منه على الأرض عندما يتشابه المثلثان؟

ج. اذا تشابه المثلثان KBA و- LAC ما هو طول الحبلين سويّة؟

ح. كم يكون طول الحبلين سوية اذا كانت النقطة A على بعد 3 أمتار من النقطة K؟

خ. كم يكون طول الحبلين سوية اذا كانت النقطة A على بعد 7 أمتار من النقطة K؟

د. على أي بعد من النقطة K يجب وضع النقطة A حتى يكون طول الحبلين معًا أقصر ما يمكن؟ برهنوا.[2]

اجابات:

1. أ.	حسب نظرية التشابه ز،ز	11.ب.	AC = سم 10.503
1.ب.	زاوية مشتركة α وزاويتان قائمتان DEA ،BCA	11.ت.	محيط المثلث 43.815 سم
1.ت.	BC و- DE، AB و- AD، AC و-AE	11.ث.	مساحة المثلّث 96.165 سم^{2}
1.ث. (1)	AB = سم 5	12.أ.	AD = سم 9.193
1.ث. (2)	DE = سم 6 ,AE = سم 8	12.ب.	BC = سم 15.427
1.ج.	$\frac{DE}{AD}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ (2) $\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$ (1)	12.ت.	مساحة المثلّث 70.91 سم^{2}

---

[2] استعينوا في الرمز التالي: وفقًا لصفة فيزيائية كانت معلومة أيضا لليونانيين: أقصر بعد يعبره شعاع ضوء من - B الى- C عبر A هو زاوية انعكاس متساوية نسبة للأرض. أنظروا برهانًا لمسألة هارون في نهاية الملف وأيضًا تطبيق جيوجبرا "عاموا كهرباء وحبال"

<table>
<tr><td>2.أ.</td><td>$\sphericalangle A = \sphericalangle A = \alpha$,
$\sphericalangle KPA = \sphericalangle BCA = 90°$
يتشابه المثلثان حسب نظرية التشابه ز،ز</td><td>13.</td><td><table><tr><td>46.05°</td><td>34.85°</td></tr><tr><td>53.13°</td><td>67.98°</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>2.ب.</td><td>6 سم = AP، 4.5 سم = KP،
7.5 سم = AK، $\frac{KP}{AK}=\frac{4.5}{7.5}=\frac{3}{5}$
$\frac{BC}{AB}=\frac{DE}{AD}=\frac{KP}{AK}=\frac{3}{5}$</td><td>14.</td><td><table><tr><td>53.13°</td><td>35.75°</td></tr><tr><td>59.04°</td><td>69.44°</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td rowspan="2"><table><tr><td>مقدار الزاوية α</td><td>$\frac{a}{c} = \sin\alpha$</td><td>مقدار الزاوية α</td><td>$\frac{a}{c} = \sin\alpha$</td></tr><tr><td>25°</td><td>0.422</td><td>0°</td><td>0</td></tr><tr><td>50°</td><td>0.766</td><td>14.478°</td><td>0.25</td></tr><tr><td>75°</td><td>0.966</td><td>30°</td><td>0.50</td></tr><tr><td>80°</td><td>0.985</td><td>48.590°</td><td>0.75</td></tr><tr><td>90°</td><td>1</td><td>64.158°</td><td>0.9</td></tr></table></td><td>15.أ.</td><td>9 م'</td></tr>
<tr><td>15.ب.</td><td>53.13°</td></tr>
<tr><td>5.</td><td><table><tr><td>4.266</td><td>11.57</td><td>23.492</td><td>16.689</td></tr></table></td><td>16.أ.</td><td>7.75 م'</td></tr>
<tr><td>7.</td><td><table><tr><td>31.382</td><td>26.9</td><td>13.24</td><td>10.457</td></tr></table></td><td>16.ب.</td><td>14.478°</td></tr>
<tr><td>9.</td><td><table><tr><td>12.287</td><td>14.863</td><td>5.071</td><td>6.725</td></tr></table></td><td>17.أ.</td><td>ضلع المثلّث 9.238 سم</td></tr>
<tr><td>10.أ.</td><td>12.619 سم = CB
18.021 سم = AC</td><td>17.ب.</td><td>محيط المثلّث 21.713 سم</td></tr>
<tr><td>10.ب.</td><td>مساحة المثلّث 113.706 سم^2</td><td>17.ت.</td><td>ارتفاع المثلّث 8 سم – في المثلّث المتساوي الاضلاع الارتفاع والمتوسط يتطابقان</td></tr>
<tr><td>10.ت.</td><td>محيط المثلّث 52.64 سم</td><td rowspan="2">17.ث.</td><td rowspan="2">مساحة المثلّث 35.95 سم^2</td></tr>
<tr><td>11.أ.</td><td>18.312 سم = AB</td></tr>
<tr><td>18.أ.</td><td>$\sphericalangle DBC=56.443°$</td><td>24.أ.(1)</td><td>يوجد لهم نفس الميل</td></tr>
<tr><td>18.ب.</td><td>45.227 سم = AC</td><td>24.أ.(2)</td><td>نفس مقدار الزاوية</td></tr>
<tr><td>18.ت.</td><td>مساحة المثلّث 678.41 سم^2</td><td>24.ب.</td><td>a : b</td></tr>
<tr><td>18.ث.</td><td>54.272 سم = AB</td><td rowspan="5">24.ت.</td><td rowspan="5">المثلّثان ADE و- ABC متشابهان لأنّه لكليهما زاوية مشتركة α وزاوية قائمة، بما أنّ هناك أعمدة على الضلع AE.
من هنا النسبة بين الاضلاع المتناظرة متساوية.
$\frac{a}{c}=\frac{b}{f}$
ويتحقّق: af=cb و-</td></tr>
<tr><td>19.أ.</td><td>طول القطر 14.42 سم</td></tr>
<tr><td>19.ب.</td><td>33.69°، 56.31°</td></tr>
<tr><td>20.أ.</td><td>طول الارتفاع على- BC هو 3 سم</td></tr>
<tr><td>20.ب.</td><td>$\sphericalangle ACB = 143.13°$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>21.أ</td><td>$AB=\sqrt{45}$</td><td></td><td>$\frac{a}{b}=\frac{c}{f}$</td></tr>
<tr><td>21.ب</td><td>63.435°</td><td>26.</td><td><table><tr><td>10.503</td><td>22.212</td></tr><tr><td>25.734</td><td>7.032</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="4">22.أ</td><td rowspan="4">$\Delta EBF \sim \Delta CED \sim \Delta ACB$
المثلّثان قائما الزاوية ومتساويا الساقين:
نتمعّن في المثلثين EBF أو EBO (النقطة F تلتقي مع النقطة O)
$\measuredangle BOE = 90°$ (تنتج الزاوية من تقاطع المحورين)
$OE = OB =$ 1 وحدة
ولذلك المثلّث OBE مثلث قائم زاوية ومتساوي الساقين
و- $\measuredangle BEO = \measuredangle EBO = 45°$، وكذلك أيضا زاوية الرأس EBC تساوي 45° ولذلك لكل المثلثات زاوية مقدارها 45°.
كذلك معطى أنّ المستقيمين متعامدين ولذلك
$\measuredangle ECD = \measuredangle ECA = 90°$. يتشابه المثلثان حسب نظرية التشابه ز.ز .
طريقة أخرى:
نتمعّن في المثلّث EBF: طول الوتر $\sqrt{2}$ بمساعدة النسبة بين الضلع القائم والوتر نجد أنّ:
$\measuredangle BEF = 45°$.</td><td>27.</td><td><table><tr><td>53.13°</td><td>35.754°</td></tr><tr><td>59.04°</td><td>69.44°</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>28.</td><td>من اليسار الى اليمين:
x بواسطة السينوس
y بواسطة التانجنس
x بواسطة السينوس
x بواسطة الكوسينوس
y بواسطة التانجنس
x بواسطة التانجنس
x بواسطة السينوس</td></tr>
<tr><td>29.أ</td><td>AB = 3.214 م' (ارتفاع السحسليّة)</td></tr>
<tr><td>29.ب</td><td>3.42 م' = طول السلّم</td></tr>
<tr><td>22.ب</td><td>$CD =$ 4.243 وحدات، $BC =$ 2.828 وحدات</td><td>30.</td><td>طول قاعدة المثلّث 27.189 سم</td></tr>
<tr><td>23.</td><td><table><tr><td>12.287</td><td>14.863</td><td>20.394</td><td>6.725</td></tr></table></td><td>31.</td><td>مساحة المستطيل 89.98 سم^2</td></tr>
<tr><td>32.أ</td><td>$BC =$ 7 سم</td><td rowspan="3">37.ب</td><td rowspan="3">$AG =$ 3.5 سم
$AG = x$
$\frac{5}{15}=\frac{x}{x+7}$
$5x+35=15x$
$35=10x$
$3.5=x$</td></tr>
<tr><td>32.ب</td><td>$\tan\angle CAB=\frac{7}{3}$</td></tr>
<tr><td>32.ت</td><td>$\measuredangle CAB = 66.801°$</td></tr>
<tr><td>32.ث</td><td>محيط المثلّث 17.62 سم</td><td>ג.37</td><td>$\measuredangle HAC = 45.585°$</td></tr>
<tr><td>33.</td><td>71.565°</td><td>37.ث</td><td>$AH =$ 7.348 سم</td></tr>
<tr><td>34.أ</td><td>A(2;0)،B(10 ،4)</td><td>37.ج</td><td>55.114 سم^2</td></tr>
</table>

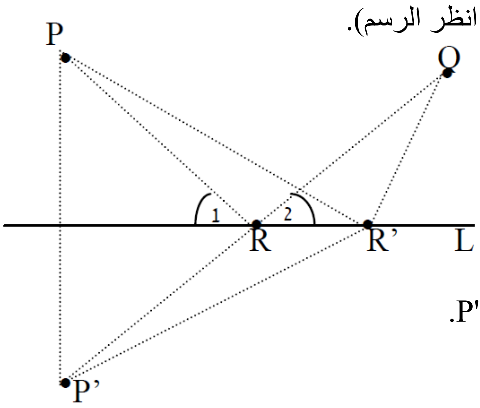
34.ب	$\measuredangle ABC = 26.565^\circ$	38.א	$\measuredangle CED = \measuredangle DFC = 90^\circ$ زوايا المستطيل قائمة $\measuredangle BED = \measuredangle DFA = 90^\circ$ زوايا متجاورة لزوايا قائمة $ED \parallel AC \Leftarrow$ $\measuredangle A = \measuredangle EDB$ ، زوايا متناظرة متساوية بين خطين متوازيين. $\Delta DFA \sim \Delta BED$ حسب نظرية التشابه ز،ز
34.ت	$AB = 8.944$ وحدات		
34.ث	$\measuredangle BAD = 63.435^\circ$ (متممة لـ 90°) $\tan\measuredangle CAD=0.5 \quad \measuredangle CAD = 26.565^\circ$ $\measuredangle CAB = 90^\circ$		
34.ج	$AC = 4.472$ وحدات الحساب بواسطة سينوس الزاوية أو نظرية فيثاغورس.		
35.أ	20 سم^2		
35.ب	مساحة المثلّث KLM 5 سم^2 . $AD:KP = 5:2.5 = 2:1$ لذلك النسبة بين المساحتين 4:1	38.ب	$DE = 1.875$ سم
		38.ت	$\measuredangle A = 67.38^\circ$
35.ت	$\measuredangle C = 39.806^\circ$	39.أ	$\measuredangle BDC = 21.801^\circ$
35.ث	$\measuredangle M = 39.806^\circ$	39.ب	$EB = 5.233$ م'
36.أ	$BC = 6.028$ سم	39.ت	10.466 م^2
36.ب	مساحة المثلّث 12.057 سم^2	40.	39.125 م
36.ت	محيط المثلّث 22.074 سم	41.	$\measuredangle DAC = 5.711^\circ$ $\measuredangle DAE = 67.38^\circ$
37.أ	$BC \parallel FG \Leftarrow \measuredangle B = \measuredangle AFG$ ، $\measuredangle C = \measuredangle AGF$ زاويتان متناظرتان متساويتان بين خطين متوازيين. $\Delta ABC \sim \Delta AFG$ حسب نظرية التشابه ز،ز		
42.أ	18.807 م'		
42.ب	23.934 م'		
43.أ	16.699°		
43.ب	11.31°		
44.أ	16.699°		
44.ب	1.916 كم		
45.أ	14.036°		

45.ب.	1.546 كم		
45.ت.	1.546 دقيقة		
46.أ.	EB = 6.551 سم		
46.ب.	CB = 21.452 سم		
46.ت.	14.9001 : 6.551 = 2.274 : 1		
47.أ.	∢KBA = 63.435°، ∢ACL = 26.565°،		
47.ب.	22.361 م'		
47.ت.	5 م'		
47.ث.	45°		
47.ج.	21.21 م'		
47.ح.	21.451 م'		
47.خ.	21.409 م'		

نظرية (هيرون) خاصة مميّزة لأشعة الضوء.

معطى مستقيم L ونقطتان P و- Q من احدى جهتي المستقيم. السؤال هو كيف يمكننا اختيار نقطة R على المستقيم L، بحيث يكون مجموع طولي القطعتين RP و- QP هو الاقصر من P لـ - Q، عندما يمر المسار عبر نقطة على المستقيم L. هذه المسألة معروفة في الرياضيات باسم مسألة هيرون لأشعة الضوء.

الحل:



في البداية نرمز بنقطة ´P، المماثلة للنقطة P بالنسبة للمستقيم L. (انظر الرسم).

من هنا R´P=RP. نوصل بين النقطتين 'P و- Q.

نرمز لنقطة تقاطع المستقيم L مع المستقيم P'Q بـ R.

نبرهن أنّ بين كل المسارات الممكنة أقصر طول هو RP+QR.

نأخذ نقطة معيّنة 'R ونوصلها مع P، Q و- 'P. أيضا هنا P'R'=RP'.

متباينة المثلّث تعطينا $P'Q<P'R'+R'Q$.

لذلك $RP+QR=P'R+QR=P'Q<P'R'+R'Q=RP'+R'Q$.

من هنا حصلنا على أنّ النقطة R تحقّق شروط المسألة وهي النقطة الملائمة على المستقيم L. بالإضافة الى ذلك $\measuredangle R_1=\measuredangle R_2$ ومن هنا لخّص هيرون بأنّ شعاع الضوء الواصل للمستقيم L في زاوية معيّنة ينعكس بنفس الزاوية من المستقيم.