وزارة المعارف

السكرتارية التربوية – عنقود العلوم – التفتيش على تعليم الرياضيات

الادارة للعلوم والتكنولوجيا

كراس إثراء في الرياضيات لتلاميذ إعدادية علوم - تكنولوجيا

لتلاميذ الصفوف سابع – تاسع

الفصول في الكراس تُعلم كإثراء لمواضيع تعليم الرياضيات في المرحلة الإعدادية خلال السنوات الثلاث فيها

آب 2012

شكر خاص للأجسام التي تبرعت بفصول الاثراء في الرياضيات لهذا الكراس، وهي:

إثراء تربيع

لمدا

تفوق **2000**

المركز الاسرائيلي للتفوق في التربية

تفوق رحوبوت - معهد وايزمن للعلوم

قسم تعليم العلوم

الرياضيات بالمراسلة

معهد ديفدسون للعلوم

معهد وايزمن للعلوم

مسارات للمتفوقين - مطاح

برنامج للمتفوقين في الرياضيات - التخنيون

التخنيون - معهد تكنولوجي في اسرائيل

قسم تعليم التكنولجيا والعلوم

محتويات الكراس بحسب ترتيب تعليمها:

1. دوائر دوائر - تفوق رحوبوت
معهد وايزمن للعلوم - قسم تعليم العلوم
2. ابتسامة فائزة - تفوق 2000
المركز الاسرائيلي للتفوق في التربية
3. أعداد الجن ערפד - رياضيات بالمراسلة
معهد ديفدسون للعلوم ، معهد وايزمن
4. نلعب بالأعداد - مسارات للمتفوقين
مطاح
5. أسئلة عن الأعداد الاولية - مسارات للمتفوقين
مطاح
6. الزُمر - تفوق رحوبوت
معهد وايزمن للعلوم - قسم تعليم العلوم
7. ساعة على الرزنامة السنوية - مسارات للمتفوقين
مطاح
8. الأخير لاختيارك - تفوق رحوبوت
معهد وايزمن للعلوم - قسم تعليم العلوم
9. مساحات ، عيدان ثقاب ، تنغرام مسارات للمتفوقين
مطاح
10. أن نكسر البُعد- رياضيات بالمراسلة
معهد ديفدسون للعلوم ، معهد وايزمن
11. ألعاب في جداول أعداد - مسارات للمتفوقين
مطاح
12. عن الالعاب والأشجار - تفوق 2000
المركز الاسرائيلي للتفوق في التربية

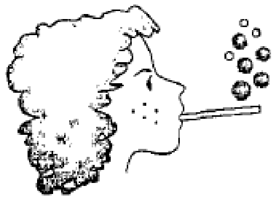
13. فيبوناتشي - سلسة فيبوناتشي إثراء تربيع
فيبوناتشي في عالم الاحياء
لمدا

14. أعداد حقيقية - إثراء تربيع
لمدا

15. موضوع النهايات - تفوق 2000
المركز الاسرائيلي للتفوق في التربية

16. النهايات في الحياة اليومية - مسارات للمتفوقين
مطاح

17. مبدأ برج الحمام - البرنامج للمتفوقين - تخنيون
التخنيون - معهد تكنولوجي في اسرائيل
قسم تعليم التكنولوجيا والعلوم



دوائر دوائر

التخنيون – معهد تكنولوجي في اسرائيل

أمامك مثلث مبني من دوائر . في كل رأس من رؤوس المثلث يوجد دائرة ملونة (مملوءة) والباقي دوائر فارغة. كل دائرة (ما عدا تلك التي في الرؤوس) موجودة ، عملياً ، في ثلاثة أسطر: سطر أفقي واثنان مائلان .

العب مع صديقك في اللعبة التالية:

كل مشترك بدوره يملأ دائرة واحدة من الدوائر الفارغة.

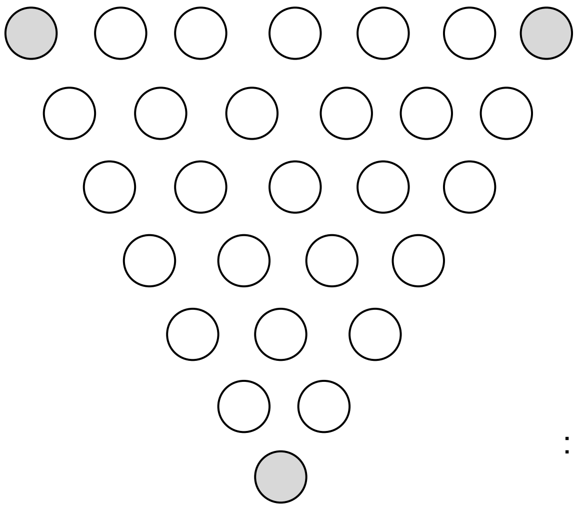
اللاعب الذي يملأ الدائرة الاخيرة في السطر ، يشطب السطر ، ويسجل لصالحه عدد من النقط مساويًا لعدد **كل** الدوائر في السطر الذي شطبه .

إذا كانت دائرة ما هي الدائرة الفارغة الاخيرة في سطرين ، فمن حق اللاعب الذي يملؤها أن يختار السطر الوحيد فقط الذي يشطبه .

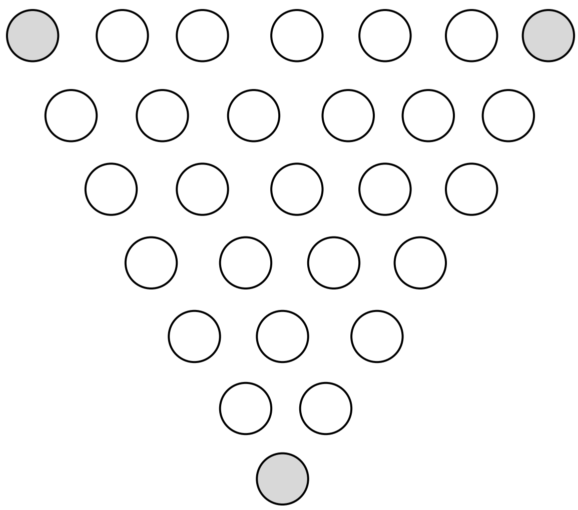
اللاعب الثاني بالدور **يمكنه** أن يشطب السطر الآخر وأن يسجل لصالحه عدد **كل** الدوائر في السطر ، بدون أن يملأ دائرة إضافية

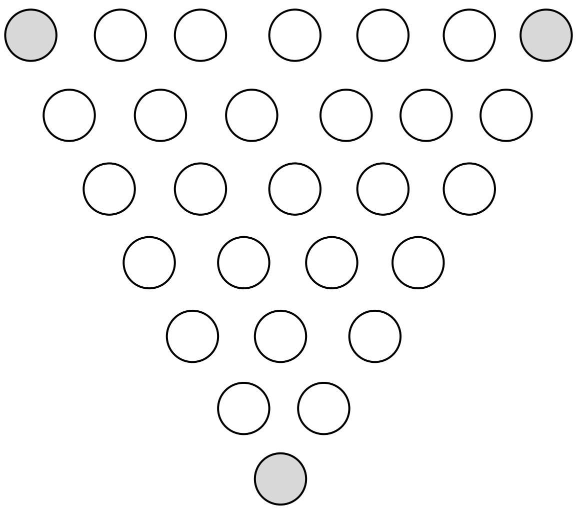
تنتهي اللعبة عندما يتم شطب كل الاسطر في الاتجاهات الثلاثة

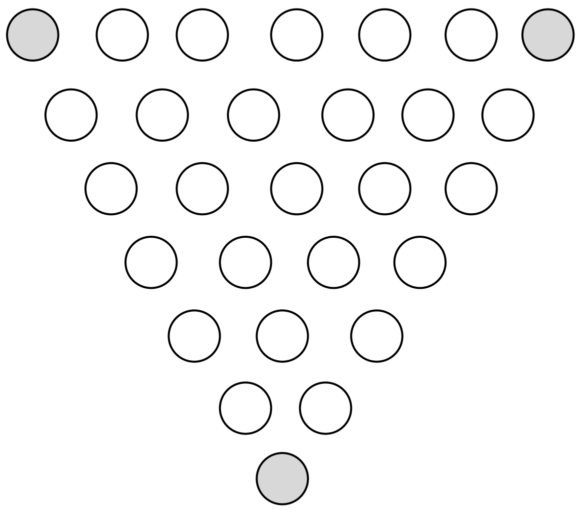
الفائز هو الذي جمّع أكبر عدد من النقط .

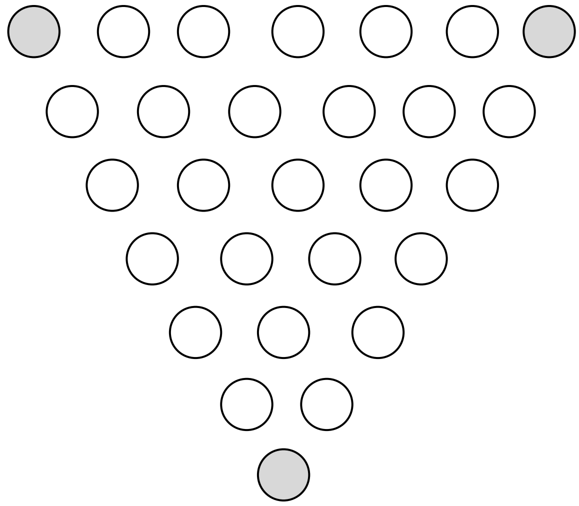


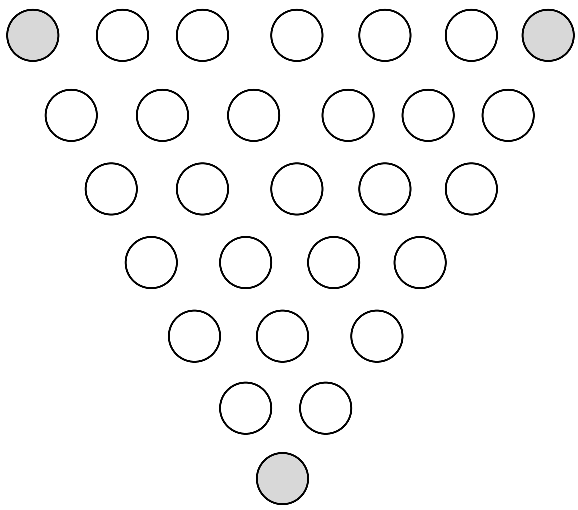
أمامك مثلثات لعب إضافية لألعاب متكررة :

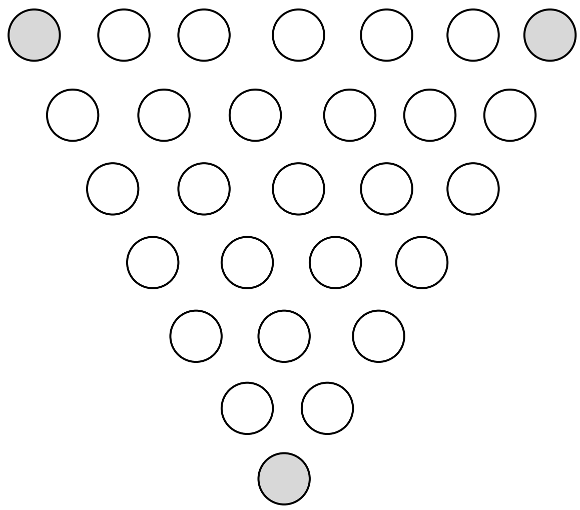


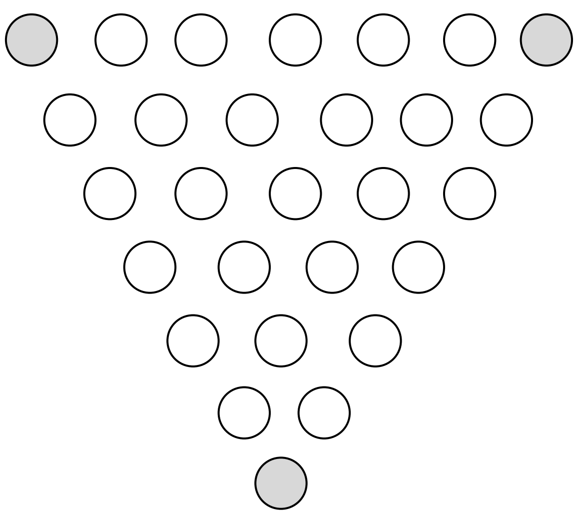


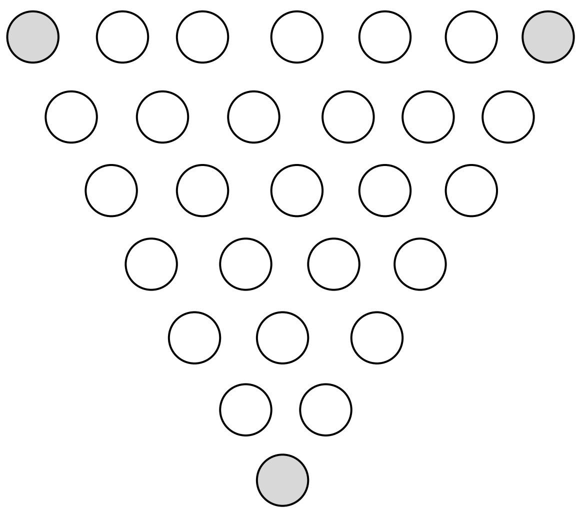












بعد أن لعبت اللعبة عدد من المرات ، أجب عن الاسئلة التالية:

1. عندما يلعب لاعبان ، هل يمكن أن تنتهي اللعبة بالتعادل ؟ فسر .

2. ما هو أقل عدد من النقط على اللاعب أن يحصل عليها ليفوز في اللعبة التي جرت بين اثنين ؟ فسر

3. هل يمكن أن تنتهي اللعبة بالتعادل لو جرت اللعبة بين ثلاثة لاعبين ؟ فسر

4. أجب عن الاسئلة 1 – 3 بالنسبة للألعاب التالية:
   - عدد الدوائر في السطر الطويل هو 5 .

   - عدد الدوائر في السطر الطويل هو 6 .

   - عدد الدوائر في السطر الطويل هو 8

5. حاول أن تخمّن كم يكون عدد الدوائر في السطر الطويل لكي تكون إمكانية انهاء اللعبة بالتعادل واردة عندما يشترك بها: لاعبان اثنان ، أو ثلاثة لاعبين .

המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence through Education

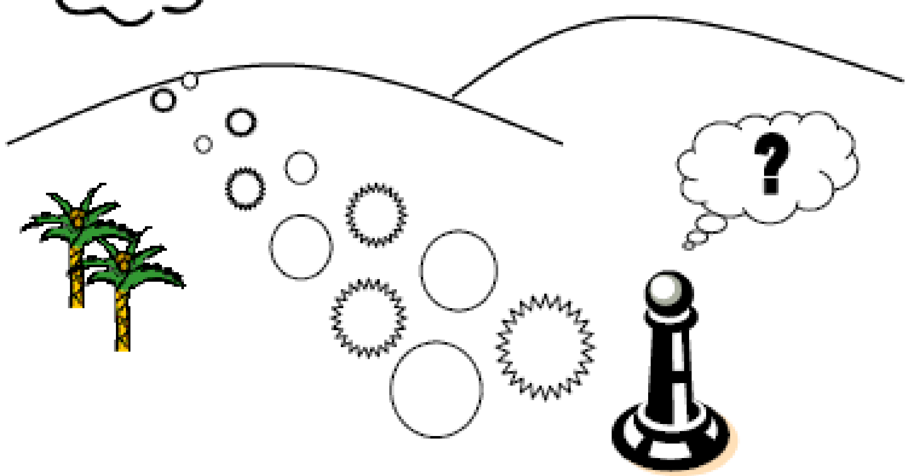
המכון למצוינות בהוראה

ابتسامة فائزة

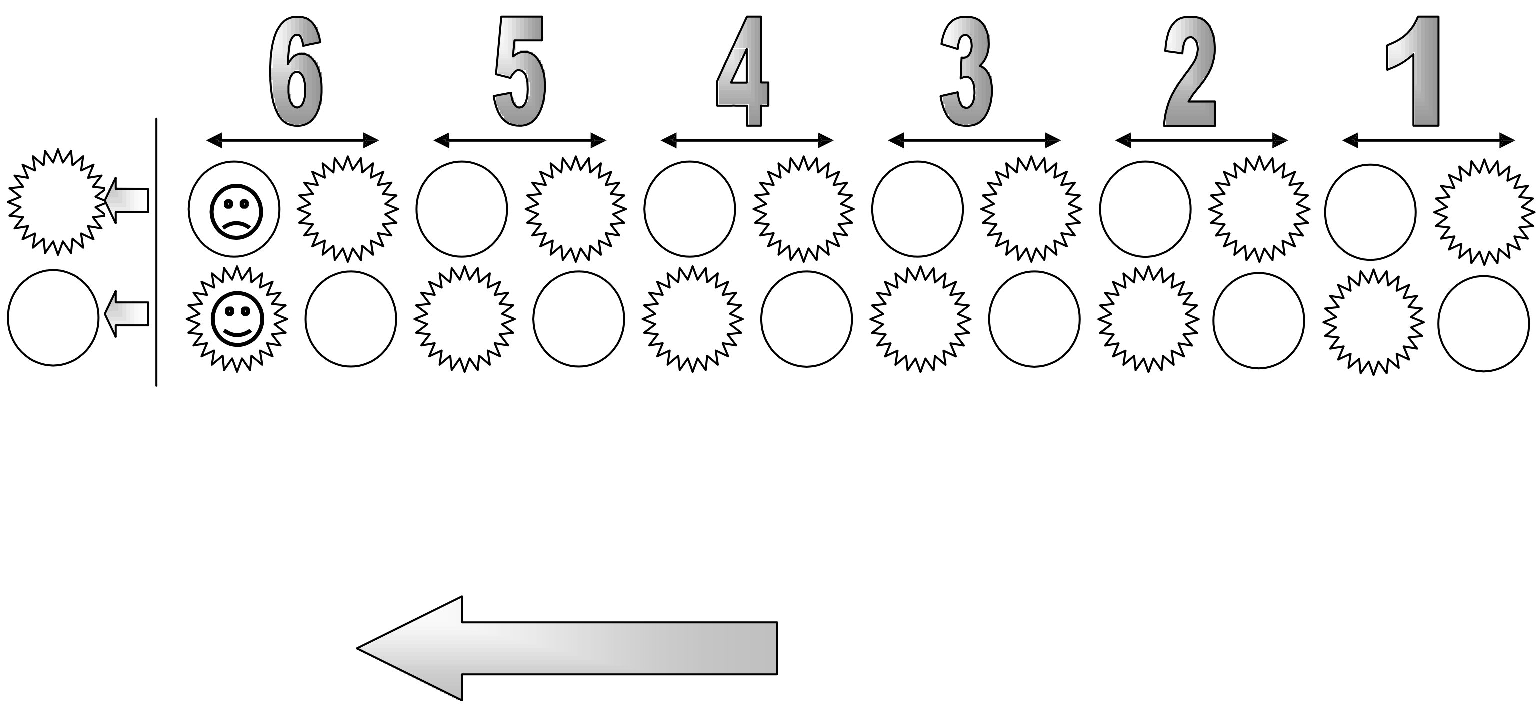
חיוך מנצח

צבי שלם

מערכת: גלי שמעוני, ד"ר אבי פולג



ابتسامة فائزة - لوحة اللعب



מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

מכון דוידסון לחינוך מדעי
DAVIDSON INSTITUTE OF SCIENCE EDUCATION

رياضيات بالمراسلة

أعداد دراكولا – مستوى 3

כתובתנו באינטרנט:
www.weizmann.ac.il/davidson/e-learn

נתקלתם בבעיה טכנית באתר? moodle.davidson@weizmann.ac.il
בכל בעיה אחרת – mathbymail@weizmann.ac.il

צוות התכנית מתמטיקה בהתכתבות

ראש תחום תוכניות למידה מרחוק
ד"ר יוסי אלרן

ראש תכנית מתמטיקה בהתכתבות
מיכל אלרן

יועצת מדעית
ד"ר סבינה שטוקר

מתמטיקאים
פרופ' אדריס תיתי (ערבית)
פרופ' אברהם הרכבי (ספרדית)
ד"ר איירין אייזן (ארה"ב)
יערה אנדולט
רותם גבאי
יונתן וגנר
רועי לחמי
חסן מסאלחה (ערבית)
אמיר מרקוביץ
סאוסן עילבוני (ערבית)
ולידימיר פיבניק
נטליה קוריץ
ג'ניפר רסניק (ספרדית)
נטליה שנקר (ספרדית)

ניהול משרדי
מירי שרתוק-גורודצקי
רוויטל אהרונוב
סיון טראו רוזנשטיין
ג'אן גולדנברג (קנדה)
ניקול דה ברטולו (קנדה)
קרול פסטליכט-פרלמן)מכסיקו)
רינה מיכאל (אוסטרליה)

איורים :מחלקת הגרפיקה של מכון ויצמן למדע וחופית עמרם.
אינטרנט :חופית עמרם
דפוס :הוצאה לאור, מכון ויצמן למדע.

أعداد مصاص الدماء (الدراكولا) وأعداد مثيرة أخرى

("الرياضيات بالمراسلة" 2011 دورة 1 مستوى 3)

مرحبًا وأهلاً وسهلا بالمنضمين الجدد لبرنامج *الرياضيات بالمراسلة*، ومرحبًا لكل أصدقائنا من السنوات السابقة!

نحن على أمل أن تستمتعوا بكافة الأحاجي، الألعاب ومسائل الرياضيات التي سنعرضها لكم خلال السنة.

سوف نفتتح السنة بموضوع مفاجئ وممتع – أعداد مصاص الدماء!

قبل ان نَصل الى لُب الموضوع، هنالك حاجة لمراجعة مواضيع معينة مُتعلقة بالأعداد...

الاعداد الاولية

الأعداد الأولية هي الأعداد الصحيحة التي تقسم (بدون باقٍ) على نفسها وعلى 1 فقط.

مثال: العدد 3 يقسم فقط على 3 وعلى 1، ولذلك فهو عدد أولي.

العدد 6 يقسم على 2,على 3 وعلى 1, ولذلك فهو **ليس** عدد أولي.

العدد الوحيد الشاذ عن القاعدة هو العدد 1، بالرغم من انه يقسم على نفسه وعلى 1 فقط (في هذه الحالة على نفس العدد) فهو لا ينتمي للأعداد الأولية.

1. أ. أكملوا الجملة التالية: الأعداد الأولية من 0 حتى 30 هي:______________________________

____

ب. هل يمكن للعدد الأولي أن يكون عددًا زوجيًا؟ نعم/كلا (أشيروا إلى الإجابة الصحيحة)

عوامل العدد

عوامل العدد هي الأعداد الطبيعية التي يقسم عليها العدد الأصلي بدون باقي.

لكل عدد طبيعي يوجد على الاقل, عاملان.

مثال: عوامل العدد 12 هم 1،2، 3، 4، 6، 12، وذلك لان العدد 12 يقسم على كل واحد من هذه الأعداد بدون باقٍ.

العدد المثالي

العدد المثالي هو العدد المساوي تمامًا لحاصل جمع كل عوامله (ما عدا العدد نفسه).

مثال: العدد **28**.

هذا العدد هو عدد مثالي، لان عوامله هي 1، 2، 4، 7، 14، وحاصل جمعها هو تمامًا 28!

.28 = 14+7+4+2+1

2. أ. جدوا كافة عوامل الاعداد التالية: 23, 24, 25, 50, 120.

عوامل العدد 23: __________________________

عوامل العدد 24: __________________________

عوامل العدد 25: __________________________

عوامل العدد 50: __________________________

عوامل العدد 120: __________________________

ب. ما هو عدد العوامل لعدد أولي معين؟ 1 / 2 / 3 / 4 (أشيروا الى الاجابة الصحيحة)

ج. عدد العوامل لعدد قابل للتحليل (غير أولي), والذي هو تربيع لعدد معين, هو زوجي \ فردي (أشيروا الى الاجابة الصحيحة).

د. عدد العوامل لعدد قابل للتحليل (غير أولي) والذي هو ليس تربيع لعدد معين, هو زوجي \ فردي (أشيروا الى الاجابة الصحيحة).

3. أ. جدوا عدد مثالي بين 2 والـ 10: _______________

ب. أشيروا الى التمرين الذي يَصف العدد 496 كعدد مثالي من بين التمارين التالية:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 123 + 249 = 496$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 35 + 70 + 120 + 240 = 496$$

$$200 + 296 = 496$$

ج. العدد المثالي الذي يأتي بعد العدد 496 هو عدد مكون من اربع منازل. استعينوا بالانترنت وأشيروا اليه من بين الاعداد التالية:

8218 / 8812 / 4444 / 8128

في العدد المثالي التالي, العدد الذي يأتي بعد العدد 496 له 6 / 7 / 8 / 9 منازل.

اعداد *"أربعة على أربعة"* هي أعداد يمكننا أن نبنيها أو نحصل عليها بواسطة استعمال العدد 4 أربع مرات، واستعمال العمليات الحسابية؛ الجمع، الطرح، الضرب والقسمة.
على سبيل المثال يمكننا الحصول على العدد 7 من أربع مرات أربعة هكذا: 7=4:4-4+4, أو بالاستعانة بالأقواس: 7=1-8=(4:4)-(4+4)."

4. إحصلوا أو ابنوا الأعداد التالية بطريقة "أربعة على أربعة": 16، 2، 8 وعلى أعداد أكثر صعوبة: 6، 9، 15، 60.

16 = ________________ 2 = ________________

8 = ________________ 6 = ________________

9 = ________________ 15 = ________________

60 = ________________

والتر روز بول
(1850-1925)

كما هو معروف، عالم الرياضيات والتر روز بول (Walter Rouse Ball) طَرح أحجية *أربعة على أربعة* لأول مرة في كتابه "تسالي رياضيات ومقالات" (Mathematical Recreations and Essays).
لقد كتَب كتابه الذي تم اصداره سنة 1892، بالتعاون مع صديقه عالم الرياضيات كوكستر (H.S.M. Coxeter).
تميّز بول بتفوقه في الرياضيات في جامعة كامبريدج في انجلترا، حتى انه فاز عدة مرات بمراتب عليا في اولمبياد الرياضيات.
بالرغم من انه لم يعمل كثيرًا في مجال البحث في الرياضيات، كان معروفًا بكونه معلمًا ممتازا، واهتم كثيرًا في تسالي الرياضيات وتاريخ العلوم. عمل أيضًا في مجال المحاماة وكان فعالا بالفعاليات الجماهيرية. لقد تم طباعة كتابه بـ 14 طبعة ولا يزال منتشراً حتى يومنا هذا.

اذا قُمنا بتوسيع قوانين اللعب بالأعداد أربعة على أربعة بحيث يُمكننا استعمال **القوى** للأعداد أربعة **وأيضًا الجذور التربيعية**، بالاضافة الى إلصاق أعداد الأربعة بجانب بعضها، وهكذا يمكننا الحصول على عدد اكبر من الاعداد. $4\times444=1776$

<u>رفع ألاعداد للقوة</u>

عندما نقول أن عدد **للقوة** لعدد معين، نعني بهذا اننا نضرب العدد (ألاول) بنفسه عدة مرات، بحسب القوة المرفوع اليها.
في بعض الاحيان نقول اننا **نرفع** العدد الاول لقوة العدد الثاني.
مثال: 2 للقوة 3 (يمكننا ان نقول ان العدد 2 مرفوع للقوة 3) بحيث نرمز له 2^3، ومعناه $2\times2\times2$، أي 8.
مثال اخر: 2^4، والتي هي 2 للقوة 4، ومعناها $2\times2\times2\times2$، أي أن الناتج 16.

الجذر التربيعي

الجذر التربيعي هو العملية العكسية لعملية التربيع (الرفع للقوة 2). بكلمات اخرى، الجذر التربيعي *لعدد معين* هو العدد الذي يُجيب عن السؤال التالي:

ما هو العدد الذي نَضربهُ بنفسهِ يعطينا *العدد المعين*.

يُرمز للجذر التربيعي هكذا: $\sqrt{\text{عدد}}$. تستطيعون رؤية هذا الرمز على اغلب آلات اليد الحاسبة.

مثال: يُرمز لجذر العدد 4 هكذا: $\sqrt{4}$ وهو مساوٍ لـ 2 : $\sqrt{4}=\sqrt{2\times 2}=2$ (أي ان 2 هو العدد الذي عندما نَضرُبهُ بنفسه – يعطينا العدد 4).

مثال اخر: $\sqrt{25}=\sqrt{5\times 5}=5$ وبالكلمات العدد 5 هو جذر العدد 25.

5. احسبوا القيم التالية: 3^2, 4^3, 10^2, 5^4. أشيروا الى الإجابة الصحيحة في التمارين التالية.

3^2 = 6 / 9 / 12 / 33

4^3 = 12 / 44 / 64 / 444

5^4 = 625 / 545 / 555 / 5555

15^2 = 15 / 105 / 225 / 155

جذر العدد 144 ($\sqrt{144}$)هو __________

جذر العدد 256 ($\sqrt{256}$)هو __________

جذر العدد 400 ($\sqrt{400}$)هو __________

جذر العدد 1089 ($\sqrt{1089}$)هو __________

أمامكم توسُع اخر للعبة "أربعة على أربعة": ليس من الضروري ان يظهر القم 4 اربع مراتٍ، بل وممكن تكوين العدد المطلوب بأقل من أربع مرات 4، ولكن ليس أكثر. مثلاً، يمكننا تكوين العدد 40 بواسطة استخدام 3 مرات العدد 4 فقط: 40=4–44."

6. كَوّنوا الاعداد التالية بواسطة استخدام طريقة "أربعة على أربعة". حاولوا تكوين الاعداد بالاستعانة بالقوانين الجديدة , واستعملوا اقل عدد ممكن من اعداد الأربعة :

1 = ______________________________

3 = ______________________________

$= 11$ ________________________________

$= 18$ ________________________________

$= 32$ ________________________________

$= 46$ ________________________________

$= 256$ ________________________________

الاباء الاوليين

في هذا القسم سوف نتعلم عن شيء مختلف قليلا، والذي يضم الاعداد الاولية، والرفع للقوة 2 – الاباء الاوليين.

تم تعريف الاباء الاوليين لأول مرة على يد مُعلم رياضيات مبدع جدًا يدعى تييري تروتير (Terry Trotter).

عاش تروتير في سنوات 1941 – 2004. بدأ مسارهُ العلمي في الولايات المتحدة، ومن ثم انتقل الى السلفادور.

من هم الاباء الاوليين؟

اب اولي يُعرف على انه عدد اولي بحيث ان مجموع تربيع منازله هو ايضًا عدد اولي. حاصل الجمع هذا يُدعى *الولد الاولي*.

مثال: العدد 41 هو اب اولي، لان $17 = 1 + 16 = 1^2 + 4^2$, والعددين 17 و 41 اوليين.

بكلمات اخرى، 41 هو اب اولي لولد اولي، في هذه الحالة هو 17. العدد 17 ليس ابًا اوليًا، لان $50 = 49 + 1 = 7^2 + 1^2$, والعدد 50 هو عدد قابل للتحليل (عدد غير اولي)

7. اشيروا الى كافة الاعداد التي تُعتبر اباء اولية من قائمة الاعداد التالية:

97 / 89 / 83 / 79 / 73 / 71 / 67 / 61 / 59 / 53 / 47 / 43 / 41 / 37 / 31 / 29 / 23 / 19 / 17 / 13 / 11

رمز: يوجد فقط خمسة اباء اوليه ثنائية المنزلة

يمكننا ايضا ايجاد سلسلة من الاباء والابناء الاوليين.

مثال: العدد 191 هو اب اولي للعدد 83، والعدد 83 هو اب اولي للعدد 73. العدد 73 هو نهاية السلسلة، وذلك لانه اذا بحثنا عن ابنه الاولي نجد انه العدد 58 والذي هو عدد قابل للتحليل.

8. حتى يومنا هذا، اطول سلاسل تم ايجادها مُكونة من 6 اجيال. الاب الاولي القديم لواحد من السلاسل التالية هو 28999999999. اكملوا جميع الاباء الاولية والابناء الاولية في السلسلة.

28999999999 ← __________ ← __________ ← __________ ← __________ ← __________

أعداد فريدمان

عدد *فريدمان* هو العدد الذي يمكننا الحصول عليه من خلال استعمال أرقامه بالإضافة إلى العمليات الحسابية: الجمع، الطرح، الضرب، القسمة والرفع للقوة. يمكننا ايضًا استعمال الأقواس او لَصق منزلتين الواحدة بجانب الاخرى – تمامًا كما فعلنا في *أربعة على أربعة*.

لا يُسمح لكم استعمال أي من الارقام التي لا تكوّن العدد.

مثال لعدد فريدمان مع استعمال عملية الضرب: $21\times6=126$.

مثال آخر لعدد فريدمان مع استعمال الرفع للقوة: $5^2=25$. (المقصود هو 5×5).

9. لماذا تُعتبر ألأعداد التالية أعداد فريدمان؟ اشيروا الى الاجابة الصحيحة.

- العدد 121 هو عدد فريدمان لان: $121 = 121 / 11\times11 = 121 / 12\times1 = 121 / 11^2 = 121$
- العدد 153 هو عدد فريدمان لان: $31^5 = 153 / 51 \times 3 = 153 / 5 \times 31 = 153 / 15^3 = 153$
- العدد 289 هو عدد فريدمان لان: $29+8 = 289 / 82\times9 = 289 / (9+8)^2=289 / 89\times2=289$
- العدد 1206 هو عدد فريدمان لان: $62-10=1206 / 106^2=1206 / 60+12=1206 / 6\times201=1206$
- العدد الذي أكله فينسينت، 100255، هو عدد فريدمان لان:

$12005 : 5 = 100255 / 5 \times 20051 = 100255 / 255 \times 100 = 100255 / 10025 + 5 = 100255$

اريك فريدمان (Erich Friedman)، الذي أوجد أعداد فريدمان، وُلد في سنة 1965 في الولايات المتحدة. هو عالم رياضيات موهوب جدًا والذي يتعامل كثيرا مع ألعاب الرياضيات. فريدمان يتمتع بالعديد من القدرات، لقد استطاع ان يتذكر عن ظهر قلب أول 50 عدد بعد الفاصلة للعدد π، ويستطيع حل مكعب روبيك (مكعب هنغاري) بـِ 50 ثانية!"

أعداد فريدمان الجميلة

عدد فريدمان الجميل هو عدد فريدمان الذي ترتيب المنازل في التعبير الرياضي الذي يصفهُ مطابق لترتيب منازل العدد نفسه. مثال لعدد فريدمان جميل: $343 = (3 + 4)^3$

نوع اخر من اعداد فريدمان الجميلة هي اعداد فريدمان المكوّنة من منزلة واحدة فقط، والتي تعود على نفسها عدة مرات، مثال $11111111111 = ((11-1)11 -1\times1):(11-1-1)$

10. بيّنوا لماذا تُعتبر الاعداد التالية, اعداد فريدمان الجميلة: 736, 1285, 2592, 28224, 99999999

أعداد مصاص الدماء

عدد مصاص الدماء: هو العدد الذي يمكننا الحصول عليه عن طريق ضرب عددين المُكونين من منازل العدد نفسه. يُدعى هذان العددان **بالأنياب**.

عدد مصاص الدماء هو حالة خاصة لأعداد فريدمان.

نحن نقصد بالتعبير "حالة خاصة" هو ان مجموعة اعداد فريدمان تحتوي بداخلها أعداد مصاص الدماء.

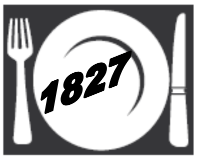
مثال لعدد مصاص الدماء: $8700\times210=1827000$.

عدد مصاص دماء أصلي: هو عدد مصاص دماء الذي فيه لكلا النابين نفس عدد المنازل، وعلى الاقل واحد منها لا ينتهي بالعدد صفر.

مثال لعدد مصاص دماء أصلي: $87\times21=1827$.

عدد مصاص دماء أولي هو عدد مصاص دماء حقيقي فيه العددين المضروبين هما عددان اوليين (بالاضافة الى الصفة التي تم ذكرها من قبل, أن عاملي الضرب لهما نفس عدد المنازل، وعلى الاقل واحد منها لا ينتهي بالعدد صفر.

مثال لعدد مصاص دماء أولي: $701\times167=117067$



11. الأعداد: 126، 153، 688 و- 1395 هي اربعة أعداد تنتمي لأعداد مصاص الدماء. جدوا لكل عدد مصاص دماء, الانياب الملائمة له من "مخزن الانياب" التالي (رمز: لا توجد حاجة لاستخدام جميع أعداد المخزن):

3   5   6   8   13   15   21   39   51   53   86   93

126 - الأنياب هي: ________________   153 - الأنياب هي: ________________

688 - الأنياب هي: ________________   1395 - الأنياب هي: ________________

12. لماذا العدد 103000 لا يُمكنه ان يكون عدد مصاص دماء؟ أشيروا الى الاجابة الصحيحة.

أ. العدد 103000 لا يُمكنه ان يكون عدد مصاص دماء لانه لا توجد اي امكانيه تكوين عددين من منازل العدد 103000 بحيث يكون حاصل ضربهم 103000، وهذا بسبب كثرة الاصفار.

ب. العدد 103000 لا يُمكنه ان يكون عدد مصاص دماء لانه لا توجد اي امكانيه تكوين عددين من منازل العدد 103000 بحيث يكون حاصل ضربهم 103000، وهذا بسبب كونه عددًا زوجيًا.

ج. العدد 103000 لا يُمكنه ان يكون عدد مصاص دماء لانه لا توجد اي امكانيه تكوين عددين من منازل العدد 103000 بحيث يكون حاصل ضربهم 103000، وهذا بسبب كونه عددًا كبيرًا جدًا.

13. الأعداد: 1260، 2187، 6880 و- 1435 هي اربعة أعداد تنتمي لأعداد مصاص الدماء **الأصلية**.
جدوا لكل عدد مصاص دماء أصلي، الانياب الملائمة له من "مخزن الانياب" التالي (رمز: لا توجد حاجة لاستخدام جميع أعداد المخزن):

12	13	21	27	35	41	60	68	80	81	86	87	88

1260 - الأنياب هي: ________________ 2187 - الأنياب هي: ______________________

6880 - الأنياب هي: ________________ 1435 - الأنياب هي: ______________________

14. أي من بين الاعداد :1260، 2187، 6880 و 1435 هي اعداد مصاص دماء اولية؟

6880 – نعم\كلا الأنياب هي: ________________________

124483 – نعم\كلا الأنياب هي: ________________________

1435 – نعم\كلا الأنياب هي: ________________________

536539 – نعم\كلا الأنياب هي: ________________________

ألاعداد العادلة

العدد العادل يُعرّف على انه العدد الذي قيمته مساوية لعدد الاحرف التي تُكون اسمه، او بطريقة اخرى (بالكلمات) الذي يمكن وصفه.

انتبهوا الى انه مسموح لنا اللعب بالكلمات واستعمال الكتابة الكاملة او الناقصة (مثلا: ست أو ستة) بحسب اختيارنا، وبحسب الحاجة.

أمثلة لاعداد عادلة باللغة العربية: 4 – أربع (أربعة أحرف)

9 – ستة وثلاثة (9 احرف)

انتبهوا الى انه يمكننا وصف العدد العادل بعدة طُرق مختلفة! (مثل استعمال الكلمات: زد، أضف، ناقص، ضرب وايضًا الخ...)

مثال: 25 – تسعة عشر اضف ثمانية ناقص اثنان (25 حرف)

25 – اربعة عشر ضرب اثنان ناقص ثلاثة (25 حرف)

وهكذا...

الاعداد المُبذرة

نُعرف العدد على انه عدد مُبذّر اذا تَمكنا من وصفه بعدد احرف اقل من عدد احرف اسم العدد نفسه.

مثال: العدد 36 – سته ضرب ستة (9 أحرف) مقابل ستة وثلاثون (10 أحرف)

*15. أي من بين الاعداد التالية هي أعداد عادلة باللغة العربية؟

1	2	3	4	5
9	10	15	17	18

سوف نتحدث من خلال المنتدى عن أعداد عادلة اخرى، وسنحاول ايجاد امثلة لأعداد عادلة التي يُمكننا وصفها بعدة طرق مختلفة. بالأضافة الى ذلك سنتحدث عن الاعداد المُبذرة، سوف تتعلمون عنها قليلاً من خلال السؤال التالي.

*16. أمامك وصفان. اكتبوا ما هي الأعداد المُبذرة تم وصفها:

أ. تسعة ضرب تسعة (10 أحرف) مقابل واحد وثمانون (11 حرف) يصف العدد ______ كعدد مُبذر.

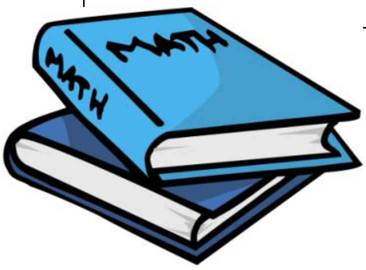
ب. ستة للقوة ثلاث (11 حرف) مقابل مئتان وستة عشر (12 حرف) يصف العدد ______ كعدد مُبذر

17. صنّفوا الاعداد التالية الى مجموعات – اعداد اولية، اعداد فريدمان، اعداد مصاص الدماء، اعداد مصاص الدماء الحقيقية (من المحتمل وجود اعداد التي تنتمي الى اكثر من مجموعة واحدة):

11 - ______________________
4 - ______________________
28 - ______________________
81 - ______________________
1255 - ______________________
127 - ______________________
1827 - ______________________
146137 - ______________________

الاستمارة التالية ستكون بعنوان: رياضيات الحياة اليومية...

المصادر والخلفية



كتب:

كتيبات اثراء التابعة لمعهد وايزمن للعلوم

مادة مصدر لميخال ويوسي إلران.

مواقع انترنت موصى بها:

http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0800.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Friedman_number
http://mathworld.wolfram.com/VampireNumber.html
http://mathworld.wolfram.com/PerfectNumber.html
http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1203.html
http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_03_01_04.html
http://hjem.get2net.dk/jka/math/vampires/
http://www.grenvillecc.ca/faculty/jchilds/vampire.htm
http://sprott.physics.wisc.edu/pickover/pubb.html
http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html

מטח
مركز التكنولوجيا التربوية

مسارات للتميّز

رياضيات للصف السابع
مركز التكنولوجيا التربوية

- ألعاب بالأعداد
- أسئلة عن الأعداد الأوّليّة
- ساعة أم روزنامة؟
- مساحات وعيدان ثقاب
- التانچرام
- ألعاب في جداول أعداد

فعاليات في مجال الأعداد

أ. ألعاب بالأعداد

لعبة "السباق إلى 60"

قواعد اللعبة: هذه اللعبة مُعدّة للاعبَين.
اللاعب **أ** يكتب عددًا صحيحًا من 1 حتى 9.
اللاعب **ب** يختار عددًا آخر من 1 حتى 9، ثم يجمع ويكتب حاصل جمع العددين.
اللاعب **أ** يختار عددًا آخر من 1 حتى 9، ثم يكتب حاصل الجمع الجديد الناتج، وهلمّ جرًا.
الفائز هو أوّل لاعب يكتب العدد 60.

1 قسّموا أنفسكم إلى أزواج، والعبوا اللعبة مرّتين على الأقلّ.

2 أمامكم مثال لمتوالية أعداد كتبها ماهر ومراد أثناء اللعب (من اليسار إلى اليمين).
7, 12, 20, 23, 25, 28, 37, 44, 48, 54, 60
أكملوا في الجدول الأعداد التي كتبها كل واحد من اللاعبَين.
مَن الفائز في اللعبة؟ وفي أي مرحلة؟

نمرة المرحلة	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ماهر	7	20 (+8)							
مراد	12 (+5)								

3 في كل بند اكتبوا متوالية أعداد بحسب الإستراتيجية المعطاة، وحدّدوا مَن هو الفائز من اللاعبَين، عِلمًا بأنه يُسمح بتغيير الإستراتيجية في الخطوة الأخيرة في اللعبة.

أ. يكتب ماهر العدد 8 في المرحلة الأولى، ويضيف 8 في كل مرحلة. أما مراد فيُضيف 5 في كل مرحلة.

ب. يكتب ماهر العدد 1 في المرحلة الأولى، يضيف 2 في المرحلة الثانية، يضيف 3 في المرحلة الثالثة، وهلمّ جرًا. أما مراد فيُضيف 7 في كل مرحلة.

ج. يكتب ماهر العدد 9 في المرحلة الأولى، يضيف 8 في المرحلة الثانية، يضيف 7 في المرحلة الثالثة، وهلمّ جرًا. أما مراد فيُضيف في كل مرحلة عددًا أصغر بِـ 1 من عدد ماهر.

د. يكتب ماهر العدد 5 في المرحلة الأولى، ويضيف في كل مرحلة أصغر عدد ممكن يجعل من حاصل الجمع الناتج عددًا يُقسم على 5. أما مراد فيُضيف في كل مرحلة أصغر عدد ممكن بحيث يجعل من حاصل الجمع الناتج عددًا يُقسم على 7.

4 في كل بند معطاة متوالية من الأعداد هي نتيجة لعبة لعبها ماهر ومراد.
ما هي استراتيجية كل واحد من اللاعبَين في رأيكم؟
أكملوا المتوالية بحسب هذه الاستراتيجية، وحدّدوا مَن هو الفائز في اللعبة.

أ. 7, 11, 18, 22, 29, 33,...

ب. 3, 6, 8, 12, 15, 20, 24, 30,...

ج. 1, 8, 10, 16, 19, 24, 28, 32, 37, 40,...

5 أ. خطّط ماهر أن يكتب أثناء اللعبة هذه الأعداد:

51 , _ ,41 , _ ,31 , _ ,21 , _ ,11 , _ ,1

هل ينجح في كتابة هذه الأعداد، مهما كانت الأعداد التي يكتبها مراد؟ اشرحوا جوابكم.

ب. إذا أمكن – اقترحوا متواليات أعداد أخرى يستطيع ماهر أن يكتبها، مهما كانت الأعداد التي يكتبها مراد. إذا تعذّر ذلك – اشرحوا السبب.

ج. هل يمكن لِماهر أن يختار استراتيجية تكفل له الفوز، مهما كانت الأعداد التي يكتبها مراد؟ إذا وُجدت مثل هذه الاستراتيجية، اكتبوها واشرحوا جوابكم.

د. هل يمكن لِمراد أن تكون له استراتيجية تكفل له الفوز، مهما كانت الأعداد التي يكتبها ماهر؟ إذا وجدت مثل هذه الاستراتيجية، اكتبوها واشرحوا جوابكم.

هـ. العبوا مع رفيق، وافحصوا إذا كان بالإمكان فعلًا الفوز باستخدام الاستراتيجية التي اقترحتموها.

نُغيّر العدد الهدف

6 هل الاستراتيجية الفائزة التي اقترحتموها في المهمّة 5 تلائم أيضًا اللعبة التي فيها العدد الهدف هو 50؟ إذا لا – لائِموها لمثل هذه اللعبة.
هل الاستراتيجية الفائزة التي اقترحتموها في المهمّة 5 تلائم أيضًا اللعبة التي فيها العدد الهدف هو 65؟ إذا لا – لائِموها لمثل هذه اللعبة.

نُغيّر مدى الأعداد

7 أ. هل الاستراتيجية التي اقترحتموها في المهمّة 5 تلائم أيضًا اللعبة التي فيها العدد الهدف هو 60، وبحيث أن في كل مرحلة يمكن إضافة عدد من 1 حتى 8؟ إذا لا – لائِموها أيضًا لمثل هذه اللعبة.

ب. حاولوا تعميم النتائج التي حصلتم عليها في المهام 5، 6 وَ 7 أ.

لعبة من عندكم

8 اقترحوا لعبة بالأعداد من عندكم. اشرحوا بأيّ استراتيجية يفضّل أن تلعبوا لكي تكفلوا الفوز فيها. علّلوا.

البحث عن أعداد أوّليّة، غربال إراتوستينيس

1 أ. اكتبوا خمسة أعداد أوّليّة. صِفوا الطريقة التي استخدمتموها لإيجاد هذه الأعداد.

ب. هل العدد 1 هو عدد أوّلي؟ اشرحوا.

تذكير العدد الأوّلي هو عدد طبيعي أكبر من 1، يُقسَم بالضبط على عددين: على العدد 1 وعلى العدد نفسه. مثالان: العددان 7 وَ 23 هما عددان أوّليّان.

***

قام رياضيّون وفلاسفة وعلماء كثيرون منذ آلاف السنين ببحث الأعداد الأوّليّة، ولكن ما زال الكثير من أسرار هذه الأعداد غير مكتشف. في هذه الوحدة ستجدون أسئلة مفتوحة - أسئلة ما زالت غير محلولة - عن الأعداد الأوّليّة. لذلك، أنتم مدعوّون لتجريب قدراتكم!

***

كيف نجد أعدادًا أوّليّة؟ لقد اقترح الحكيم اليوناني إراتوستينيس طريقة بسيطة لإيجاد أعداد أوّليّة، سُميّت **غربال إراتوستينيس**.

2 في هذه المهمّة تستخدمون غربال إراتوستينيس لإيجاد كل الأعداد الأوّليّة حتى 100.

استخدموا قائمة كل الأعداد الطبيعية من 2 حتى 100:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

أ. المرحلة 1 - أصغر عدد في القائمة هو 2، وهو عدد أوّلي.
أتركوه في القائمة، وامحوا منها كل مضاعفاته.
المرحلة 2 - العدد التالي في القائمة هو 3، وهو أيضًا عدد أوّلي.
أتركوه في القائمة، وامحوا منها كل مضاعفاته.

يتبع

ب. • ما هو العدد التالي في بداية القائمة، الذي يجب محو مضاعفاته؟ هل هو أوّلي أم قابل للتحليل؟
• هل بعد كل مرحلة يظهر في بداية القائمة عدد أوّليّ؟ اشرحوا.
• قدِّروا: بعد أن تمحوا كل مضاعفات العدد التالي - فما هو أوّل عدد قابل للتحليل في القائمة لم تمحوه بعد؟

ج. قدِّروا حتى أيّ عدد أوّلي يجب أن تستمرّوا في العملية. علّلوا تقديركم.
أكملوا العملية وافحصوا تقديركم.

د. اكتبوا كل الأعداد الأوّليّة حتى 100.
كم عددًا أوّليًا وجدتم حتى 100؟

هل تعلمون؟

إراتوسْتينيس (276-194 ق.م.) - هو عالم رياضيات، وشاعر، ولاعب رياضي (في صغره)، وجغرافي وعالم فلك يوناني. أطلق عليه أبناء عصره الاسن "بيتا" (وهو الحرف الثاني في الأبجدية اليونانية)، لأنه أثبت نفسه على أنه ثاني أفضل شخص في مجالات مختلفة. كان أوّل مَن حسب من اليونانيين (وبدقّة كبيرة!) محيط الكرة الأرضية، وهو مَن فكّر في خطوط الطول والعرض الجغرافيّة.

3 أ. كم عددًا أوّليًا يوجد بين 1 وَ 10؟ بين 11 وَ 20؟ بين 21 وَ 30؟
افحصوا كم عددًا أوّليًا يوجد في كل عشرة حتى العدد 100.

ب. في أيّ سطر في الجدول المعطى في المهمّة 2 يوجد أكثر عدد من الأعداد الأوّلية؟

ج. هل يمكن أن يكون بين عشرة أعداد متتالية، خمسة أعداد أوّليّة أو أكثر؟ اشرحوا.

د. هل يمكن أن لا يوجد بين عشرة أعداد متتالية، أيّ أعداد أوّليّة أبدًا؟ اشرحوا.

هـ. قدِّروا: هل يوجد في المئة الثانية (أي الأعداد من 101 حتى 200) أعداد أوّليّة أكثر مِمّا في المئة الأولى، أم أقلّ؟ افحصوا تقديركم.

4 صحيح أم غير صحيح؟ اشرحوا.

أ. بين الأعداد الطبيعية من 1 حتى 50 يوجد أعداد قابلة للتحليل أكثر من الأعداد الأوّلية.

ب. بين الأعداد الطبيعية من 100 حتى 200 يوجد أعداد قابلة للتحليل أكثر من الأعداد الأوّلية.

ج. في كل مجموعة من الأعداد الطبيعية المتتالية، يوجد أعداد قابلة للتحليل أكثر من الأعداد الأوّلية.

5 معلوم أن الأعداد 8861، 53087 وَ 2502559 هي أعداد أوّليّة.

أ. اكتبوا بواسطتها تعبيرًا حسابيًا نتيجته هي عدد يُقسم على هذه الأعداد الثلاثة.

ب. اكتبوا بواسطة الأعداد الثلاثة تعبيرًا حسابيًا نتيجته هي عدد لا يُقسم على أي عدد منها.

ج. في موقع The primes Pages يمكنكم إيجاد قائمة* بأصغر 50,000,000 عدد أوّلي (من 2 حتى 982,451,653). هل يوجد عدد لا يُقسم على أي عدد من هذه الأعداد؟ اشرحوا.

6 عندما نفحص قائمة الأعداد الأوّليّة، نجد أنه كلما كبُرت الأعداد - تنخفض وتيرة ظهور الأعداد الأوّلية. فهل "تنتهي" هذه الأعداد؟ أي، هل يوجد عدد أوّلي هو آخر الأعداد الأوّلية، بمعنى أنه لا يوجد عدد أوّلي أكبر منه؟ اشرحوا.

أكبر عدد أوّلي معروف، حتى شهر تمّوز من عام 2011، هو $2^{43,112,609}-1$، وهو عدد مكوّن من 12,978,189 رقمًا. اكتُشف هذا العدد في إطار مشروع GIMPS - وهو مشروع تعاوني في الشبكة، يُجنّد قدرات عشرات الآلاف من الحواسيب الموزّعة في أنحاء العالم في البحث عن أعداد أوّلية كبيرة.
إذا كنتم ترغبون بضمّ حاسوبكم البيتي الخاص إلى هذا المشروع (لعلّكم تكتشفون أكبر عدد أوّلي يلي العدد المعروف أعلاه)، باستطاعتكم الاتّصال بالموقع: http://www.mersenne.org

الفروق بين الأعداد الأوّليّة، الأعداد الأوّليّة التوائم

7 أ. هل توجد أزواج من الأعداد الأوّليّة الفرق بينها هو 1؟ كم زوجًا كهذا يوجد؟ علّلوا.

ب. جِدوا زوجًا من الأعداد الأوّليّة، الفرق بين العددين فيه هو 11. هل توجد أزواج أخرى كهذه؟ علّلوا.

ج. هل توجد أزواج من الأعداد الأوّليّة الفرق بين العددين فيها هو 13؟ علّلوا.

تعريف العددان في أي زوج من الأعداد الأوّليّة، الفرق بينهما هو 2 يُسميّان **عددين أوّليَين توأمَين**.

8 أ. جِدوا 5 أزواج من الأعداد الأوّليّة التوائم.

ب. لِكل زوج من الأعداد الأوّلية التوائم التي وجدتموها، سجِّلوا العدد الذي بينهما.
هل توجد صفة مشتركة لِـ"أعداد الوسط" التي سجّلتموها؟ اشرحوا.

ج. الثلاثية 2, 3, 5 هي ثلاثية أعداد أوّلية متتالية، تحتوي على زوج من عددين أوّليين توأمين، هما: 3, 5. حاولوا أن تجدوا ثلاثية أخرى من ثلاثة أعداد أوّلية متتالية، تحتوي على زوج من عددين أوّليين توأمين. كم ثلاثية كهذه يوجد؟ هل بإمكانكم أن تشرحوا السبب؟

سؤال مفتوح علماء الرياضيات لم يجدوا حتى الآن برهانًا (أو تفنيدًا) للفرضيّة التي تُقدّر وجود لا نهاية من أزواج الأعداد الأوّلية المكوّنة من عددين توأمين.

* للدخول إلى قائمة أصغر 50,000,000 عدد أوّلي: http://primes.utm.edu/lists/small/millions

9 تُشير التجربة إلى أنه بالإمكان كتابة كل عدد زوجي كفرق بين عددين أوّليّين. مثلًا:

وهلمّ جرّا. $72 = 83 - 11$, $6 = 11 - 5$, $4 = 7 - 3$, $2 = 5 - 3$

سجِّلوا كل عدد من الأعداد التي أمامكم كفرق بين عددين أوّليّين:

12, 34, 56, 88, 100

ابحثوا قدر الإمكان عن إمكانيات أكثر لنفس العدد.

أسئلة مفتوحة

أمامكم ادّعاءان لم يجدوا لهما بعد بُرهانًا (ولا تفنيدًا):

- يمكن تسجيل كل عدد زوجي كفرق بين عددين أوّليّين.
- يمكن تسجيل كل عدد زوجي (أكبر من 2) كحاصل جمع عددين أوّليّين.

الادّعاء الثاني هنا معروف باسم **فرضيّة چولدباخ**، على اسم عالم الرياضيات الألماني كريستيان چولدباخ.

فحص الأوّليّة

إحدى طرق فحص أوّليّة عدد تُسمّى **اختبار القسمة**: للتأكّد من أن عددًا ما هو عدد أوّلي، يجب التأكّد من أنه لا يُقسم على أي عدد أوّلي أصغر أو يساوي جذره التربيعي.

مثال للتأكّد من أن 701 هو عدد أوّلي، علينا التأكّد من أنه لا يُقسم على أي عدد أوّلي أصغر من $\sqrt{701} = 26.476...$، أي على الأعداد: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 وَ 23.

10 أ. أمامكم قائمة بأعداد من ثلاثة أرقام:

176, 235, 377, 443, 469, 611, 723, 845, 999

جِدوا باستخدام اختبار القسمة، أيّ هذه الأعداد هي أعداد أوّلية.

ب. بحسب اختبار القسمة، للتأكّد من أن عددًا ما هو عدد أوّلي، يجب محاولة قسمته فقط على أعداد أوّلية. لماذا لا نحتاج إلى فحص قسمته على أعداد قابلة للتحليل؟

ج. بحسب اختبار القسمة، ليست هناك حاجة لفحص قسمة العدد على أعداد أوّلية أكبر من جذره التربيعي. اشرحوا السبب.

هناك عدّة إمكانيات لتحليل عدد طبيعي إلى العوامل.

مثال يمكن تحليل العدد 24 إلى العوامل هكذا: $24 = 6 \cdot 4$ أو هكذا: $24 = 3 \cdot 8$

وبكم طريقة مختلفة يمكن تحليل عدد **إلى العوامل الأوّلية**؟ (انتبهوا: التغيير في ترتيب العوامل لا يعتبر تحليلًا مختلفًا: فالتحليلان $6 = 3 \cdot 2$ وَ $6 = 2 \cdot 3$ هما نفس التحليل للعدد 6.)

عالِم الرياضيات اليوناني إقليدس (عاش في السنوات 365–275 ق.م.) أثبت أن هناك طريقة واحدة فقط للقيام بذلك، وعُرفت هذه الصفة باسم **النظرية الأساسية في الحساب**.

د. حلِّلوا إلى العوامل الأوّلية كل عدد قابل للتحليل من القائمة المعطاة في البند أ.

מצוינות
חובות

زُمرات

מתמטיקה שולבת
אלגברה גאומטרייה מספרים

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי
על־שם עמוס דה-שליט
אגף המדעים - המזה"פ

מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים

الوحدة السادسة: زُمرات

6.1 عمليات ثنائية

الآلة الحاسبة الغريبة

وجد داوود آلة حاسبة قديمة وغريبة.

رأى على الآلة الحاسبة أزرار أرقام والزر $=$

لكنه لم ينجح في تمييز أزرار العمليات الحسابية العادية.

نحاول أن نجد العمليات الحسابية التي تنفّذها الأزرار المختلفة في الآلة الحاسبة التي وجدها داوود.

جدوا العملية

1. أمامكم التمارين التي حلها داوود والنتائج التي حصل عليها.
ما هو - بحسب رأيكم - معنى كل زر من الأزرار؟

مثال: الزر $\clubsuit$

$7 \clubsuit 3 = 20$	$1 \clubsuit 5 = 12$
$2 \clubsuit 7 = 18$	$3 \clubsuit 2 = 10$
$4 \clubsuit 4 = 16$	$8 \clubsuit 4 = 24$

معنى الزر: $a \clubsuit b = 2 \cdot (a + b)$

أ. الزر $\blacktriangle$

$2 \blacktriangle 1 = 5$

$11 \blacktriangle 3 = 25$

$20 \blacktriangle 6 = 46$

$3 \blacktriangle 5 = 11$

$4 \blacktriangle 6 = 14$

$7 \blacktriangle 5 = 19$

ب. الزر $\spadesuit$

$7 \spadesuit 1 = 4$

$4 \spadesuit 1 = 2.5$

$4 \spadesuit 2 = 3$

$2 \spadesuit 6 = 4$

$7 \spadesuit 2 = 4.5$

$2 \spadesuit 0 = 1$

ج. الزر $\bigstar$

$7 \bigstar 1 = 50$

$4 \bigstar 1 = 17$

$4 \bigstar 2 = 18$

$2 \bigstar 6 = 10$

$3 \bigstar 3 = 12$

$5 \bigstar 0 = 25$

د. الزر $\blacklozenge$

$2 \blacklozenge 18 = 56$

$20 \blacklozenge 3 = 83$

$2 \blacklozenge 100 = 302$

$2 \blacklozenge 6 = 20$

$3 \blacklozenge 3 = 15$

$5 \blacklozenge 10 = 65$

2. أمامكم تمارين مع عمليات الأزرار ♦ ★ ♠ ▲ التي بحثتموها.
اكتبوا أعدادًا مناسبة.

أ. الزر ▲

$10 \blacktriangle 3 = \square$

$11 \blacktriangle \square = 40$

$\square \blacktriangle 16 = 76$

$21 \blacktriangle \square = 100$

ب. الزر ♠

$15 \spadesuit 47 = \square$

$\square \spadesuit 23 = 52.5$

$10 \spadesuit \square = 4$

$\square \spadesuit \square = 5$

ج. الزر ★

$4 \bigstar 5 = \square$

$-3 \bigstar -2 = \square$

$4 \bigstar \square = 17$

$\square \bigstar 3 = 12$

د. الزر ♦

$1 \blacklozenge 1 = \square$

$3 \blacklozenge 10 = \square$

$2 \blacklozenge \square = 11$

$\square \blacklozenge \square = 5$

تعريف:
عملية ثنائية على أعداد هي عملية تتم على عددين (ليس بالضرورة مختلفان عن بعضهما)، وتعطينا عدد ثالث كنتيجة للعملية الثنائية.
مثال: جميع العمليات الحسابية التي تعرَّفنا عليها حتى الآن، هي عمليات ثنائية على الأعداد.
عملية إيجاد مقلوب العدد ليست عملية ثنائية، لأنها تعمل على عدد واحد.

خواص العمليات الثنائية

3. حاول داوود أن يحسب في الآلة الحاسبة الغريبة التمرين $1 \blacktriangle 7$ ، أخطأ وبدل ترتيب العددين الأول والثاني في التمرين.

أ. ما هي النتيجة (غير الصحيحة) التي حصل عليها داوود، وما هي النتيجة الصحيحة لهذا التمرين؟

ب. ماذا يحدث إذا كرر داوود الخطأ وبدل ترتيب الأعداد في العمليات الأخرى؟

تعريف:
العملية الثنائية التي تغيير ترتيب الأعداد فيها لا يؤثر على النتيجة، نسمِّيها عملية تبادلية.

4. هل العمليات ♦ ★ ♠ ▲ تبادلية؟ إذا كانت الإجابة نعم، اشرحوا. إذا كانت الإجابة كلا، في كل عملية ليست تبادلية، أعطوا أمثلة لتمارين فيها تغيير ترتيب الأعداد يعطينا نتائج مختلفة.

5. أ. أعطوا مثالين إضافيين لعمليات تبادلية.
لكل عملية كهذه، اكتبوا ثلاثة أزواج تمارين ($a*b$ وَ $b*a$) تعبِّر عن صفة التبادلية.

ب. أعطوا مثالين إضافيين لعمليات ليست تبادلية.
لكل عملية كهذه، اكتبوا ثلاثة أزواج تمارين ($a*b$ وَ $b*a$) تبيِّن أن صفة التبادلية لا تتحقق في هذه العمليات.

6. أ. قال داوود: "نتيجة الجمع العادي للعدد 0 وعدد آخر تكون العدد الآخر دائمًا. على ما يبدو أن هذا صحيح مع العملية ♠ ".
سجَّل داوود التمارين الآتية: 0 ♠ 3 6 ♠ 0 2 ♠ 0
هل فرضية داوود صحيحة؟

ب. قالت أميرة: "نتيجة الضرب العادي للعدد 1 بكل عدد آخر تكون العدد الآخر دائمًا. على ما يبدو أن هذا صحيح مع العملية ♠".
سجَّلت أميرة التمارين الآتية: 1 ♠ 3 6 ♠ 1 2 ♠ 1
هل فرضية أميرة صحيحة؟

ج. حاولوا أن تجدوا عددًا واحدًا مناسبًا لجميع الأماكن الفارغة في التمارين الآتية:

3 ♠ ■ = 3 ■ ♠ 6 = 6 ■ ♠ 2 = 2

تعريف:
العدد الذي نتيجة العملية بينه وبين عدد آخر هي العدد الآخر، نسمِّيه عددًا محايدًا في هذه العملية.
في هذه المرحلة، نتطرق إلى حدود محايدة **في العمليات التبادلية فقط**.
نرمز عادةً للحد المحايد بالحرف e.
إذا رمزنا إلى العملية بـ $*$ وإذا كان لهذه العملية حد محايد، عندئذٍ يتحقق $a*e=e*a=a$ لكل **a** في مجموعة الأعداد التي تكون فيها هذه العملية معرَّفة.

ج. هل العملية ♠ يوجد لها حد محايد؟

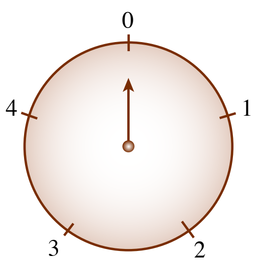
7. حدِّدوا، هل العملية ♦ يوجد لها حد محايد؟ إذا كانت الإجابة نعم، جدوا الحد المحايد. وإذا كانت الإجابة كلا، اشرحوا.

6.2 عمليات مع نتائج دورية - القسم الأول

نظر داوود إلى الساعة الموجودة في غرفته. خرج والده إلى العمل وقال: سأعود بعد 10 ساعات. حاول داوود أن يعرف الساعة عندما يعود والده.

نحاول مساعدة داوود لمعرفة العمليات التي يجب أن ينفِّذها على الساعة، ونتعرف على صفات هذه العمليات.

تعريف:



معطى 5 نقاط على دائرة، أشرنا إليها بأعداد ومعطى عقرب موجَّه إلى ال 0.

نعرِّف العملية $a \circ b$ بين كل زوج من الأعداد الطبيعية أو 0 كالتالي:

دوِّروا العقرب a محطات باتجاه الساعة، وبعد ذلك استمروا في تدويره، في نفس الاتجاه b محطات إضافية.

نتيجة العملية هي رقم المحطة التي وصلتم إليها.

أمثلة:

$1 \circ 3 = 4$	$2 \circ 1 = 3$	$2 \circ 3 = 0$
$6 \circ 7 = 3$	$6 \circ 3 = 4$	$2 \circ 7 = 4$

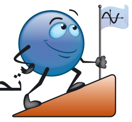
1. حلوا:

$3 \circ 6 =$	$4 \circ 4 =$	$5 \circ 1 =$
$10 \circ 21 =$	$4 \circ 6 =$	$7 \circ 7 =$
$134 \circ 122 =$	$34 \circ 22 =$	$50 \circ 100 =$

2. أ. حلوا كل معادلة، وحاولوا أن تجدوا عدة حلول مناسبة لكل معادلة.
(x هو عدد طبيعي أو صفر):

$7 \circ x = 3$	$3 \circ x = 1$	$2 \circ x = 0$
$x \circ 100 = 1$	$32 \circ x = 2$	$x \circ 2 = 1$

ب.حاولوا أن تجدوا صفة مشتركة لجميع الحلول المختلفة التي وجدتموها لنفس المعادلة.



تحدي

ج. أمامكم قسم من مجموعة حلول معادلة، من نوع المعادلات التي وردت في بند أ:

26, 21, 16, 11, 6, 1

حاولوا أن تجدوا معادلة، بحيث تكون هذه الأعداد حلولها.

هل يمكنكم إيجاد معادلة مناسبة إضافية؟

3. نعود إلى مشكلة داوود: متى يعود والده من العمل؟

الحسابات التي يجب على داوود أن ينفِّذها تشبه الحسابات التي نفَّذتموها في السؤالين 1-2، لكن في هذه المرة، أشرنا إلى 12 نقطة على الساعة (وليس إلى 5).

هل تستطيعون أن تنفِّذوا الحسابات وأن تحسبوا لداوود، متى يعود والده؟

صفات إضافية

انغلاق

تعرَّفنا في الفعالية السابقة على عمليات ثنائية جديدة وعلى صفاتها. وتعرفنا أيضًا على صفتين للعمليات الثنائية: التبادل والحد المحايد.

للتذكير:

العملية الثنائية بين أعداد، هي عملية بين عددين تعطينا عدد ثالث كنتيجة.

العملية التبادلية، هي عملية ثنائية فيها ترتيب الأعداد، لا يؤثر على النتيجة.

الحد المحايد في عملية ثنائية، هو عدد إذا نفَّذنا بينه وبين كل عدد آخر عملية، فإننا نحصل على العدد الآخر.

جميع العمليات التي تعرفنا عليها هي عمليات ثنائية. في هذه المرحلة، نتطرق إلى الحدود المحايدة في عمليات تبادلية فقط.

4. هل العملية ○ هي عملية ثنائية؟ اشرحوا.
هل العملية ○ هي عملية تبادلية؟ علِّلوا.
هل العملية ○ يوجد لها حد محايد؟ إذا كانت الإجابة نعم، ما هو؟ إذا كانت الإجابة كلا، علِّلوا.

تخبط خالد في السؤال الآتي: هل عمليتَي الجمع والطرح العاديتين هما تبادليتين لمجموعة الأعداد الطبيعية؟
قال خالد: "عملية الجمع هي عملية تبادَلية.
وهذا يعني أنه لكل عددين طبيعين a وَ b يتحقق: $a+b=b+a$".
وقد شرح كالتالي: "إذا كان معي رزمتين من الحلوى وأردت أن أدمجهما مع بعضهما في رزمة واحدة، فإنه غير مهم إذا بدأت من الرزمة الأولى أو الرزمة الثانية".
أما بالنسبة لعملية الطرح، فقد تخبط خالد في قراره.
وقام بفحص مثال: $7-3=4$ $3-7=-4$
انتبه خالد إلى أن إحدى نتيجتَي التمرين ليست عددًا طبيعيًا.
استنتج من ذلك أن هذه النتيجَة هي مثال مضاد يبيِّن أن عملية الطرح ليست تبادلية.

تعريف:

نسمِّي مجموعة أعداد **مغلقة** لعملية ثنائية، إذا كانت نتيجة العملية - بين كل عددين في المجموعة - تنتمي إلى نفس المجموعة.

مثال: مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة مغلقة لعملية الجمع العادية، لأن مجموع كل عددين طبيعيين هو عدد طبيعي دائمًا، وهذا يعني أنه ينتمي إلى المجموعة.

لكن مجموعة الأعداد الطبيعية، **غير** مغلقة لعملية الطرح العادية، لأن نتيجة طرح عددين طبيعيين، **ليست** عدد طبيعي **دائمًا**.

مثلًا: نتيجة طرح التمرين $3-7$ ليست عددًا طبيعيًا.

5. في كل بند، افحصوا ما إذا مجموعة الأعداد الطبيعية (دون العدد صفر) مغلقة للعملية المعطاة.
إذا كانت الإجابة نعم، اشرحوا السبب. إذا كانت الإجابة كلا، أعطوا مثال مضاد.

أ. الضرب

ب. القسمة

ج. القوة

د. معدل حسابي (للتذكير: معنى العملية "معدل حسابي لعددين" هو نِصف مجموعهما).

6. هل مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة مغلقة للعملية ○ التي تعرفنا عليها في بداية الفعالية؟
إذا كانت الإجابة نعم، اشرحوا السبب. إذا كانت الإجابة كلا، أعطوا مثال مضاد.

7. نتائج العملية ○ هي نتائج **دورية**. لذا نسمِّي العملية ○ **"عملية مع نتائج دورية"**.
حاولوا أن تجدوا أمثلة من الحياة اليومية، بحيث تحتاج إلى عمليات حسابية مع نتائج دورية.
اختاروا مثال واحد من هذه الأمثلة.

أ. اسألوا على هذا المثال سؤالين من الحياة اليومية.

ب. اكتبوا تمرينين، بحيث يعرضان العملية ودورية النتائج.

التجميع

يوجد صفة إضافية للعملية الثنائية ولمجموعة أعداد وهي صفة **التجميع**. بحسب قانون التجميع، ترتيب تنفيذ العمليات في السلسلة (نفس العملية مرتين وثلاثة أعداد) لا يغيِّر النتيجة. مثلاً:

$(10 + 5) + 3 = 10 + (5 + 3)$

8. هل ، بحسب رأيكم، عملية الطرح تحقق قانون التجميع؟

تعريف

العملية الثنائية هي **عملية تجميعية** إذا حققت قانون التجميع، وهذا يعني أن ترتيب تنفيذ نفس العملية مرتين في سلسلة لا يغيِّر النتيجة.

هذا يعني أن العملية $*$ هي تجميعية لمجموعة أعداد، إذا تحققت المساواة الآتية، **لكل** ثلاثة أعداد a,b,c في مجموعة الأعداد المناسبة للعملية: $(a * b) * c = a * (b * c)$

مثال: عملية الجمع العادية هي تجميعية في مجموعة الأعداد الطبيعية، لأنه **لكل** ثلاثة أعداد طبيعية يتحقق: $(a + b) + c = a + (b + c)$

أما عملية الطرح العادية فهي ليست تجميعية في مجموعة الأعداد الطبيعية.

مثلاً: $(10 - 5) - 3 = 2$ لكن $10 - (5 - 3) = 8$

9. هل العملية ○ التي تعرفنا عليها في بداية الفعالية (الدوران في دائرة بحسب عدد المحطات) هي تجميعية في مجموعة الأعداد الطبيعية وال 0؟ عللوا إجاباتكم.

10. معطى ثلاث عمليات ثنائية، وقد تعرفنا عليها في الفعالية السابقة.

$a \blacktriangle b = 2 \cdot a + b$ $\qquad a \spadesuit b = \frac{a + b}{2}$ $\qquad a \bigstar b = a^2 + b$

حدِّدوا لكل فعالية ما إذا هي تجميعية. إذا كانت الإجابة نعم، اشرحوا. إذا كانت الإجابة كلا، أعطوا مثال مضاد (هذا يعني، مثال إذا غيَّرنا فيه ترتيب تنفيذ العملية في السلسلة، فإننا نحصل على نتائج مختلفة).

تحدي

11. نتطرق إلى مجموعة الأعداد **الصحيحة** على مستقيم الأعداد.

نعرِّف العملية M بين عددين صحيحين a وَ b بالطريقة الآتية:

a M b يساوي **البُعد** بين a وَ b على مستقيم الأعداد. انتبهوا! البُعد هو عدد موجب دائمًا.

أ. هل العملية M هي عملية ثنائية؟ اشرحوا.

ب. هل مجموعة الأعداد الصحيحة مغلقة للعملية M؟

ج. هل العملية M تبادلية؟ علِّلوا.

د. هل العملية M تجميعية؟

هـ. اشرحوا، لماذا العملية M لا يوجد لها حد محايد؟

و. جدوا مجموعة أعداد مغلقة للعملية M، بحيث يكون لهذه العملية حد محايد.

6.3 عمليات مع نتائج دورية - القسم الثاني

مجموعات، عمليات وصفات

اعملوا **بأزواج** وراجعوا بإيجاز المصطلحات والصفات التي بحثناها في الدروس السابقة.

تقاسموا المصطلحات والصفات واشرحوها بكلماتكم.

أ. عملية **ثنائية**.

ب. عملية **مغلقة** للعملية الثنائية.

ج. عملية ثنائية **تبادلية**.

د. حد **محايد** للعملية الثنائية (نتطرق إلى الحد المحايد في العملية التبادلية فقط).

هـ. عملية ثنائية **تجميعية**.

و. عملية ثنائية مع نتائج **دورية**.

1. a وَ b هما عددان صحيحان وَ $*$ هي عملية بينهما.
حاولوا أن تسجِّلوا بمساعدة أحرف والقليل من الكلمات الصفات الموجودة في الإطار.

2. أي صفات من بين الصفات التي تظهر في الإطار، تتحقق مع الأعداد الصحيحة والعمليات الآتية:

أ. الطرح.

ب. معدل حسابي (للتذكير: المعدل الحسابي لعددين هو نِصف مجموعهما).

ج. القوة.

د. الضرب.

مقلوب العدد

تعريف:

b هو مقلوب العدد a في عملية الضرب العادية، إذا كان $a \cdot b = 1$.

مثال: $\frac{2}{5}$ مقلوب العدد $2\frac{1}{2}$، لأن $2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 1$.

بما أن عملية الضرب تبادلية، لذا العدد $2\frac{1}{2}$ هو مقلوب العدد $\frac{2}{5}$.

انتبهوا: العدد 1 (نتيجة ضرب مقلوب الأعداد) هو عدد محايد في عملية الضرب.

بشكل عام، **b** نسمِّيه **مقلوب العدد a** في العملية التبادلية $*$ التي يوجد لها حد محايد e

إذا كان $a * b = e$. بما أن العملية تبادلية، لذا a مقلوب العدد b أيضًا.

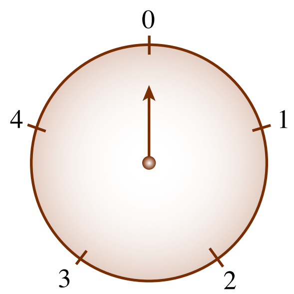
هذا يعني أن a وَ b هما عددان، وكل واحد منهما مقلوب العدد للآخر.

3. أ. أكملوا في دفاتركم التعريف الآتي بالكلمات:
مقلوب العدد للآخر لعملية معينة هي أعداد ...
ب. ما هو مقلوب العدد 5 في عملية الجمع العادية؟ هل يوجد له اسم آخر مقبول نسبة إلى الـ 5؟

4. أ. هل كل عدد في مجموعة الأعداد **الصحيحة** مع عملية الضرب العادية، يوجد له مقلوب عدد ينتمي إلى المجموعة؟ اشرحوا أو أعطوا مثال مضاد.
ب. جدوا مجموعة أعداد مع عملية الضرب العادية، بحيث يكون لكل عدد فيها مقلوب عدد ينتمي إلى المجموعة (احذروا الصفر!).

عمليات مع نتائج دورية

جمع دوري



في الفعالية السابقة، تعرفنا على العملية ○ كعملية **جمع على الساعة** التي تشتمل على 5 نقاط. هذا الجمع يعطينا نتائج دورية. في هذه الحالة، كبر (مقدار) الدورة هو 5.

فحصنا أيضًا صفات هذه العملية في مجموعة الأعداد الطبيعية و الـ 0.

نتطرق الآن إلى هذه العملية الثنائية في مجموعة الأعداد $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ونرمز لها بالرمز $\oplus_5$.

نتوسع ونتمعَّن في ساعات لها عدد نقاط آخر، وهذا يعني أن ننفِّذ عمليات حسابية في كبر دورات مختلفة.

مثلًا، نتطرق إلى $\oplus_{12}$ كعملية جمع ذات دورة 12 على مجموعة الأعداد:
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. هذه العملية مكافئة لعملية الجمع على ساعة تحتوي على 12 نقطة.

مثلًا: $9 \oplus_{12} 11 = 8$ $\quad 7 \oplus_{12} 10 = 5$ $\quad 6 \oplus_{12} 3 = 9$

5. احسبوا:

أ. $3 \oplus_{12} 10 =$ ج. $8 \oplus_{12} 5 =$ هـ. $8 \oplus_{12} 11 =$

ب. $3 \oplus_{12} 9 =$ د. $4 \oplus_{12} 3 =$ و. $7 \oplus_{12} 7 =$

6. ابنوا **تمرينين** لكل نتيجة.

أ. $\blacksquare \oplus_{12} \blacksquare = 0$ ب. $\blacksquare \oplus_{12} \blacksquare = 1$ ج. $\blacksquare \oplus_{12} \blacksquare = 5$

نفحص صفات العملية $\oplus_{12}$ في المجموعة $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

7. أشيروا "صحيح" / "غير صحيح" واشرحوا.

أ. المجموعة المعطاة مغلقة للعملية $\oplus_{12}$.

ب. العملية $\oplus_{12}$ هي عملية تبادلية.

ج. العملية $\oplus_{12}$ هي عملية تجميعية.

د. الحد المحايد للعملية $\oplus_{12}$ هو 0.

هـ. 8 وَ 4 هما مقلوب العدد الواحد للآخر في العملية $\oplus_{12}$.

8. جدوا مقلوب العدد للأعداد الآتية: 3 ,11 ,0 في العملية $\oplus_{12}$.
هل يوجد عدد إضافي مقلوبه يساويه؟

الضرب الدوري

9. أ. اقترحوا تعريفاً **للضرب الدوري** في المجموعة $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. ارمزوا إلى هذه العملية كالتالي: $a \odot_5 b$

ب. حلوا بحسب تعريفكم

$4 \odot_5 3 =$ $\quad$ $2 \odot_5 3 =$ $\quad$ $3 \odot_5 4 =$ $\quad$ $3 \odot_5 2 =$

ج. تطرقوا إلى الصفات التي وردت في بداية الفعالية. افحصوا، أي الصفات تتحقق مع العملية $\odot_5$ التي عرَّفتموها في المجموعة المعطاة؟

تعريف:

نعرِّف العملية $= a \odot_5 b$ كعملية **ضرب دوري** في المجموعة $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ كالتالي:

نضرب a وَ b بضرب عادي، ثم نطرح مضاعفات الـ 5 من حاصل الضرب حتى تصبح النتيجة أصغر من 5.

هذه هي نتيجة العملية.

مثلاً: $3 \odot_5 3 = 4$ $\quad$ $4 \odot_5 4 = 1$

10. أ. انسخوا في دفاتركم وأكملوا جدول العملية $\odot_5$.

$\odot_5$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3				4	
4					1

ب. اشرحوا، كيف نرى في الجدول:

- أن المجموعة مغلقة للعملية المعطاة.
- العدد المحايد للعملية المعطاة.
- أن العملية تبادلية.
- أزواج الأعداد التي هي مقلوب العدد الواحد للآخر.

ج. هل كل عدد في المجموعة يوجد له مقلوب العدد؟ اشرحوا.

د. اشرحوا، لماذا لا نستطيع أن نرى في الجدول ما إذا العملية تجميعية؟

11. نعرِّف بطريقة شبيه العملية $a \odot_4 b$ في المجموعة $\{0, 1, 2, 3\}$.
برهنوا أن العدد 2 ، لا يوجد له مقلوب العدد لهذه العملية في المجموعة المعطاة.

ظواهر دورية في حياتنا اليومية

يسكن يوسف وهيام الواحد مقابل الآخر. يربي كل واحد منهما كلبًا في بيته. يتنزه يوسف مع كلبه كل 8 ساعات، أما هيام فتتزه مع كلبها كل 9 ساعات.

12. في يوم الأحد، خرج يوسف وهيام مع كلبيهما للتنزه عند الساعة الـ 7:00.

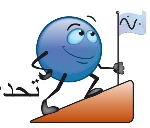
أ. كل كم ساعة يلتقي يوسف وهيام خلال نزهتهما مع كلبيهما؟

ب. في أي يوم وفي أي ساعة تتم النزهة القادمة ليوسف، هيام وكلبيهما؟

"صرصار الخشب" (Cicada) هو حشرة تُطلق صوتًا. يوجد حوالي 2500 نوع مختلف من "صرصار الخشب". في معظم الوقت، يعيش نوعان من هذه الأنواع تحت سطح الأرض، وفقط مرة واحدة خلال كل فترة حياتهما يخرجان فوق سطح الأرض: الأول كل 17 سنة والآخر كل 13 سنة، لذا في مناطق معينة في العالَم (على سبيل المثال في الولايات المتحدة)، يظهر هذان النوعان فوق سطح الأرض في مجموعات كبيرة جدًا كل 17 (أو 13) سنة.

يُنْتِج هذان النوعان ظاهرتان دوريتان: الأولى كل 17 سنة والثانية كل 13 سنة.

كل كم سنة يظهر النوعان على سطح الأرض في نفس الوقت؟



إذا ظهر في سنة معينة نوع واحد، وفي السنة التي تليها ظهر نوع آخر، بعد كم سنة يظهر النوعان في نفس السنة؟

هل يوجد أكثر من إجابة واحدة ممكنة؟ اشرحوا السبب.

6.4 ما هي الزُمرة؟

أمامكم جدول العملية $\oplus_7$ وهي عملية جمع مع نتائج دورية في الدورة الـ 7، على مجموعة الأعداد الصحيحة من 0 حتى 6.

$\oplus_7$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

نبحث صفات المجموعة والعملية بمساعدة الجدول.

1. أ. اشرحوا، كيف نميِّز في الجدول الصفات الآتية للعملية $\oplus_7$ والمجموعة $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$؟

- انغلاق
- وجود عدد محايد
- تبادلية
- وجود مقلوب عدد لكل عدد في المجموعة.

ب. العملية $\oplus_7$ هي عملية تجميعية. أعطوا أمثلة بمساعدة مثالين.

تعرفنا في الفعاليات السابقة على عمليات ثنائية مختلفة، وتعلّمنا عن صفاتها المختلفة: انغلاق، تجميعية، حد محايد وحدود مقلوب العدد. نتعلم في هذه الفعالية عن مبنى رياضي اسمه **زُمرة تبادلية**، حيث يربط بين هذه الصفات.

تعريف:

مجموعة أعداد، أو عناصر رياضية أخرى **مع عملية** ثنائية معرَّفة على جميع حدود المجموعة، نسمِّيها **زُمرة تبادلية**، إذا تحققت الشروط الآتية:

أ. المجموعة **مغلقة** للعملية.

ب. العملية **تجميعية**.

ج. يوجد في المجموعة **حد محايد** للعملية.

د. كل حد في المجموعة، يوجد له **حد مقلوب العدد** للعملية.

هـ. العملية هي **تبادلية**.

ملاحظة: يوجد زُمرات غير تبادلية، وهي لا تحقق الشرط الخامس. سنبحث في الفعاليات زُمرات تبادلية فقط.

مثال:

مجموعة كل الأعداد الصحيحة (الموجبة والسالبة وال 0) مع عملية الجمع العادي هي زُمرة.

لكي نبيِّن ذلك، يجب التأكد من أن جميع الشروط تتحقق:

- **انغلاق:** كل عددين صحيحين a وَ b، مجموعهما $a+b$ هو عدد صحيح، لذا فهو موجود في المجموعة.
- **تجميعية:** لكل ثلاثة أعداد صحيحة a,b,c يتحقق: $(a+b)+c=a+(b+c)$
- **الحد المحايد:** العدد 0 موجود في مجموعة الأعداد الصحيحة ولكل عدد صحيح a يتحقق: $a+0=0+a=a$
- **حد مقلوب العدد:** لكل عدد صحيح a يوجد عدد صحيح $(-a)$ ، حيث إنْ $a+(-a)=0$
  هذا يعني، لكل a يوجد عدد مجموعه مع a هو العدد المحايد.
- **تبادلية:** لكل عددين صحيحين a,b يتحقق: $a+b=b+a$.

2. هل مجموعة الأعداد الصحيحة من 0 حتى 6 مع العملية $\oplus_7$ التي عرَّفناها في بداية الفعالية هي زُمرة تبادلية؟ علِّلوا.

3. في كل بند، جدوا مثال لمجموعة أعداد مع عملية ثنائية تحقق الشرط المعطى:

أ. المجموعة **ليست مغلقة** للعملية.

ب. العملية **ليست تجميعية**.

ج. في المجموعة، **لا يوجد حد** محايد للعملية.

د. **يوجد** في المجموعة **حد محايد** للعملية، لكن هناك حدود في المجموعة، **لا** يوجد لها **حد مقلوب العدد** في المجموعة.

4. أمامكم عدة مجموعات وعمليات.
حدِّدوا الصفات التي تتحقق فيها والصفات التي لا تتحقق فيها. علِّلوا إجاباتكم.
بناءً على ذلك، جدوا المجموعات والعمليات التي هي عبارة عن زُمر تبادلية.

الصفة / المجموعة مع العملية	الانغلاق	التجميعية	حد محايد	حد مقلوب العدد	تبادلية	زُمرة تبادلية؟
الأعداد الطبيعية مع الجمع						
الأعداد الصحيحة مع الضرب						
الأعداد الطبيعية مع المعدل الحسابي						
الأعداد $\frac{m}{n}$ (n,m أعداد صحيحة تختلف عن الـ 0) مع الضرب						
مجموعة الأعداد (0, 1, 2, 3, 4) مع جمع دوري $\oplus_5$						
مجموعة الأعداد (0, 1, 2, 3, 4) مع ضرب دوري $\odot_5$		نعم				
مجموعة الأعداد (1, 2, 3, 4) مع ضرب دوري $\odot_5$		نعم				
مجموعة الأعداد (0, 1, 2, 3) مع جمع دوري $\oplus_4$		نعم				
مجموعة الأعداد (1, 2, 3) مع ضرب دوري $\odot_4$		نعم				

تمييز وبناء جدول عملية لزُمرة تبادلية

5. أمامكم جدول لعملية ضرب 6 دوري على مجموعة الأعداد

.{1, 2, 3, 4, 5}

أ. أي شروط من بين الشروط المطلوبة لتحقيق زُمرة تبادلية، تتحقق في المجموعة مع العملية الثنائية $\odot_6$؟

ب. أعطوا مثال مضاد لكل شرط لا يتحقق.

ج. هل المجموعة مع العملية المعطاة هي زُمرة تبادلية؟ علِّلوا.

$\odot_6$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

6. افحصوا في كل بند، هل المجموعة مع العملية المعطاة تشكل زُمرة تبادلية؟ اشرحوا إجاباتكم.

أ. المجموعة {a, b}

العملية ❖

❖	a	b
a	a	b
b	b	b

ب. المجموعة {a, b, c}

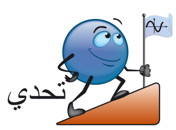
العملية ✦

✦	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	c	a

7. معطى مجموعة أعداد {a, b} مع عملية ثنائية معينة * .

ابنوا جدولًا للعملية *، بحيث تكون المجموعة مع العملية زُمرة تبادلية.

جدوا جميع الإجابات الممكنة، واشرحوا، لماذا لا يوجد إمكانيات إضافية؟



8. نتطرق إلى مجموعة الأعداد الطبيعية والـ 0 على محور الأعداد.

M هي عملية بين العددين a وَ b في مجموعة معرَّفة بالطريقة الآتية:

a M b يساوي **البُعد** على محور الأعداد بين a إلى b.

هل المجموعة مع العملية هي زُمرة تبادلية؟ علِّلوا.

6.5 متجهات

تعلَّمنا في الفعاليات الأربع الأخيرة عن مصطلحات في مجموعات أعداد وتعلَّمنا عن صفات العمليات في الأعداد.

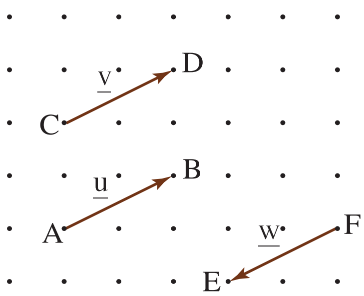
نبحث عملية ثنائية من نوع آخر: عملية بين أشياء رياضية ليست أعدادًا.

ملاحظة: نحتاج في هذه الفعالية إلى ورقة عليها نقاط أو ورقة مقسمة إلى تربيعات كبيرة.

ما هو المتجه؟

تعريف:

نمثِّل المتجه في المستوى بواسطة طول واتجاه، ونرمز له بحرفين يشيران إلى نقطتين في ذنب ورأس السهم $(\overrightarrow{AB})$ أو بواسطة حرف صغير $(\underline{u})$.



انتبهوا! عند كتابة $\overrightarrow{AB}$ من المهم التشديد على ترتيب الأحرف.

في الطرف الأيسر، نسجِّل الحرف الذي يقع في ذنب السهم، وفي الطرف الأيمن، نسجِّل الحرف الذي يقع في رأس السهم.

مثال: المتجه $\underline{w}$ نرمز له أيضًا بالرمز $\overline{FE}$ وليس $\overline{EF}$.

المتجهان اللذان لهما **نفس الطول ونفس الاتجاه** نسمِّيهما **متجهين متساويين**.

مثال: $\underline{u}$ وَ $\underline{v}$ هما متجهان متساويان. لذا نرمز لهما: $\underline{u} = \underline{v}$

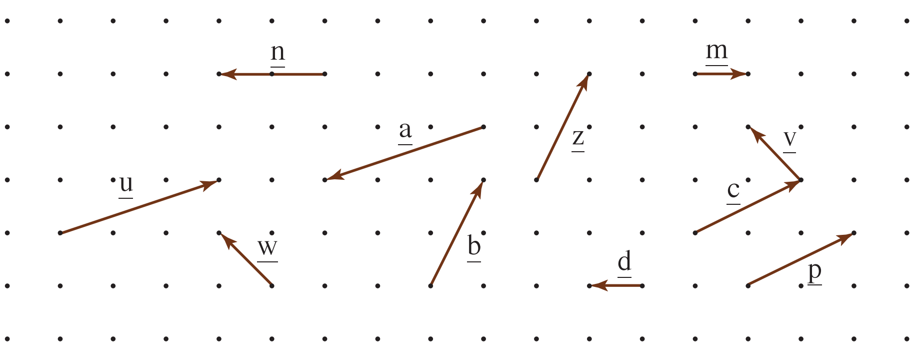
إذا كان متجهان **متساويان في الطول**، لكنهما **متضادان في الاتجاه**، نسمِّيهما **متجهين متضادين**.

مثال: $\underline{u}$ وَ $\underline{w}$ هما متجهان متضادان. لذا نرمز لهما: $\underline{w} = -\underline{v}$

المتجه الذي يبدأ وينتهي في نفس النقطة، نسمِّيه "**متجه الصفر**" ونرمز له: $\underline{0}$

1. معطى في الرسمة الآتية متجهات.

أ. جدوا أزواجًا من المتجهات المتساوية.



ب. جدوا أزواجًا من المتجهات المتساوية في الطول، لكنها مختلفة بالاتجاه.

ج. جدوا أزواجًا من المتجهات المتساوية في الاتجاه، لكنها مختلفة في الطول.

د. جدوا أزواجًا من المتجهات المتضادة.

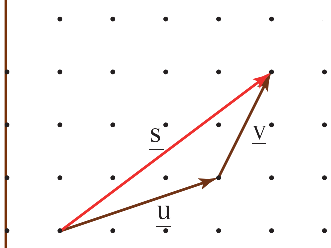
جمع متجهات

تصف المتجهات حركة مستقيمة باتجاه معين وبُعد معين.

تعريف:

نعرِّف عملية **الجمع + بين متجهات على أنها مجموع حركة.**

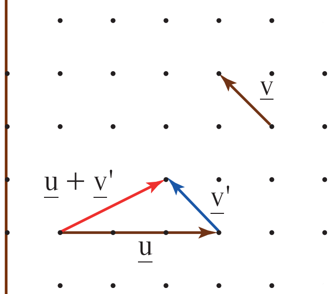
لكي نجمع المتجهين $\underline{u}$ وَ $\underline{v}$، وهذا يعني، لكي نحصل على المتجه $\underline{u}+\underline{v}$ ، فإننا نتقدم في البداية بحسب طول واتجاه $\underline{u}$، وبعد ذلك نتحرك بحسب طول واتجاه $\underline{v}$. نتيجة العملية هي متجه $\underline{s}$ الذي يبيِّن مجموع حركتنا، من نقطة بداية المتجه الأول حتى نقطة نهاية المتجه الثاني (دون أن نذكر نقاط وسطية وتوجهات مررنا بها في الطريق).



إذا كان المتجه $\underline{v}$، لا يقع على امتداد المتجه $\underline{u}$، فإنه يمكن إزاحة المتجه $\underline{v}$ (دون أن نغيِّر طوله أو اتجاه)، بحيث يكون على امتداد المتجه $\underline{u}$.

هذا يعني أنه في هذه الحالة، يمكن أن نرسم المتجه $\underline{v'}$ الذي يساوي $\underline{v}$، بحيث يكون ذنبه في رأس المتجه $\underline{u}$.

في هذه الحالة: $\underline{u}+\underline{v}=\underline{u}+\underline{v'}$



2. معطى خمس متجهات وأربعة تمارين لجمع متجهات.

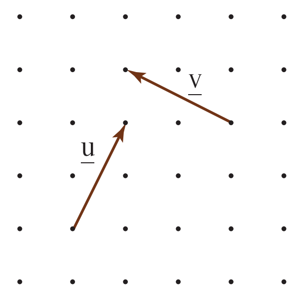
$\underline{u}+\underline{z}$ $\quad$ $\underline{w}+\underline{w}$ $\quad$ $\underline{z}+\underline{b}$ $\quad$ $\underline{w}+\underline{u}$

أ. اعملوا على ورقة عليها نقاط أو ورقة مقسمة إلى تربيعات كبيرة.

في كل تمرين، ارسموا زوج المتجهات التي جُمعت ونتيجة عملية جمع كل زوج.

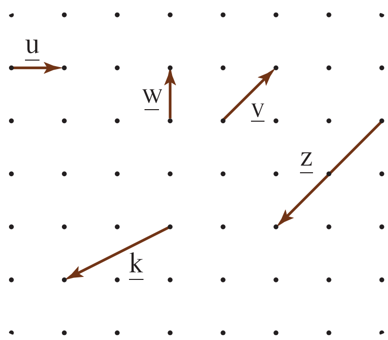
ب. لكل زوج متجهات في بند أ، جدوا متجهًا مساويًا لنتيجة الجمع بينهما من بين المتجهات المعطاة.

3. اجمعوا المتجهين $\underline{v} + \underline{u}$ على ورقة النقاط.



4. معطى في الرسمة خمس متجهات.
عبِّروا إذا كان الأمر ممكنًا عن المجاميع الآتية بمساعدة المتجهات المعطاة، أو المضادة لها.

مثال: $\underline{v} = \underline{w} + \underline{u}$



أ. $= \underline{k} + (-\underline{v})$

ب. $= \underline{z} + (\underline{v})$

ج. $= \underline{z} + \underline{w}$

د. $= \underline{v} + \underline{w}$

هـ. $= \blacksquare + \underline{v}$

و. $= (\underline{z} + \underline{v}) + \underline{v}$

ز. $= (\underline{z} + \underline{w}) + \underline{u}$

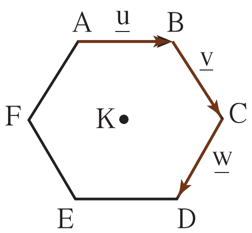
ح. $= \underline{z} + (\underline{w} + \underline{u})$

5. ابنوا تمارين كثيرة بقدر الإمكان مع المتجهات المعطاة في تمرين 4 (أو المضادة لها)، بحيث يساوي مجموع كل تمرين المتجه $\underline{k}$.
ملاحظة: إذا كانت عملية جمع لأكثر من مضافين، فإننا نحتاج إلى أقواس.

6. معطى تمرين لعمليتيْ جمع وثلاثة متجهات.
هل، بحسب رأيكم، يمكن أن نرسم متجه النتيجة مباشرةً، دون أن نرسم، في البداية، مجموع اثنين منهما؟ اشرحوا.

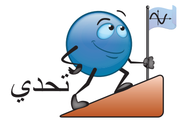
7. أ. ارسموا المتجهين $\underline{a}$ وَ $\underline{b}$ على ورقة عليها نقاط .
ب. ارسموا المجموع $\underline{b} + \underline{a}$ والمجموع $\underline{a} + \underline{b}$.
ماذا وجدتم؟

8. أمامكم رسمة مسدس منتظم مركزه k. هذا المسدس مبني من 6 مثلثات متساوية الأضلاع متطابقة. عبِّروا بواسطة $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ وعملية الجمع عن المتجهات الآتية:



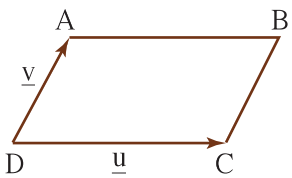
أ. $\overrightarrow{DE}$ ب. $\overrightarrow{AC}$ ج. $\overrightarrow{AD}$

د. $\overrightarrow{DF}$ هـ. $\overrightarrow{FC}$ و. $\overrightarrow{AK}$



9. معطى متوازي الأضلاع ABCD $\overrightarrow{DA} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{u}$

عبِّروا بمساعدة $\underline{u}$ وَ $\underline{v}$ عن المتجهين $\overrightarrow{DB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ اللذان هما قطرا متوازي الأضلاع.



هل هذه زُمرة؟

للتذكير

إذا كانت مجموعة الحدود مع عملية ثنائية معرَّفة على حدودها، فإنها زُمرة تبادلية للعملية إذا تحققت الشروط الآتية.

- المجموعة مغلقة للعملية - هذا يعني أن نتيجة العملية على كل حدين في المجموعة هي حد في المجموعة.
- العملية تجميعية.
- يوجد في المجموعة حد محايد للعملية.
- كل حد في المجموعة، يوجد له حد مقلوب العدد في المجموعة، حيث إن العملية بين كل حد ومقلوبه تعطينا الحد المحايد كنتيجة.
- العملية تبادلية.

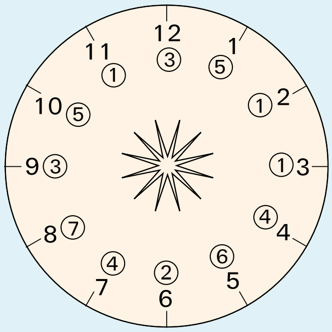
10. هل مجموعة كل المتجهات في المستوى مع عملية الجمع بين المتجهات هي زُمرة تبادلية؟
اشرحوا كل مرحلة في فحصكم بالكلمات أو/و بمساعدة رسمة.
إذا لم تتحقق شروط، اعرضوا أمثلة مضادة.

11. معطى مجموعة كل المتجهات على محور الأعداد ومعطى عملية الجمع بين المتجهات.
هل هذه المجموعة هي زُمرة تبادلية؟
اشرحوا كل مرحلة في فحصكم بالكلمات أو/و بمساعدة رسمة.
إذا لم تتحقق شروط، اعرضوا أمثلة مضادة.

أيّ يوم من الأسبوع؟

أمامكم ساعة خاصّة...

ساعة سنة 2010



الأعداد من 1 حتى 12 تُمثّل أشهر السنة:
العدد 1 يُمثّل شهر كانون الثاني،
العدد 2 يُمثّل شهر شبّاط، وهلمّ جرّا.
بجانب كل عدد من الأعداد التي تُمثّل الأشهر - تظهر دائرة، فيها عدد آخر. هذه الساعة تمكّننا عن معرفة في أيّ يوم من الأسبوع يصادف تاريخ معيّن في سنة 2010. لكي نعرف في أي يوم من الأسبوع يصادف تاريخ معيّن، وليكُن مثلًا 3 أيّار 2010، نعمل على النحو التالي:

- نجد في الساعة العدد الذي يُمثّل الشهر (في مثالنا، العدد هو 5، لأنه يُمثّل شهر أيّار)، ونفحص أي عدد يظهر في الدائرة التي بجانبه (العدد 6).
- نضيف إلى العدد الموجود في الدائرة (6) العدد الذي يُمثّل اليوم المعطى من الشهر (في مثالنا - 3). بذلك نحصل على حاصل جمع معيّن (في مثالنا: 9 = 6 + 3).
- إذا كان حاصل الجمع الناتج أصغر من 7، فسيُمثّل اليوم من الأسبوع (1 = يوم الأحد، 2 = يوم الاثنين، إلخ).
- ذا كان حاصل الجمع الناتج أكبر من 7 (كما في مثالنا)، يجب أن نقسّمه على 7، وعندئذ يكون **الباقي** الناتج هو الذي يُمثّل اليوم من الأسبوع.
  في مثالنا: من القسمة 7 : 9 نحصل على خارج قسمة 7 والباقي 2. معنى ذلك أن تاريخ 3 أيّار 2010 صادف يوم الاثنين. (انتبهوا: الباقي 0 يُمثّل يوم السبت.)

1 جدوا في أيّ يوم من الأسبوع من سنة 2010 تصادف التواريخ الآتية:
أ. عيد ميلادكم
ب. عيد ميلاد أحد أقاربكم
ج. أوّل يوم في العطلة الصيفيّة - 21 حزيران 2010
د. آخر يوم في العطلة الصيفيّة - 31 آب 2010
هـ. أوّل يوم في سنة 2010 - 1 كانون الثاني 2010
و. آخر يوم في سنة 2010 - 31 كانون الأوّل 2010.

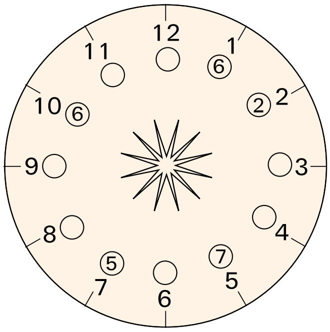
2 ماذا تُمثّل الأعداد المسجَّلة في الدوائر الموجودة في الساعة؟

3 لماذا في رأيكم يجب إيجاد باقي قسمة حاصل الجمع على 7؟

4 أ. أيّ تواريخ في شهر آذار سنة 2010 صادفت أيّام سبت؟
ب. كم عدد أيام السبت في سنة 2010؟ (عدد الأيام في سنة 2010 كان 365 يومًا.)

سنة أخرى

ساعة سنة 2011



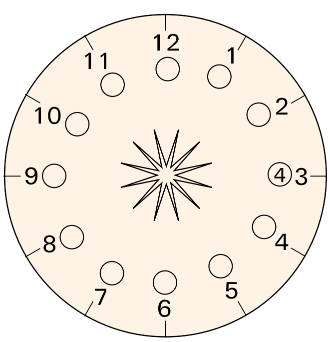
5 أمامكم ساعة لسنة 2011، فيها فقط قسم من الأعداد التي في الدوائر.
أ. في أيّ يوم من الأسبوع بدأت سنة 2011؟ افحصوا مدى ملاءمة جوابكم لليوم الأخير من سنة 2010.
ب. جدوا في أيّ يوم من الأسبوع يصادف تاريخ 28 شبّاط 2011 (آخر يوم في شهر شبّاط).
ج. في أيّ يوم بدأ شهر آذار سنة 2011؟ حدِّدوا أيّ عدد يجب أن تكتبوا في الدائرة بجانب شهر آذار (أي بجانب 3).
د. أكملوا الأعداد الناقصة في الدوائر.
هـ. جِدوا في أيّ يوم من الأسبوع من سنة 2011 يُصادف كل تاريخ من التواريخ الآتية:
1 عيد ميلادكم
2 عيد ميلاد أحد أقاربكم
3 أوّل يوم في العطلة الصيفيّة – 21 حزيران 2011
4 آخر يوم في العطلة الصيفيّة – 31 آب 2011
5 آخر يوم في سنة 2010 – 31 كانون الأوّل 2010.

6 كم عدد أيام السبت في سنة 2011؟ (عدد الأيام في سنة 2011 كان 365 يومًا.)

7 أيّ عدد يمكن تسجيله في الدائرة الملائمة لشهر كانون الثاني في السنة التي عدد أيام السبت فيها هو 53، والمجموع الكلي لعدد الأيام فيها هو 365 يومًا؟

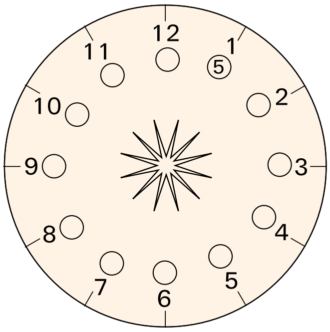
نبني ساعات سنة

ساعة سنة 2012



8 في هذه المهمّة تجدون طريقة لبناء ساعات سنة.
أ. أكملوا ساعة سنة 2012. اشرحوا وعلِّلوا مراحل البناء.
كيف تفحصون النتيجة؟
انتبهوا: عدد أيام سنة 2012 هو 366 يومًا.
ب. قارِنوا بين ساعة سنة 2012 التي بنيتموها وساعة سنة 2011 التي أكملتموها في المهمّة السابقة. اشرحوا النتيجة. هل المقارنة بين ساعتَي السنتين 2011 وَ 2010 تؤدّي إلى نفس النتيجة؟ اشرحوا.

ساعة سنة 2044



9 في ساعة سنة 2044، في الدائرة التي بجانب العدد الملائم لشهر كانون الثاني يظهر العدد 5 - كما في ساعة سنة 2010.
عدد الأيام في سنة 2044 هو 366 يومًا.

أ. هل كل أشهر ساعة سنة 2044 تُلائمها نفس الأعداد التي في الدوائر، كما في ساعة سنة 2010؟ علّلوا.

ب. أكملوا ساعة سنة 2044.

القرن الـ21

10 في الجدول اللاحق يمكننا أن نرى في أيّ يوم من الأسبوع تبدأ كل سنة من سنوات القرن الـ21.
سنة 2073، مثلًا، تبدأ يوم الأحد، وسنة 2008 - تبدأ يوم الثلاثاء.

أ. اكتبوا قائمة بسنوات القرن الـ21 التي تبدأ يوم السبت. اشرحوا.

ب. ابنوا ساعة ملائمة لسنة 2005. استعينوا بالمعلومات الموجودة في الجدول، وبأجوبتكم للمهام السابقة.

ج. أيّ سنوات أخرى تُلائمها الساعة التي بنيتموها لسنة 2005؟ ما المشترك لكل هذه السنوات؟

د. اشرحوا لماذا تُلائم الساعة التي بنيتموها لسنة 2005 قسمًا فقط من السنوات التي تبدأ يوم السبت. ابنوا ساعة تُلائم أيضًا السنوات الأخرى التي تبدأ يوم السبت.

هـ. اكتبوا قائمة بسنوات القرن الـ21 التي تنتهي أيام السبت. اشرحوا.

و. جِدوا أقرب سنة يُصادف فيها عيد ميلادكم يوم السبت.

اليوم الأوّل في السنة	السنوات في القرن الـ 21
الأحد	06, 12, 17, 23, 34, 40, 45, 51, 62, 68, 73, 79, 90, 96
الاثنين	01, 07, 18, 24, 29, 35, 46, 52, 57, 63, 74, 80, 85, 91
الثلاثاء	02, 08, 13, 19, 30, 36, 41, 47, 58, 64, 69, 75, 86, 92, 97
الأربعاء	03, 14, 20, 25, 31, 42, 48, 53, 59, 70, 76, 81, 87, 98
الخميس	04, 09, 15, 26, 32, 37, 43, 54, 60, 65, 71, 82, 88, 93, 99
الجمعة	10, 16, 21, 27, 38, 44, 49, 55, 66, 72, 77, 83, 94
السبت	00, 05, 11, 22, 28, 33, 39, 50, 56, 61, 67, 78, 84, 89, 95

توجد طرق وقواعد مختلفة لإيجاد اليوم من الأسبوع بحسب تاريخ معطى، وكلّها تعتمد على حساب البواقي. إحدى هذه الطرق طوّرها عالم الرياضيات الإنجليزي تشارلس دودجسون (1832-1898)، المعروف أيضًا بالاسم المستعار لويس كارول، والمؤلّف لرواية "أليس في بلاد العجائب".

الاخير لإختيارك

نختار أعدادًا

1. اختاروا اعدادًا لتضعوها في التربيعات . استعملوا الاقواس في الاماكن الملائمة بحسب الحاجة والمهمة المعطاة .

أ)

التعبير: $2 \cdot \square - \square$

الأعداد للاختيار: 1, 3, 4, 6, 9

المهمة : أكبر نتيجة ممكنة

ب)

التعبير: $6 : \square - \square$

الأعداد للاختيار: 1, 4, 6, 8, 9

المهمة : أكبر نتيجة ممكنة

ج)

التعبير: $2 - \square \cdot \square$

الأعداد للاختيار: 2, 3, 4, 7, 9

المهمة : أكبر نتيجة ممكنة

د)

التعبير: $2 - \square : \square$

الأعداد للاختيار: 1, 3, 4, 5, 9

المهمة : أكبر نتيجة ممكنة

هـ)

التعبير: $4 - \square : \square$

الأعداد للاختيار: 4, 5, 6, 7, 8

المهمة: **أكبر** نتيجة ممكنة

و)

التعبير: $\square : 7 - \square$

الأعداد للاختيار: 1, 3, 5, 8, 9

المهمة : **أصغر** نتيجة ممكنة

ز)

التعبير: $7 \cdot \square - \square$

الأعداد للاختيار: 3, 4, 5, 8, 9

المهمة : **أصغر** نتيجة ممكنة

ح)

التعبير: $\square : 4 - \square$

الأعداد للاختيار: 1, 3 , 4, 5, 9

المهمة : **أكبر** نتيجة ممكنة

ط)

التعبير: $\square : 4 - \square$

الأعداد للاختيار: 1, 2, 3 , 4

المهمة : نتيجة بين -3 و -2.5

اختاروا عمليات أو أعدادًا

2. اختاروا عملية واحدة من العمليات الاربع ، ضعوها في التربيعة الفارغة ، عيّنوا زوج أقواس واحد على الاكثر لتلائم المهمة .

أ) التعبير: $3 : 9 \square 6 + 5$

المهمة : **أقرب** عدد ممكن ل 10

ب) التعبير: $9 \cdot 2 \square 7 + 6$

المهمة : أقرب عدد ممكن ل 16

ج) التعبير: $8 \square 0 + 6 \cdot 5$

المهمة : أقرب عدد ممكن ل 25

د) التعبير: $2 - 5 : 9 \square 3$

المهمة : أقرب عدد ممكن ل 2

هـ) التعبير: $4 \cdot 7 \cdot 2 \square 9$

المهمة : أبعد عدد ممكن عن 6

و) التعبير: $2 \square 6 \cdot 9 : 7$

المهمة : أبعد عدد ممكن عن 7

3. اختاروا عددًا صحيحًا من بين الأعداد من 0 إلى 9 ، وعيّنوا زوج أقواس واحد على الاكثر، لتلائم المهمة المعطاة.

أ) التعبير: $8 + 6 + 9 : \square$

المهمة: أقرب عدد ممكن ل 6

ب) التعبير: $0 : \square\ 1 \cdot 2 \cdot 6$

المهمة : أقرب عدد ممكن ل 16

ج) التعبير: $4 + 7 \cdot 6 \cdot \square$

المهمة : أبعد عدد ممكن عن 18

د) التعبير: $3 - 4 + \square \cdot 9$

المهمة : أقرب عدد ممكن ل 20

هـ) التعبير: $2 - 7 - 3 \cdot \square$

المهمة : أقرب عدد ممكن ل (-10)

و) التعبير: $7 : 2 + \square \cdot 6$

المهمة : بين 20 و 22

4. اختاروا عددًا صحيحًا من بين الأعداد من 0 إلى 9 ، وعيّنوا زوج أقواس واحد على الاكثر، لتلائم المهمة المعطاة.

أ) التعبير : $5 : 8 - 2 + \boxed{}$

المهمة: أقرب عدد ممكن ل 6

ب) التعبير : $(-3) . (-6) + \boxed{} - 8$

المهمة : أقرب عدد ممكن ل 30

ج) הביטוי: $(-6) : (-7) + 4 \cdot \boxed{} + 1$

المهمة : أقرب عدد ممكن ل $\frac{1}{2}$

هل عرفتم ؟

بعض المهام في هذه الفعالية هي إيجاد أعداد ، تعويضها يُعطي أكبر نتيجة ممكنة (نتيجة عظمى) أو أصغر نتيجة ممكنة (نتيجة صغرى) ، من مجموعة الأعداد المعطاة (يعنى بحسب تحديد ما).
مهمة كهذه موجودة بشكل واسع في حياتنا اليومية . المجال الرياضي الذي يعالج الموضوع يسمى **التخطيط الخطي.** هذا مجال جديد في الرياضيات العملية نتج في القرن العشرين على يد جورج دينتسج (George Dantzig, 1914 - 2005) بهدف مساعدة الجيش الامريكي في حل صعوبات التي واجهته في الحرب العالمية الثانية.

مثال لمسألة في مجال التخطيط الخطي :

توجد أنواع مختلفة لأطعمة يمكن ادخالها في النظام الغذائي (דיאטה) ، وأنواع مختلفة لأطعمة **أساسية** يجب أخذها بالحسبان عند بناء النظام الغذائي : فيتامينات ، زلاليات ، عناصر وقيمة السعرات الحرارية لكل عنصر غذائي . هدفنا في بناء النظام الغذائي هو **اختيار** كمية الغذاء من كل نوع يجب تناولها ، بحيث تكون كمية الغذاء الاساسي المتناولة أثناء العمل على النظام الغذائي أكبر من حد أدنى ما وبالإضافة لهذا الشرط أن يكون حد أدنى من السعرات الحرارية المتناولة.

لغز – سحر رقم التلفون

ابدءوا بالحساب :

1. اكتبوا العدد المكون من أول ثلاثة أرقام من رقم تلفون بيتكم (بدون المقدمة)
2. اضربوا بالعدد 80
3. أضيفوا العدد 1
4. اضربوا النتيجة في 250
5. أضيفوا العدد المكون من الـ 4 الأرقام في رقم التلفون
6. . أضيفوا العدد المكون من الـ 4 الأرقام في رقم التلفون - مرة أخرى
7. اطرحوا من النتيجة العدد 250
8. اقسموا على 2

ما هو سر السحر ؟

لغز آخر

كيف يمكن الحصول على العدد 200 بواسطة الأرقام 1,2,3,4,5؟

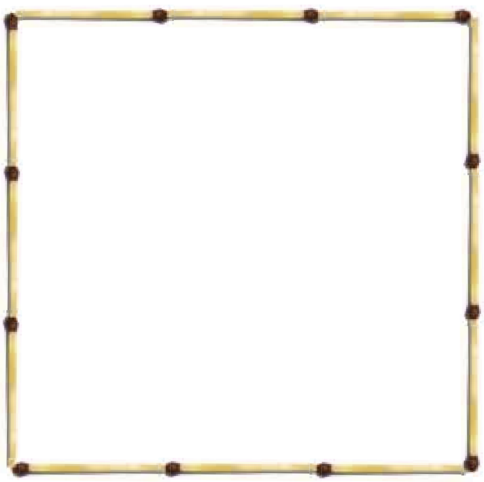
يسمح استعمال كل رقم مرة واحدة ، الاقواس والعمليات الحسابية . إرشاد استعلوا الرفع للقوة

كم مربّعًا يمكن أن نبني من 16 عود ثقاب؟

1 ابنوا مربّعات من 16 عود ثقاب بحسب المطلوب في كل بند. ممنوع كسر العيدان!
ارسموا كل المربّعات التي بنيتموها.
أ. مربّعًا واحدًا.
ب. مربّعين. جِدوا طريقة أخرى لبناء المربّعين.
ج. 3 مربّعات. جِدوا طريقة أخرى لبناء 3 مربّعات.
د. 4 مربّعات. جِدوا طريقة أخرى لبناء 4 مربّعات.
هـ. 5 مربّعات. جِدوا طريقة أخرى لبناء 5 مربّعات.
و. حاولوا بناء 6 مربّعات.

مضلّعات من 12 عود ثقاب

2 المربّع الذي أمامكم مبني من 12 عود ثقاب. مساحته تساوي 9 وحدات "عود ثقاب مربّع".



أ. ابنوا مستطيلات مختلفة من 12 عود ثقاب.
ارسموا المستطيلات التي بنيتموها.
ب. جِدوا مساحة كل مستطيل.
ج. ابنوا شكلًا ما (لا يُشترط أن يكون مستطيلًا)
من 12 عود ثقاب، بحسب المساحة المعطاة في كل بند:
1 4 "عيدان ثقاب مربّعة"
2 5 "عيدان ثقاب مربّعة"
3 6 "عيدان ثقاب مربّعة"

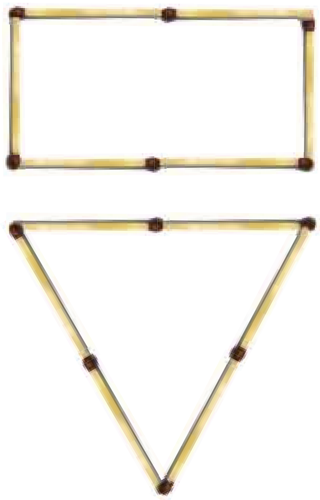
مستطيلات من 36 عود ثقاب

3 ابنوا مستطيلًا من 36 عود ثقاب بحسب المساحة المعطاة في كل بند.
إذا نجحتم - سجّلوا قياسات المستطيل. إذا لم تنجحوا - اشرحوا السبب.
أ. 32 "عود ثقاب مربّع"
ب. 64 "عود ثقاب مربّع"
ج. 65 "عود ثقاب مربّع"
د. 77 "عود ثقاب مربّع"
هـ. 81 "عود ثقاب مربّع"
و. 84 "عود ثقاب مربّع"

4 جِدوا كل المستطيلات المختلفة التي يمكن بناؤها من 36 عود ثقاب. اكتبوا قياساتها.
أيّ مستطيل منها له أكبر مساحة؟

مضلّعات من ستّة عيدان ثقاب

5 من ستّة عيدان ثقاب يمكن بناء مضلّعات مختلفة. أمامكم اثنان منها.



أ. هل المضلّعان متساويان في المساحة؟
إذا لا – أيّ مضلّع منها مساحته أكبر؟ علّلوا.

ب. حاولوا بناء مثلّثات مختلفة من عيدان الثقاب.
علّلوا الادّعاء: "كل ضلع في المثلّث أصغر من حاصل جمع ضلعيه الآخرين."

ج. هل يمكن من ستّة عيدان ثقاب بناء مثلّث ليس متساوي الأضلاع؟
إذا نجحتم – ارسموا المثلّث. إذا لا – اشرحوا السبب.

د. هل يمكن من ستّة عيدان ثقاب بناء مستطيل مختلف عن المستطيل المعطى؟ علِّلوا جوابكم.

هـ. ابنوا من ستّة عيدان ثقاب أشكالًا رباعيّة مختلفة، ليست مستطيلات.
ارسموا الأشكال الرباعيّة التي بنيتموها، وصِفوها.

و. ابنوا من ستّة عيدان ثقاب مضلّعات مختلفة. ارسموا المضلّعات التي بنيتموها.
صوغوا صفة ملائمة لأضلاع أي مضلّع كان (كتلك الصفة الخاصّة بأضلاع المثلّث الواردة في البند ب).

مثلّثات وأشكال رباعيّة من ثمانية عيدان ثقاب

6 أ. في كل بند حاولوا بناء مثلّث من ثمانية عيدان ثقاب بحسب المطلوب. ارسموا المثلّث الذي بنيتموه.
إذا كانت هناك بضع إمكانيات – ارسموها كلها.
إذا تعذّر بناء المثلّث المطلوب من ثمانية عيدان ثقاب – اشرحوا السبب.

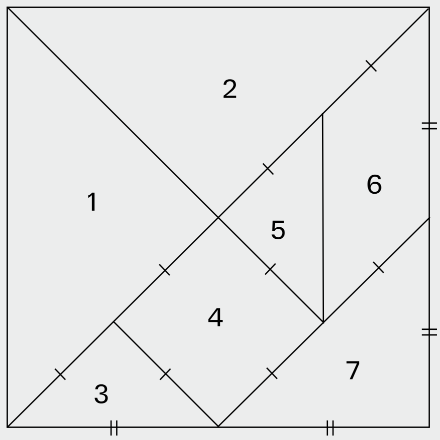
1. مثلّث متساوي الأضلاع
2. مثلّث متساوي الساقين ليس متساوي الأضلاع
3. مثلّث مختلف الأضلاع

ب. اكتبوا كل إمكانيات أطوال أضلاع المثلّثات المبنية من ثمانية عيدان ثقاب.

7 أ. ما هو طول أطول ضلع ممكن في شكل رباعي مبني من ثمانية عيدان ثقاب؟
اكتبوا كل إمكانيات أطوال أضلاع الأشكال الرباعية المبنية من ثمانية عيدان ثقاب.
اشرحوا لماذا لا توجد إمكانيات أخرى.

ب. في كل بند حاولوا بناء شكل رباعي من ثمانية عيدان ثقاب بحسب المطلوب.
ارسموا الشكل الرباعي الذي بنيتموه. إذا كانت هناك بضع إمكانيات – ارسموا كلها.
إذا تعذّر بناء الشكل الرباعي المطلوب من ثمانية عيدان ثقاب – اشرحوا السبب.

1. مستطيل
2. معيّن
3. شبه منحرف
4. دالتون مُحدّب
5. دالتون مقعَّر
6. شكل رباعي من عندكم من نوع آخر.



أمامكم لعبة پازل صينيّة قديمة، تُسمّى التانچرام.
التانچرام هو مربّع مُقسَّم إلى 7 أقسام (خمسة مثلّثات مختلفة، متوازي أضلاع ومربّع)، كما هو مُبيَّن في الرسم.
كل قسم من أقسام التانچرام يُسمّى "تان".

كيف يُبنى التانچرام؟

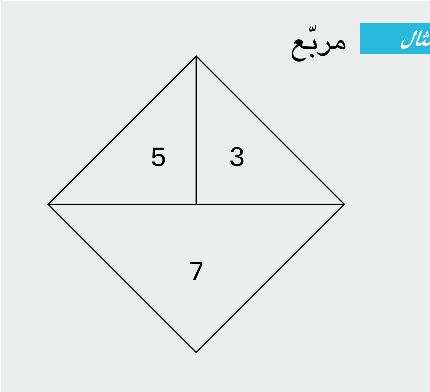
1 أ. استخدموا أحد المربّعات الموجودة في ورقة القصّ "تانچرام" (في آخر الكراس)، وحاولوا بناء تانچرام كما في الشكل أعلاه. سجِّلوا مراحل التقسيم ونفِّذوها.
اكتبوا في كل قسم (تان) رقمه، ثم قصّوا الأقسام.
ب. حاولوا إيجاد طرق أخرى لبناء تانچرام. صِفوها ونفِّذوها.
ج. اكتبوا كل الصفات الهندسية التي استعنتم بها في بناء التانچرام.
(مستقيمان متوازيان أو متعامدان، قطع متساوية، إلخ).

ما هي أقسام التانچرام؟

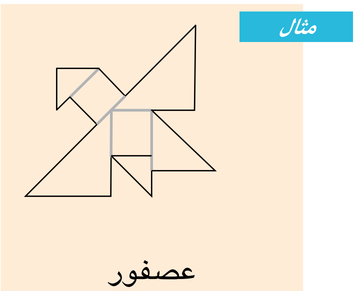
2 أ. حدِّدوا نوع مضلّع كل قسم (تان) في التانچرام. اشرحوا جوابكم بحسب الطريقة التي بنيتم بواسطتها التانچرام في المهمّة 1. هل توجد بين أقسام التانچرام أشكال متطابقة؟ ما هي؟
ب. جِدوا مقدار كل زاوية في كل تان. اشرحوا ذلك اعتمادًا على طريقة البناء.
ج. لِنعرّف طول ضلع المربّع الأصلي على أنه وحدة طول. جِدوا مساحة كل تان.
هل توجد بين هذه الأقسام، أقسام متساوية في المساحة؟ علّلوا.
د. إذا وجدتم في البند السابق قسمَين (تانَين) متساويين في المساحة، ولكنهما غير متطابقين، حاولوا تقسيمهما إلى أقسام متطابقة.
هـ. ركِّبوا من أقسام التانچرام شكلَين رباعيين متساويين في المساحة، ولكنهما غير متطابقين.
اعرضوا إمكانيات مختلفة.

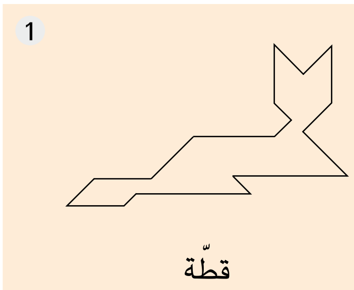
بناء أشكالًا من أقسام التانجرام

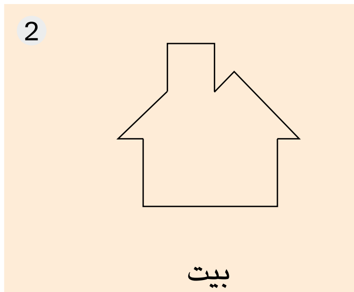
3 استخدموا أقسام التانجرام التي قصصتموها في المهمّة 1.
في كل بند ابنوا الشكل المطلوب، وارسموه بحيث يبدو واضحًا أيّ أقسام التانجرام استخدمتم في بنائه.
اشرحوا لماذا حصلتم على الشكل المطلوب.
اكتبوا ما هي مساحة الشكل.
أ. شبه منحرف متساوي الساقين
ب. شبه منحرف ليس متساوي الساقين
ج. شكل خُماسي مُحدّب
د. شكل خُماسي مُقعَّر
هـ. شكل سُداسي مُحدّب
و. شكل سُداسي مُقعَّر

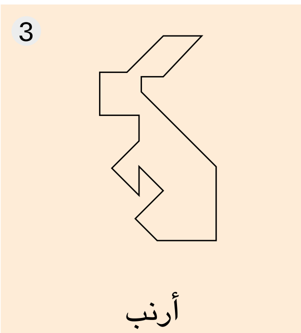


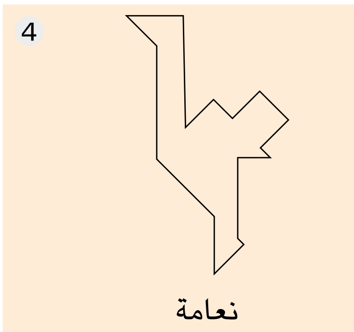
4 أ. ابنوا كل شكل من الأشكال التي أمامكم من أقسام التانجرام السبعة. علِّموا في الرسمة كيف قُسّم الشكل بهذه الأقسام.
ب. أيّ شكل له أكبر محيط؟ رتِّبوا الأشكال بحسب محيطاتها من الصغير إلى الكبير.
ج. أيّ شكل له أكبر مساحة؟ رتِّبوا الأشكال بحسب مساحاتها من الصغير إلى الكبير.

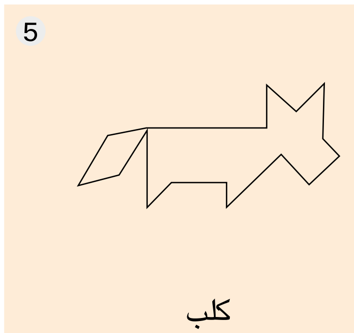






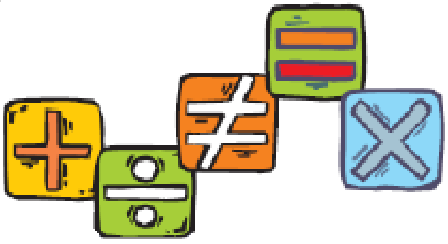






מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

מכון דוידסון לחינוך מדעי
DAVIDSON INSTITUTE OF SCIENCE EDUCATION



الفعالية التي ستكون فيما بعد
جزء من المنهاج العالمي
" رياضيات بالمراسلة"

لتفاصيل أخرى

www.weizmann.ac.il/zemed/mbm

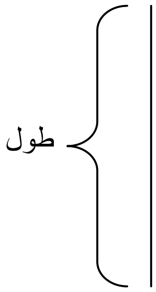
רמה 3

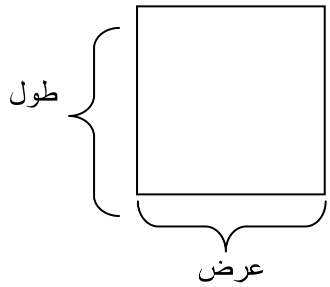
חוברת זו מופקת בשלוש רמות כאשר רמה 3 מיועדת לתלמידי חטיבות הביניים

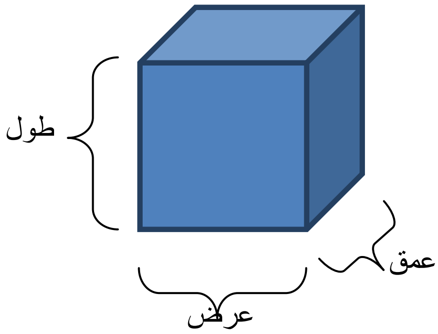
חוברת זו פורסמה בשנת תשס"ד

أن نكسر البُعد

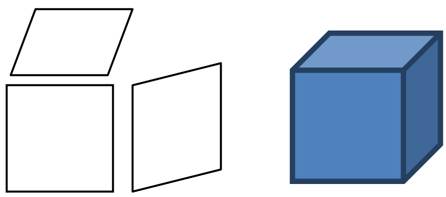
تحياتي أيها التلاميذ!
يمكن رسم أشياء لها طول فقط . مثال على ذلك ، خط مستقيم :
(يمكن أن نقول أن له يوجد ارتفاع فقط).
هناك أشياء يوجد لها طول وعرض ، مثل المربع :
ولكن للمكعب يوجد طول ، وعرض و عمق :



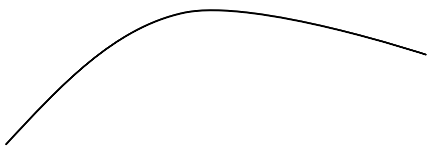




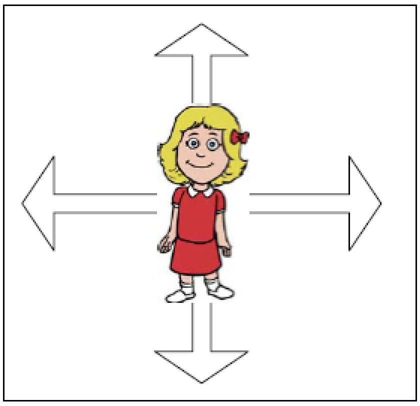
إذا أعطينا ل: "طول" و "عرض" و "عمق" اسم: **أبعاد** ، فعندها نقول : أن للمستقيم **بُعدًا** واحدًا (طول أو ارتفاع)، وللمربع **بُعدان** (طول وعرض) وللمكعب ثلاثة **أبعاد** (طول ، عرض وعمق) .
انتبهوا لا يمكن نرسم مكعب *حقيقي* على ورقة لأن للورقة بُعدان فقط – طول وعرض ("العمق" وبصورة ادق سُمك الورقة هو صغير جدًا جدًا). مع هذا ، فنحن نرسم مكعبًا بواسطة مربع ومتوازيي أضلاع ، وعقلنا يساعدنا لرؤية ذلك على صورة المكعب "ثلاثي الابعاد" (بثلاثة أبعاد):

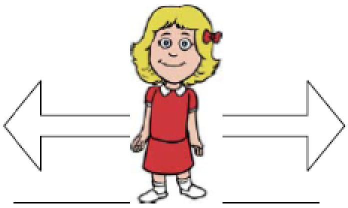


أحيانًا من الصعب معرفة ما هو بُعد شكل معين. مثال جيد لذلك هو الخط المنحني:



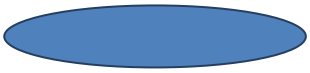
لكي نجد عدد الابعاد لشكل معيّن ، يكفي أن نسال السؤال: "لو كان باستطاعتي أن أسير على الشكل ، في أي اتجاهات يمكنني أن أسير؟" . هل يمكن أن أسير فقط إلى الامام والى الخلف (كما على الخط المنحني) – إذًا للشكل يوجد بُعد واحد . إذا كان من الممكن أن أسير إلى اليمين والى اليسار كما على سطح مربع ، يكون للشكل بُعدان ، وإذا كان من الممكن أن أسير ايضًا إلى أعلى والى أسفل فإنه يوجد ثلاثة أبعاد .

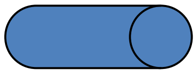


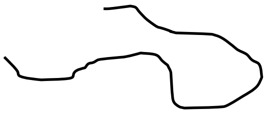


---

1. سجلوا كم بُعداً لكل واحد من الاشكال الاتية :

أ. إيلبسا :  ____________

ب. اسطوانة :  ____________

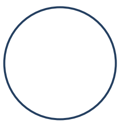
ج. خط منحني :  ____________

د. انسان : ____________

ه. سطح كرة السلة : ____________

و. غلاف الكرة الارضة (الكرة الارضية التي كلنا نعيش عليها) : ____________

ز. نقطة : ____________

ح. محيط الدائرة :  ____________

عالم ذو بُعدين

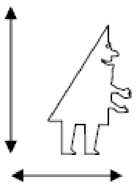
كثير من المرات يتسلى العاملين في الرياضيات بأنواع مختلفة من الاشياء الخيالية . حدثان غريبان بشكل خاص هما العالمان الخياليان اللذان أوجداهما (كل واحد على حدة) الرياضيان تشارلز هينتون (Charles Hinton) و أديفون أبوت (Edwin Abott) . نشرا عملهما في كتب خيالية ، بيعت بعدد كبير من النسخ! العالمان الخياليان اللذان أوجداهما كانا متشابهان بشيء واحد – كانا عالمان بهما كل الاشكل مسطحة !

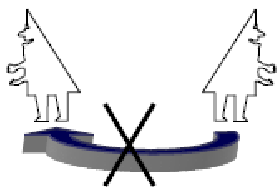
عالم "مُسطح"

كل شيء في عالم "مسطح" هم مسطح كسطح ورقة – بحيث يكون لكل شيء ارتفاع (طول) وعرض ولكن لا يوجد له عمق

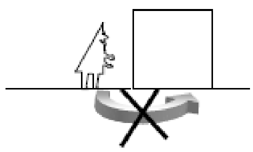
عالم كهذا، يوجد به طول وعرض وبدون عُمق هو عالم ذا بُعدين – (طول وعرض) .

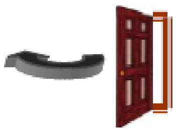
هكذا مثلاً رسم تشارلز هينتون الانسان في هذا العالم : يوجد له طول (ارتفاع) – فهو يستطيع القفز إلى فوق والى تحت ، وكان له عرض – يمكنه السير إلى اليمين والى اليسار ...
ولكن لا يوجد له عمق ! "يُسمح" له التحرك فقط على الورقة في اتجاهين ، إلى فوق والى تحت ، إلى اليمين والى اليسار، لا يمكن الخروج من الورقة – ولذلك لا يمكنه التوجه إلى الجهة الاخرى (اليسار) – لأن هذا يتطلب الخروج من الورقة !



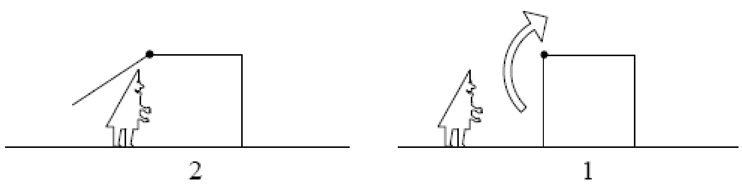


كيف يظهر بيت في عالم "مسطح " ذي بُعدين ؟ لا يمكن أن يكون البيت كما هو مبين في الشكل، لأنه لا يمكن للإنسان ذي البعدين أية طريقة للدخول اليه – فهو يعلق عند الحائط ! (لأنه لا يمكنه الخروج من الورقة !) يجب إضافة باب للبيت – ولكن في هذا العالم لا توجد أبواب عادلة . لأن الباب العادي يفتح إلى العمق دائمًا :

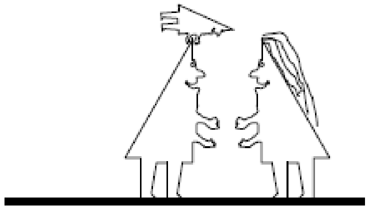




لذا، يجب إضافة باب خاص يصعد وينزل ، هكذا:



أبوت هو مدير مدرسة في لندن ، انجلترا، نشر كتابه "Flatland" (أو بالعربية "أرض مسطحة") سنة 1884. هينتون هو أيضًا لندني ، ولكن بعد أن تزوج (بانة أحد العاملين المشهورين في مجال الرياضيات) انتقل للعيش في الولايات المتحدة الامريكية ، حيث عمل بروفسور للرياضيات في جامعة برنستون (Princeton) ، أصدر كتابه "فصل في حياة أرض مسطحة" (An Episode of Flatland) سنة 1974 . سمى هينتوت كوكب السيار ثنائي الابعاد أستريا . وذلك لأن سكان أستريا لا يستطيعون الدوران ، وُلد الرجال ووجوههم متجهة إلى اليمين ، ووُلدت النساء ووجوههم متجهة إلى اليسار . وبذلك كان إمكان الرجال والنساء أن يتقابلوا وجهًا لوجه! فيما يلي صورة لعائلة نموذجية في أستريا :



لقاء نموذجي في حياة عائلة أستريانية بعد الظهر

---

2. أ) هل الابن / الابنة الذي / التي تسلق / ت رأس الاب هو / هي ولد أم بنت ؟ فسروا ! ___________

____

ب) الاشخاص في أستريا لا يستطيعون الدوران . كيف مع كل ذلك يستطيع الاسترياني أن ينظر إلى الوراء؟ ____

ج) صفوا كيف يمكن لشخصين أستريانيين أن يعبر أحدهما عن الآخر ؟ ___________________________

____

د) كيف يظهر شخص أسترياني في عين شخص أسترياني آخر ؟ ________________________________

____

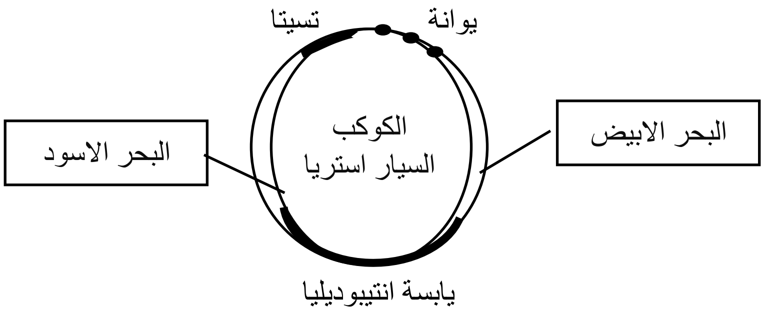
هـ) هل يمكن أن يكون لبيت بابان ، واحد من جهة اليسار وآخر من جهة اليمين؟ إذا نعم ، ماذا يحدث عندما يكون البابان مفتوحان في نفس الوقت ؟ (ارشاد: في عالم ثنائي الابعاد ، يجب أن يكون كل شيء مربوط للأرض في أحد الاماكن ، وإلا فإنه يسقط!) ___________________________________

____

و) هل توجد أنابيب في أستريا؟ ____

____

قال هينتون أن سكان أستريا يعيشون (ويسيرون) على سطح "الكوكب السيار" أستريا الذي يدور حول الشمس في عالم ثنائي الابعاد. الكوكب السيار على شكل دائرة (بالطبع يمكن أن يكون كرة كالكرة الارضية!) وهوه مقسوم الي يابستين . اليابسة الجنوبية والتي تسمى يابسة الانتبوديليا لم تكن مأهولة (لم يسكن علها بشر) ومنفصلة عن اليابسة الأخرى، الشمالية ، بواسطة بحرين – البحر الابيض والبحر الاسود.
لم يعرف الشعب الاسترياني القديم أن الكوكب السيار الذي يعيشون عليه هو دائري وفكروا أنه خط . (نذكركم أن الانسان القدين أيضًا فكروا أن الكرة الارضية التي نعيش عليها مسطحة وليست كروية).
سكن الاستريانيون كلهم في اليابسة الشمالية في دولتين متجاورتين : "يوانة" و "تستيا" . لم تكن العلاقات بين سكان الدولتين على ما يرام دائمًا، فأحينا كانت تدور الحروب فيما بينهم .



---

3. أ) في الحرب بين سكان يوانة وسكان تسيتا تحارب الرجال فقط ، وانتصر التسيتيون. لماذا؟ _______

____

ب) منذ أن اكتشف العلماء اليوانيتيون أن كوب السيارة "استريا" هو دائري ، بدأ اليوناتيون الانتصار في الحرب. لماذا؟ ________________________

4. أمامكم ثلاث *عمليات*. فقط واحدة من بينها يمكن تنفيذها في استريا . ما هي ، صفوا كيف ننفذها ، وأجيبوا : لماذا لا يمكن تنفيذ العمليات الاخرى؟
   أ. أن نربط بخيط ________________________
   ب. أن نركب على دراجة ________________________
   ج. أن نطير بطائرة خاصة تطير بواسطة جناحين خاصين يتحركان كجناحي العصفور ____

____

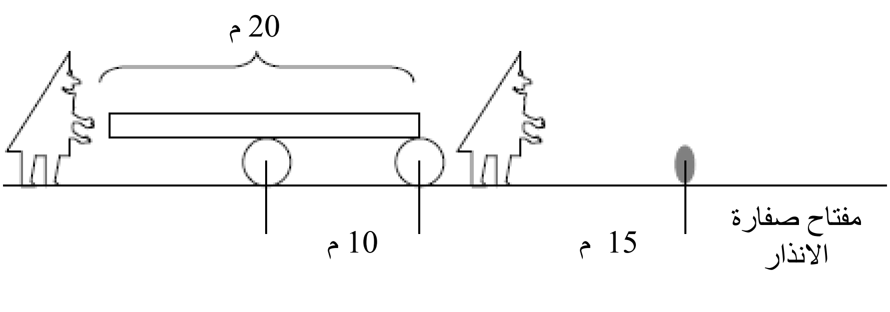
5. استرينان إتنان مجرمان حاولا سرقة ذهب من المنجم الملكي . ملأوا علبة (علبة - هو مفهوم ثلاثي الابعاد) طولها 20 متر بسبائك ذهبية ، ووضعوها على عجلين دائريين ، البعد بين مركزي العجلين هو 10 م ، والعجل الاول موجود تحت مقدمة العلبة. وقف أحد المجرمين أمام العلبة ووقف الاخر وراء العلبة وبدءا بدفع العلبة هكذا: المجرم من الوراء دفع العلبة إلى الامام (في نفس الوقت العجلان تحركا بالطبع) وبعد أن تقدمت العجلات 10 م ، رفع العجل الخلفي ورماه إلى المجرم أمام العلبة. وضع المجرم الامامي العجل على الارض على بعد 10 م قبل مركز العجل الاول . وبذلك بدأ المجرمان بالهروب بسبائك الذهب التي سرقاها، بواسطة هذه المراحل الشائكة في دفع العلبة، رمي العجل ووضعه عند مقدمة العلبة مرة بعد مرة . اقتربا إلى بوابة المنجم ، وللمفاجأة انتبها إلى أنه على بُعد 15 م من مركز العجل الاول يوجد مفتاح لصفارة إنذار مرتبط بالأرض.
   أ. لماذا دفعا العلبة بصورة شائكة كهذه ولم يستعملا عربة يدوية؟ ______________

____

   ب. عندما يتقدم العجل 10 م ، كم مترًا تتقدم به العلبة ؟ (ارشاد: ليس 10 م ولا يرتبط بكبر العجل. اقتراح جربوا ذلك باستعمال قطعة نقدية) . ________________

____

   ج. كم عجلاً (إذا كان كذلك) يمر فوق مفتاح صفارة الانذار ؟ فسروا (الجواب غير مرتبط بطول قطر العجل!) ________________________



أبعاد إضافية

كما في العالم ثنائي الابعاد يمكن أن نتخيّل أيضًا عالمًا بعدد من الابعاد . عالم أحادي الابعاد وهو عالم فيه الكائنات هي أحادية الابعاد أي خطوط (عين واحدة في طرف الخط !) . في هذا العالم لا يمكن أبدًا أن ترسم الارض أو الكوكب السيار (تذكروا : أن الارض وسطح الكوكب في العالم ثنائي البّعد هما خطوط أحادية البعد).
مع كل هذا نحاول وصف عدد من خواص الكائنات في عالم كهذا.

---

6. أ) ارسموا كائنا أحادي الابعاد ؟

ب) في أي اتجاهات يمكن لكائن أحادي البعد أن يتحرك؟ ______________________________

____

ج) هل كائن أحادي البعد يمكن أن يعبر عن كائن آخر (الذي يتحرك بنفس الخط)؟ فسروا ______

____

7. *نفرض* أنه يمكن لكائنات نقل معلومات لكائنات أخرى فقط عندما تكون الكائنات قريبة الواحد للآخر .
   أ. هل يمكن لكائن ثنائي البعد أن ينقل ملومة لخمسة كائنات دفعة واحدة؟ إذا نعم ، كيف ؟ وإذا لا – لماذا؟ ______________________________

   ____

   ب. هل يمكن لكائن أحادي البعد أن ينقل ملومة لخمسة كائنات دفعة واحدة؟ إذا نعم ، كيف ؟ وإذا لا – لماذا؟ ______________________________

   ____

هل عرفتم؟

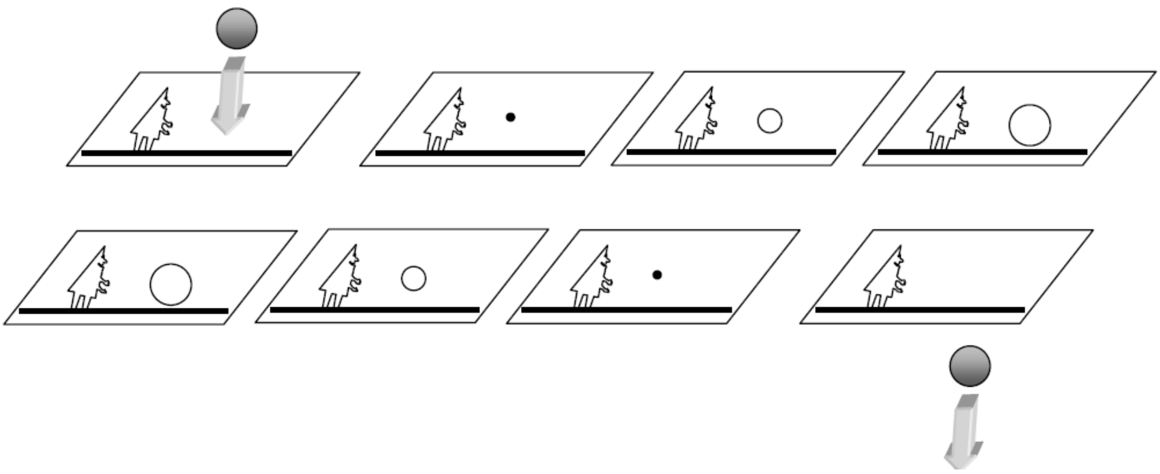
هل يمكن وصف عالم مكون من أكثر من ثلاثة أبعاد (مثلاً عالم رباعي الابعاد)؟
الجواب هو بشكل واضح ، نعم – ولكن من الواجب تعريف وتحديد ما نقصده عندما نقول أربعة ابعاد .
هناك من يقول أننا بالفعل نعيش في عالم كهذا الذي فيه بالإضافة إلى الابعاد : الطول ، العرض، والعمق يوجد بُعد رابع هو الزمن . هذا الوصف غير دقيق لعدة أسباب ، ليس هنا المكان للتوسع فيها.
فقط نشير أنه هناك تشابه ما بين الزمن والفضاء ثلاثي الأبعاد عندما ننظر إلى السماء البعيدة في الفضاء – فنحن فعلاً ننظر أيضًا في الزمن إلى الوراء – وذلك لأن الضوء الذي يصل الينا من كوكب بعيد (لهذا السبب نرى نحن الكوكب) خرج من الكوكب قبل سنين كثيرة .
الحقيقة هي أنه بشكل رياضي يمكن وصف عالم مكون من أربعة أبعاد وحتى يمكن تخيّل كيف تكون الأشكال الهندسية في هذا العالم ، وبدون أن نستعمل البعد الزمني – وإنما باستعمال بُعد إضافي (خيالي) للطول .

يمكن فهم الابعاد العالية (أبعاد أكثر من 3) قليلًا، إذا بيّنا ما هي أفضليات الكائنات ثلاثية الابعاد مقارنة مع الكائنات ثنائية الابعاد. الكائن ثنائي الابعاد يرى إلى الامام فقط . فهو لا يرى أبدأ محتويات الاشياء في العالم ثنائي الابعاد. حتى أنه لا يرى جسمه المثلث أو حتى اجسام الكائنات ثنائية الابعاد الاخرى كما يراه الكائن ثلاثي الابعاد (مثلنا) . نحن ، ككائنات ثلاثية الابعاد، يمكننا من خلال بعد العمق الموجود لدينا أن نرى " داخل" العالم ثنائي الابعاد وأن نرى ما في داخل كل كائن في هذا العالم !

نحن نستطيع أن "نُعلق" العالم ثنائي الابعاد على الحائط مثل الصورة وأن نرى كا ما بداخله – لكن الكائنات الحية في العالم ثنائي الابعاد لا يعرفون أبدًا ماذا يوجد في داخل البيوت مثلاً. إن نكون " وقحين" نستطيع حتى أن " نسحب " كائن ثنائي الابعاد من بيته إلى البعد الثالث وأن نرجعه إلى مكان آخر في العالم ثنائي الابعاد!

الكائنات في العالم ثنائي الابعاد لا يفهمون إلى أين اختفى زميلهم! فهم لا يعرفون أبدًا عن العالم ثلاثي الابعاد أو عن وجود بُعد العمق ، فهم يرون فقط أن كائن من عندهم قد "اختفى" من بيته وظهر في مكان آخر كأنه من الواء ! بنفس الشكل ، لو كان فعلاً عالم فيه أربعة أبعاد وبه كائنات رباعية الابعاد ، كان بإمكانهم إخرج شخص من العالم ثلاثي الابعاد وبواسطة البعد الرابع يضعوه في مكان آخر في العالم مباشرة . فنحن في عالمنا كنا ببساطة نرى أن شخصًا قد اختفى ويظهر كأنه من الهواء في مكان آخر ! ولكن هذا أصبح علمًا خياليًا ...

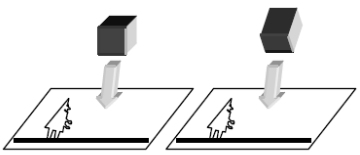
ماذا يحدث لو رمينا كرة ثلاثة الابعاد إلى عالم ثنائي الأبعاد ؟ الكرة تقطع المسطح (العالم ثنائي الابعاد) ويخرج من الجهة الاخرى . أي أشكال تترك الكرة في المسطح ثنائي الابعاد عندما "يقطعه" ؟ عندما تصطدم الكرة في العالم ثنائي الابعاد يُرى كنقطة . النقطة "تنتفخ" لتصبح دائرة تكبر وتكبر حتى يصبح لها قطرًا كقطر الكرة. وبعده الكرة "تتقلص" وتصغر وتصغر لتصل إلى نقطة – وعندها تترك الكرة العالم ثنائي الابعاد إلى العمق.



---

8. أ) صفوا ***الأشكال*** التي تنتجها دائرة ثنائية الابعاد عندما تزور العالم أحادي البعد .

ب) صفوا الأشكال التي ينتجها مكعبًا ثلاثي الابعاد عندما يزور العالم ثنائي الابعاد ويصل بشكل قائم ، وعندما يصل بشكل مائل على أحد أضلاعه .



فركتلات

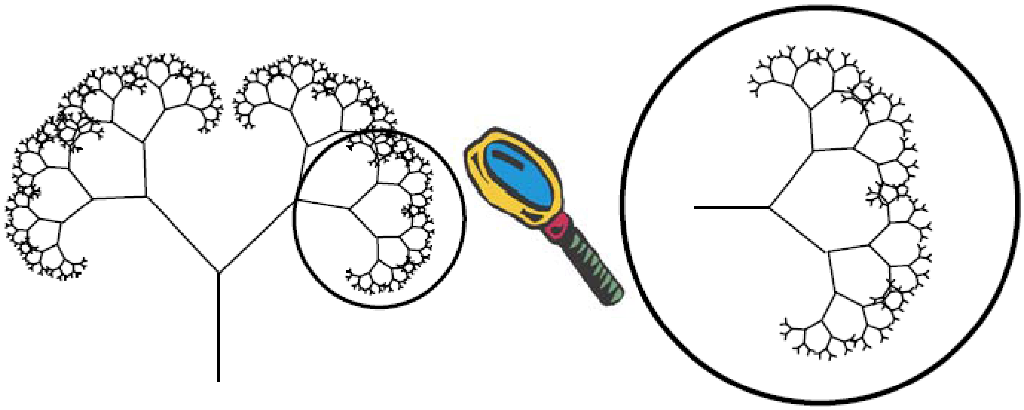
النمطي الهندسي المتكرر

هل انتبهتم مرة أنه في الحياة الحقيقية لا توجد تقريبًا أشكال هندسية "متكاملة" مثل الدوائر ، الاهرامات ، المكعبات ؟ فكروا في ذلك بُرهة !

لنأخذ مثلاً القرنبيط :

يمكن القول أن لرأس القرنبيط يوجد شكل معقد ومركب كثيرًا . يمكن أيضًا لو نظرنا من خلال زجاجة مُكبّرة على جزء صغير من زهرة القرنبيط - كتلة واحدة بيضاء – لوجدنا أنه شبيه جدًا في شكله لرأس القرنبيط الكامل.

مثال إضافي : الاغصان لشجيرة . كذلك هذا شكل معقد جدًا – ولو نظرنا من خلال زجاجة مكبرة على جزء صغير منها لوجدنا أنه صورة مشابهة (ولكن غير مطابقة) لشكل الشجرة الكامل.



فقط في سنوات السبعين للقرن العشرين ، بدأ الرياضيون في التفكير لاستخدام الرياضيات في وصف أشكال معقدة موجودة في العالم ! وسموا هذه الأشكال باسم عام : فركتلات .

الفركتال هو كل شيء له صفتان :

أ) "تركيبة لا نهائية " – شكل معقد ومركب جدًا

ب) "تشابه ذاتي" – إذا كبّرنا قسم صغير من الشكل ، يكون مشابهًا بشكل عام للصورة نفسها.

أحد الرياضيين اللامعين الذي كشف العلاقة بين رياضيات ، حاسوب ، وفركتلات وطبيعية هو بروفسور نافي مندلبروط . ولد مندلبروط في بولندا سنة 1924، وبعدها انتقل إلى فرنسا ومن ثم إلى الولايات المتحدة الامريكية حيث عمل بروفسورًا بعدد من الجامعات البارزة في العالم ، من بينها جامعة هارفرد ،بل ومعهد الابحاث على اسم I.B.M ، وما زال حي يعمل وفعال في مجال بحث الفركتلات . من جملة ما وجد مندلبروط هو أنه في الموسيقى أيضًا يوجد مبنى فركتالي معقد. ولكن يمكن التنويه أنه في الانتاج الفني يوجد " نهج " خاص – بحيث يكون جزء صغير من الانتاج يشبه بشكل عام الانتاج المتكامل!

كذلك دقات القلب لدينا هي فركتال (دقات القلب ليست ثابتة – هذا يعني أن قلبنا لا يدق كل ½ ثانية بالضبط – وانما تقريبًا كل ½ ثانية). نجح الريضيون في استعمال رياضيات الفركتلات لكي يساعدوا الاطباء في معالجة مرضاهم بشكل أفضل خاصة المرضى الذين يعانون من أمراض القلب !

أيضًا في هوليود اهتموا كثيرًا في الفركتلات ! من المؤكد أنكم لم تصدقوا ولكن هذه حقيقة ! منتجو الافلام يستعملون الحاسوب والرياضيات لإنتاج مناظر طبيعية (مثل مناظر جبال) والتي تظهر كأنها حقيقية – ولكن في الحقيقة ما هي إلا فركتلات ينتجها الحاسوب ! فيما يلي مثال لصورة أنتجها فنان حاسوب اسمه كين موسجريب (Ken Musgrave) في الموقع:
http://www.kenmusgrave.com/Old_Stuff/html/art_gallery.html (كما ويمكن الحصول على برنامج ينتج صورة فركتلات كهذه : http://www.pandromeda.com/

....

9. أشيروا √ بجانب الاشياء التي هي فركتلات :

أ) طاولة □ ب) غيوم □ ج) جبال □
د) خس □ هـ) الشمس □ و) خريطة الشوارع في البلاد □
ز) سطح القمر □ ح) دقات الساعة □

....

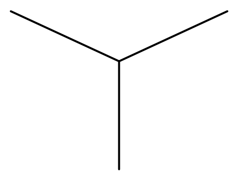
رياضيات الفركتلات معقدة جدًا – ولكن من السهل تعلّم رسم فركتال من نوع خاص - **فركتال رياضي**

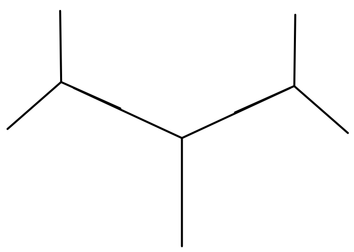
فركتال رياضي هو فركتال يمكن رسمه بصورة بسيطة ، هكذا :
أ) نرسم صورة أولية كيفما اتفق .
ب) نختار عدد من النقط على الصورة وعليها نرسم نفس الصورة – ولكن بأصغر منها – نستمر عمل ذلك عدة مراحل.

في الحقيقة لقد رأيتم فركتال رياضي : فركتال الشجرة في الصفحة السابقة ! من السهل رسم فركتال كهذا!

....

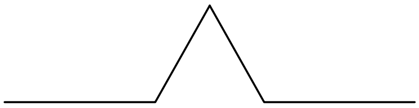
10. نرسم فركتال الشجر بحسب المراحل التالية:
المرحلة أ : نرسم الصورة "Y "
المرحلة ب : نرسم على كل غصن "Y " بصورة أصغر.





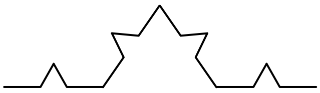
أ) استمروا في رسم "Y" على كل غصن بصورة أصغر ، حتى تحصلوا على شجرة جميلة . كلما رسمتم "Y" أضيق في البداية ، تكون الشجرة النهائية أضيق أكثر . استمروا في رسم الشجرة حتى خمس مراحل.

ب) أحد الفركتالات المشهورة جدًا يسمى " خط كوخ"
المرحلة أ: نبدأ بخط كهذا :



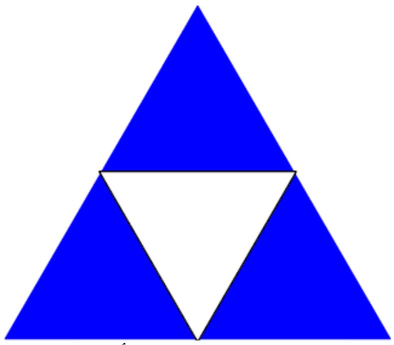
المرحلة ب: نستمر في رسم الفركتال بواسطة تحويل كل قطعة مستقيمة من القطع الاربع التي تكون الشكل في المرحلة أ إلى الشكل :

لذا في المرحلة الثانية نحصل على :

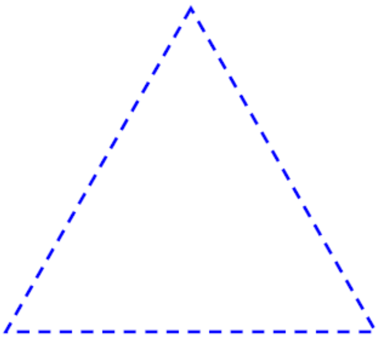


اكملوا المرحلتين إضافيتين في الفركتال .

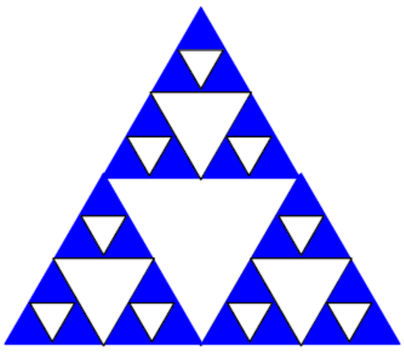
11. ليس من الضروري أن يبدأ الفركتال من خط مستقيم ." مثلث سيربنسكي" هو فركتال مبني من مثلثات.
أمامكم أربعة مثلثات تشكل المراحل المتتالية في بناء "مثلث سيربنسكي" .
المرحلتان الثانية والرابعة ناقصتان ، أكملوهما !



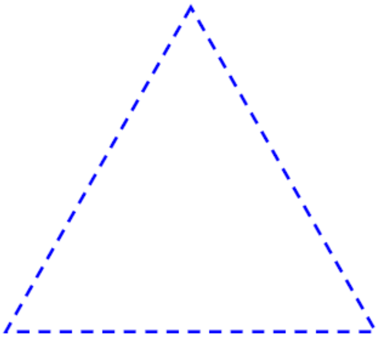
مثلث سيربينسكي أ



مثلث سيربينسكي ب

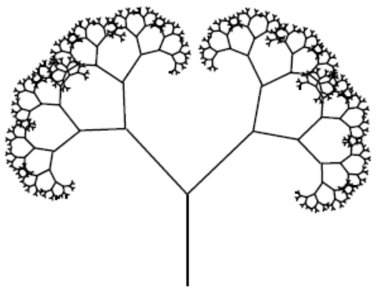


مثلث سيربينسكي ج



مثلث سيربينسكي د

يُسأل السؤال : ما هو عدد أبعاد الفركتال؟ لننظر إلى المساحة التي "يحتلها " الفركتال. هل هو مشابه لما هو أحادي البُعد ، مثل الخط ، أو ما هو ثنائي الابعاد كالمربع أو هو ثلاثي الابعاد كالمكعب ؟ لكي نجيب على السؤال ، نتذكر ، أنه يمكن تحديد عدد الابعاد لصورة ما بواسطة عدد الاتجاهات التي يمكنى أن "نسير" عليها أيضًا . لعى المستقيم يمكن أن نسير إلى الامام والخلف فقط – لذلك هو أحادي البعد. على مسطح رباعي (مثل الورقة) يمكن أن نسير إلى الامام والخلف والى اليمين واليسار فهو ثنائي الابعاد .



لنأخذ مثلاً الشجرة :

من جهة واحدة، هذه الشجرة مبنية من خطوك مستقيمة . او كان بإمكاننا السير عليها ، من المؤكد لسرنا إلى الامام والخلف فقط. وبذلك يكون كما يبدو أحادي البعد .

من جهة أخرى – الشجرة التي هي فركتال لا "تبدو" كشكل أحادي البعد !

فهو " يحتل" مساحة رباعية والتي هي ثنائية الابعاد !

المنطق يقول أن أعاد فركتال "الشجرة" هو أكثر من 1 وأقل من 2 . ولكن هل هذا ممكن – ع8دد أعاد ليس عددًا صحيحًا ؟ !

بندلروط ورياضيون آخروا تمعنوا في الفركتالات وتوصلوا إلى أن الجواب إيجاب ! الفركتلات هي في الحقيقة أشكال عدد أبعادها ليس عددًا صحيحًا ! ولأبعاد الفركتال تسمى "بُعد مكسور" وهو عدد كسري – عدد جزء منه عدد صحيح والجزء الاخر هو كسر ! نكن الفركتالات توجد أبعاد مكسورة ، وهناك قاعدة رياضية تحسب ما هي قيمة هذا البعد. هذه القاعدة صحيحة أيضًا بالنسبة لفركتالات في الطبيعية والتي هي ليست فركتالات رياضية ، وبما أن هذه القاعدة معقدة لا نتعلمها هنا. بالرغم من هذا، ومن خلال النظر إلى الفركتال (بعد عدد من مراحل الرسم) يمكن التخمين ما هو عدد أبعاده بالتقريب – أو تخمين بين أي عددين صحيحين تقريبًا يكون .

....

12. خمنوا بين أي عددين صحيحين يكون البُعد الفركتالي المكسور لكل واحد من الفركتالات الآتية:

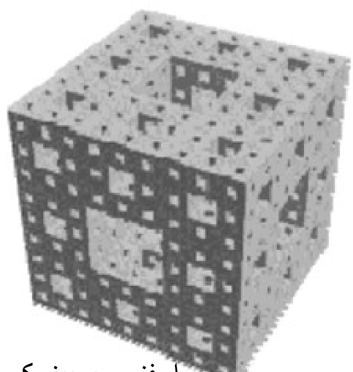
أ. فركتال الشجرة : بعد مكسور بين 1 و 2 .

ب. "خط كوخ" : بعد كسري بين _____ لـ ________

ج. "مثلث سيربينسكي" : بعد كسري بين _____ لـ ________

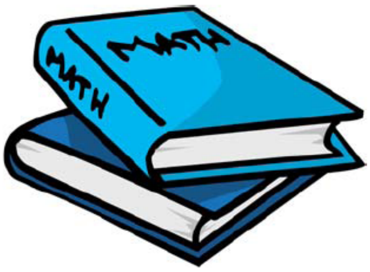
د. "اسفنج سيربينسكي" : بعد كسري بين _____ لـ ________

ه. "خط كنتور" : بعد كسري بين _____ لـ ________



اسفنج سيربينسكي

قائمة المصادر ومواد للتوسع



كتب:

חוברות מתמטיקה של היחידה לפעולות נוער של מכון וייצמן למדע

חומר מקור של יוסי ומיכל אלרן

The Unexpected Hanging, Martin Gardner

Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers, Martin Gardner

مواقع انترنت:

http://math.rice.edu/~lanius/frac/index.html

http://www.alcyone.com/max/lit/flatland/

http://www.calormen.com/Flatland/

http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/dimension.shtml

http://www.shodor.org/interactivate/lessons/pattern2.html

http://www.kenmusgrave.com/

نُكمل جداول

قواعد اللعبة:
أمامكم جدول 3 × 3. في كل تربيعة في الجدول كُتب الرقم 0.
يُسمّى مثل هذا الجدول "جدول الصفر".
في كل مرحلة من اللعبة نختار جدول 2 × 2 من الجدول المعطى،
ونجمع لكل عدد مُسجَّل فيه العدد 1.

0	0	0
0	0	0
0	0	0

1 كتب مازن في المرحلة الأولى جدولًا كهذا:

1	1	0
1	1	0
0	0	0

في المرحلة الثانية حصل على الجدول الذي أمامكم:

1	1	0
1	2	1
0	1	1

أ. أيّ جدول 2 × 2 اختار مازن في المرحلة الثانية؟

ب. اكتبوا كل الإمكانيات التي يمكن الحصول عليها في المرحلة الثالثة.

ج. اختاروا أحد الجداول الناتجة في البند ب. استمرّوا وسجِّلوا له الإمكانيات للمراحل الثلاث التالية.
استخدموا **ورقة الجداول** الموجودة في آخر الكراس.

د. أمامكم جداول كتبتها شادية.
انتبهت شادية أن في أوّل سطر في كل جدول من الجداول التي أكملتها، حاصل جمع العددين الموجودين في طرف السطر، يساوي العدد الأوسط.

4	5	1
6	10	4
2	5	3

$4 + 1 = 5$

1	3	2
3	5	2
2	2	0

$1 + 2 = 3$

3	5	2
6	9	3
3	4	1

$3 + 2 = 5$

هل هذه العلاقة تتحقّق أيضًا في الجداول التي أكملتموها؟
هل هذه العلاقة تتحقّق في كل جدول مثل هذا؟ اشرحوا السبب.

هـ. حاولوا إيجاد علاقات أخرى بين الأعداد في جداولكم.
هل العلاقات التي وجدتموها تتحقّق في كل الجداول الممكنة في هذه اللعبة؟

كيف نصل إلى الجدول المعطى؟

2 أ. بدأ سمير ملء جدول الصفر، ونفّذ 5 مراحل.
ماذا يمكننا أن نعرف عن الجدول الذي حصل عليه سمير؟
حاولوا أن تكتبوا في الجدول الذي أمامكم الأعداد الناتجة في المرحلة الخامسة.

ب. في كل بند معطى جدول.
هل يمكن أن يكون سمير قد حصل على هذا الجدول في مرحلة ما؟
إذا لا – اشرحوا السبب.
إذا نعم – أشيروا في أيّ مرحلة حصل على هذا الجدول، واكتبوا طريقة ممكنة توصل إلى الجدول المعطى.
إذا وُجدت طرق أخرى – صِفوها.

1

2	3	1
4	6	0
2	3	5

2

2	1	1
1	5	4
1	2	3

3

1	3	2
1	5	4
0	2	2

ج. لكل جدول معطى، حدِّدوا في أيّ مرحلة من اللعبة كُتب، واكتبوا طريقة ممكنة توصل إليه.
إذا وُجدت طرق أخرى – صِفوها.

1

1	4	3
3	7	4
2	3	1

2

2	5	3
5	9	4
3	4	1

3

4	6	2
5	8	3
1	2	1

د. في كل بند معطى جدول.
هل يمكن الحصول على الجدول في مرحلة ما من مراحل اللعبة؟
إذا لا – اشرحوا السبب.
إذا نعم – اكتبوا طريقة ممكنة توصل إلى الجدول المعطى.

1

1	3	2
3	4	1
2	1	2

2

2	7	5
5	6	7
2	2	2

3

0	4	4
2	7	5
2	3	1

3 لعبة بأزواج - "نصل إلى الأعداد"

تعليمات اللعبة: نبدأ من جدول الصفر. كل لاعب في دوره يسجّل أعدادًا في الجدول بحسب قواعد اللعبة المعطاة في الصفحة 15.
هدف اللاعب **أ** هو الوصول إلى تشكيلة الأعداد المعطاة.
هدف اللاعب **ب** هو منع ذلك منه.

1

	7	
5		

2

7		5

أ. العبوا بهدف تشكيل الجدول 1.
- هل يوجد للّاعب أ استراتيجية تكفل له الفوز؟ علّلوا.
- هل يوجد للّاعب ب استراتيجية تكفل له الفوز؟ علّلوا.

ب. بدِّلوا الوظائف والعبوا، بهدف تشكيل الجدول 2.
لأيّ لاعب توجد استراتيجية تكفل له الفوز في هذه اللعبة؟

استعادة أعداد ناقصة في الجدول

1	3	2
2		2
1	1	0

3	5	2
7	10	3
		1

4 أ. بعد أربع مراحل، حصل مُنير على الجدول الذي أمامكم.
اقترحوا طريقة لإيجاد العدد المحيّ من الجدول.
هل يمكن إيجاد العدد دون استعادة كل مراحل اللعبة؟ اشرحوا.

ب. نفّذت مروة بضع مراحل وحصلت على الجدول الذي أمامكم.
حاولوا استعادة العددين المحيَّين.

5 لعبة بأزواج - "استعادة أعداد في الجدول"

كل تلميذ يبني لنفسه 10 جداول، مرحلة بعد مرحلة، بحسب القواعد المعطاة في الصفحة 15.
يفضّل في كل جدول تنفيذ عدد مختلف من المراحل.
اللاعب أ يقرّر عدد الأعداد الناقصة التي يريد استعادتها في جدول اللاعب ب.
اللاعب ب يمحو الأعداد من الجدول بموجب قرار اللاعب أ، ويعرض الجدول على اللاعب أ.
على اللاعب أ أن يكتشف ما هي الأعداد التي محاها اللاعب ب، ومقابل كل عدد ينجح باكتشافه، يحصل على نقطة. بعد ذلك يتبادل اللاعبان الوظائف.
اللاعب الذي يحصل على نقاط أكثر يكون هو الفائز.
الفائز في الصف هو اللاعب الذي يحصل على أكبر مجموع من النقاط في الصف.
قبل البدء في اللعبة يفضّل التفكير بالآتي:
- كم عددًا يفضّل أن يقرّر اللاعب محوها؟
- أين يفضّل محو الأعداد في الجدول؟

نستخدم متغيّرات

6 في الجدول الذي أمامكم، أُشير إلى الأعداد الواقعة في زوايا الجدول بالمتغيّرات a, b, c, d.

b		a
c		d

أ. أكملوا الجدول: عبِّروا عن الأعداد في التربيعات الخالية بدلالة المتغيّرات a, b, c, d.

ب. عبِّروا بدلالة المتغيّرات a, b, c, d عن حاصل جمع كل الأعداد في الجدول.
هل يمكن أن يكون حاصل الجمع مساويًا لِـ 8؟ لِـ 11؟ لِـ 26؟
إذا لا – اشرحوا السبب.
إذا نعم – كم مرحلة علينا أن ننفّذ لكي نتوصّل إلى حاصل الجمع هذا؟

7

b	a	
	c	
		d

أ. أكملوا الجدول: عبِّروا عن الأعداد في التربيعات الخالية بدلالة المتغيّرات a, b, c, d.

ب. هل يمكن أن d = 11 ، c = 0 ، b = 8 ، a = 7؟
إذا لا – اشرحوا السبب.
إذا نعم – كم مرحلة علينا أن ننفّذ للحصول على هذا الجدول؟

ج. هل يمكن أن c = a + b؟ اشرحوا جوابكم.

8

b	d	
a	c	k

أ. أيّ متغيّر من المتغيّرات a, b, c, d, k الموجودة في الجدول الذي أمامكم، يُمثّل أكبر عدد؟
أيّ متغيّر يُمثّل أصغر عدد؟

ب. أكملوا الجدول. عبِّروا عن الأعداد في التربيعات الخالية بدلالة المتغيّرات a, b, c, d, k.

ج. اكتبوا أكثر ما يمكن من العلاقات التي تربط بين المتغيّرات a, b, c, d, k.

המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence through Education

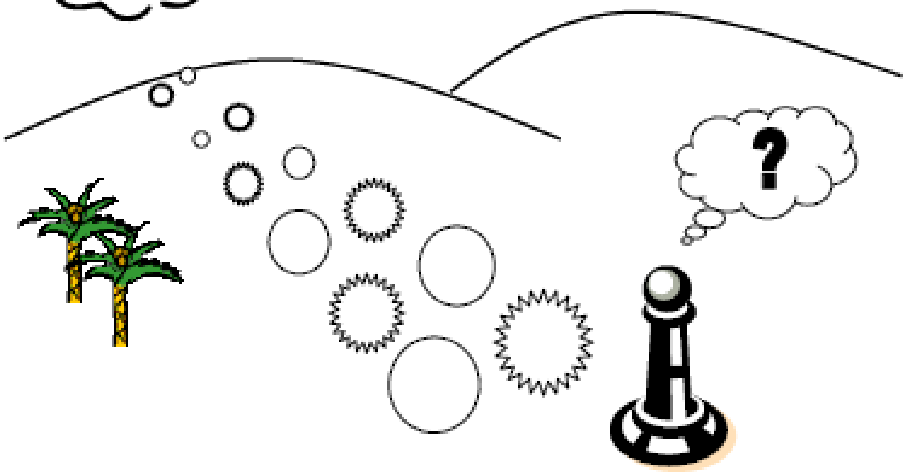
מצוינות 2000
בחסות קרן סקירבול

المعهد للتفوق

العاب بأشجار

צבי שלם

מערכת: גלי שמעוני, ד"ר אבי פולג

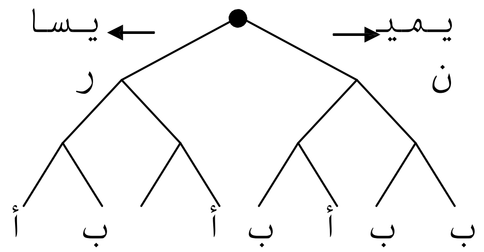


ب. **الاستراتيجيات الأساسية بألعاب الأشجار**

تمعنوا بأشجار اللعب التالية، التي تصف ألعاب للاعبين. كل لعبة تبدأ من الرأس العلوي للشجرة (مشدد بنقطة). اللاعب الذي يبدأ اللعبة ، يختار واحد من طريقين لكي يصل الى المفترق التالي. في المرحلة التالية يختار اللاعب الثاني واحد من الطريقين للوصول الى المفترق التالي. هكذا يواصلا اللعب، حتى يصل الى واحد من نهايات فروع الشجرة. اذا كان في نهاية هذا الفرع مسجل الحرف "أ" ، بهذا يكون الفائز هو الاعب الذي ابتدأ اللعب. اذا كان مسجل الحرف "ب" ، يكون الفوز من نصيب الاعب الثاني.

عليكم ايجاد لأي من اللاعبين توجد طريق للفوز صفوا بالكلمات المسار للفوز (استعملوا الكلمات: يمين يسار):

.1



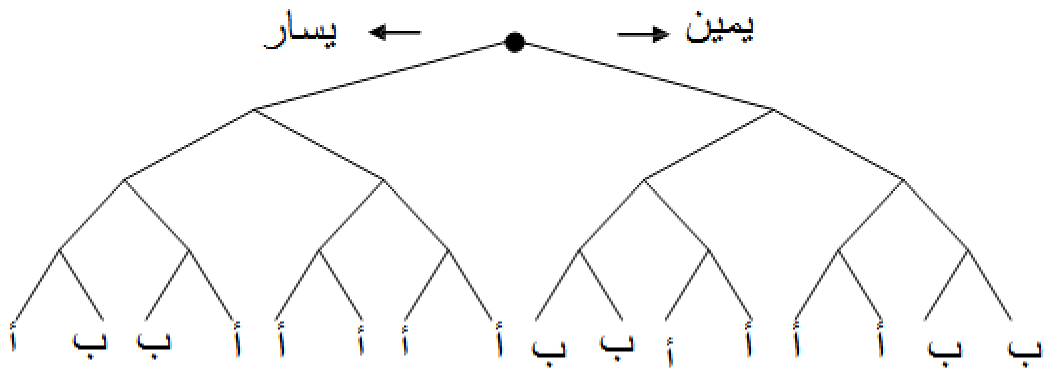
اللاعب الذي يمكنه تخطيط الفوز هو: _____

صف طريقة الفوز: ____

____

____

.2



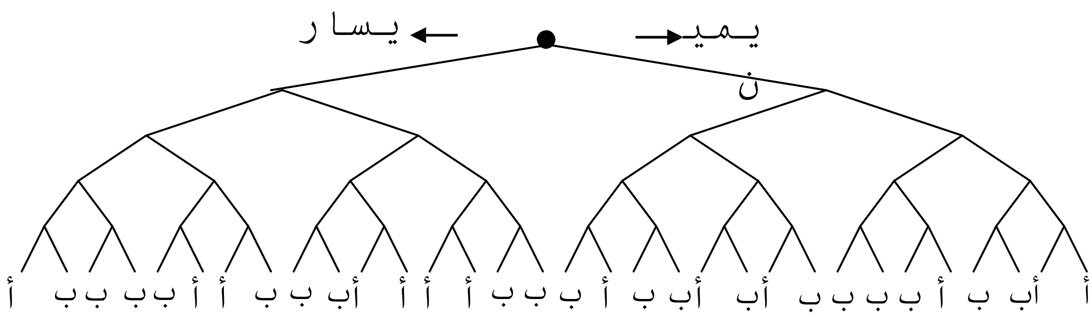
اللاعب الذي يمكنه تخطيط الفوز هو: _____

صف طريقة الفوز: ____

____

____

.3



اللاعب الذي يمكنه تخطيط الفوز هو: _____

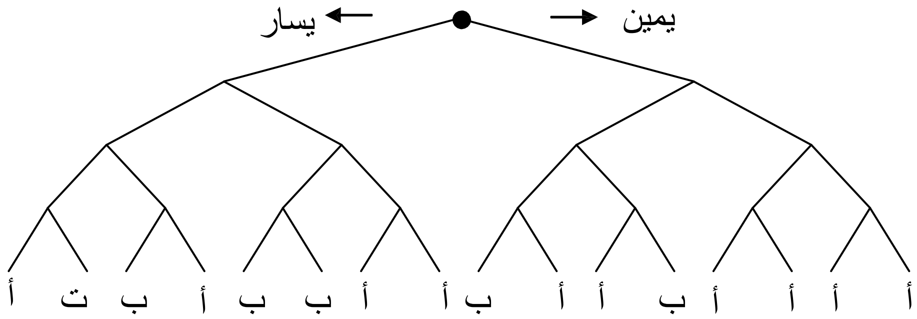
صف طريقة الفوز: ____

____

____

في اللعبة التالية أضفنا في نهاية الشجرة عنصر اضافي. الحرف "ت" يشير الى لعبة تنتهي بالتعادل.

.4



اللاعب الذي يمكنه تخطيط الفوز هو: _____ (املأ اذا اعتقدت انه يوجد لاعب كهذا).

صف طريقة الفوز او اشرح لماذا لا يوجد طريقة: ______________________

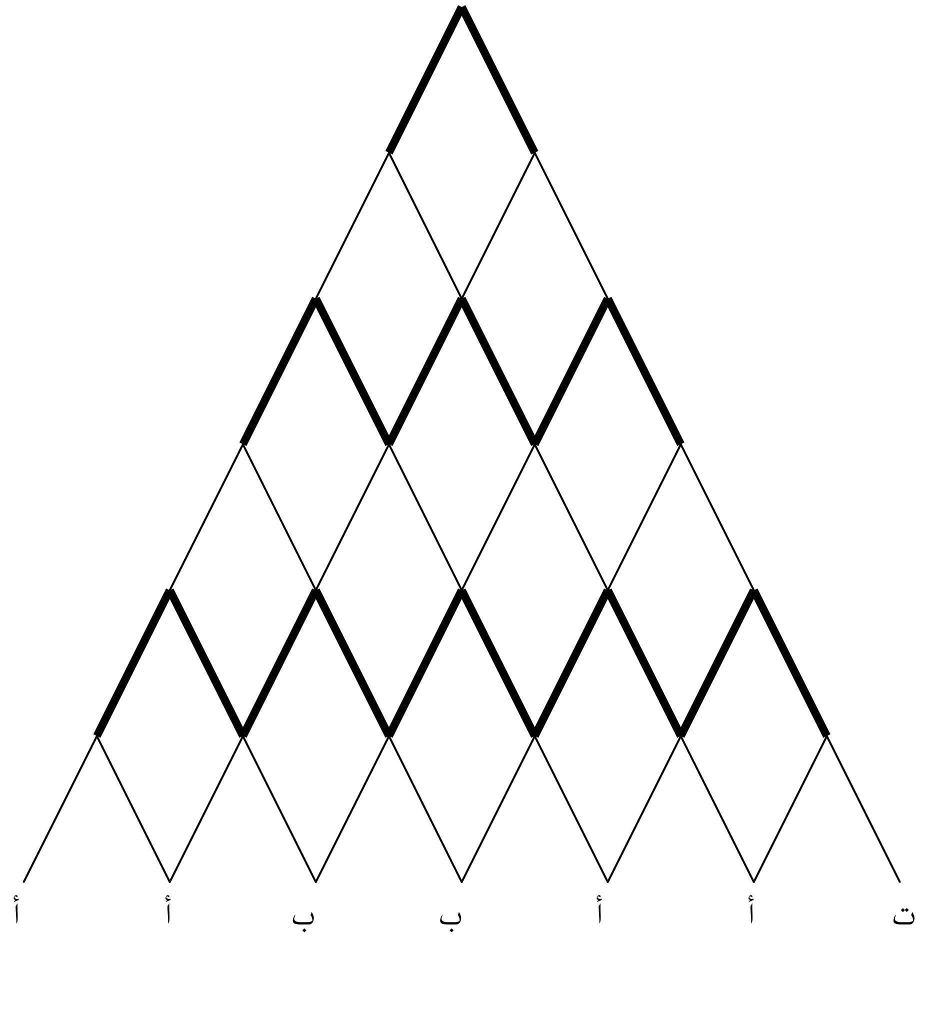
____

____

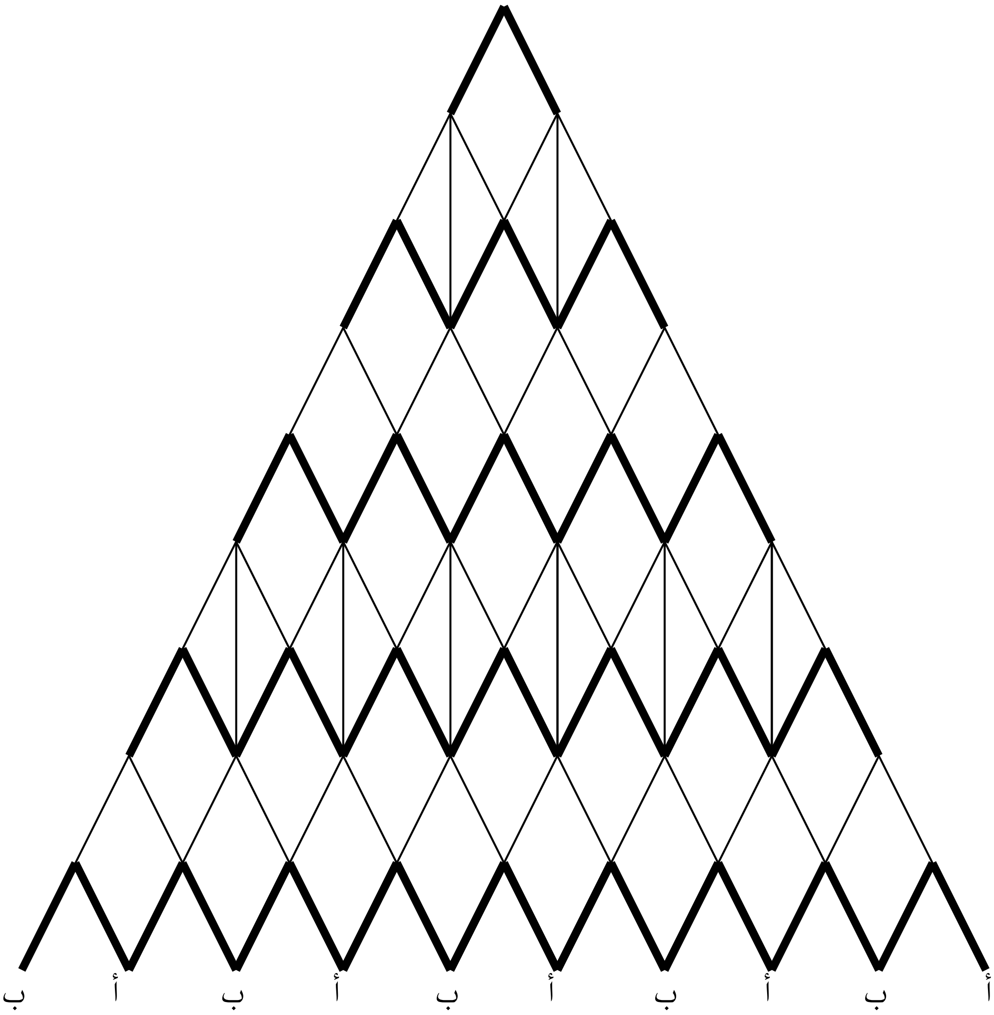
ج. استراتيجيات بلعب أشجار معقدة

أشجار اللعب التالية تبدو أكثر تعقيدًا من سابقاتها. الفروع فيها تندمج بعضها ببعض. كما في اللعب السابقة، اللاعب "أ" هو الذي يفتتح اللعبة. في كل لعبة عليكم اكتشاف من من بين اللاعبين له مسار للفوز باللعبة. كذلك عليكم ايجاد هذه الاستراتيجية ومعرفة تفسير ذلك.

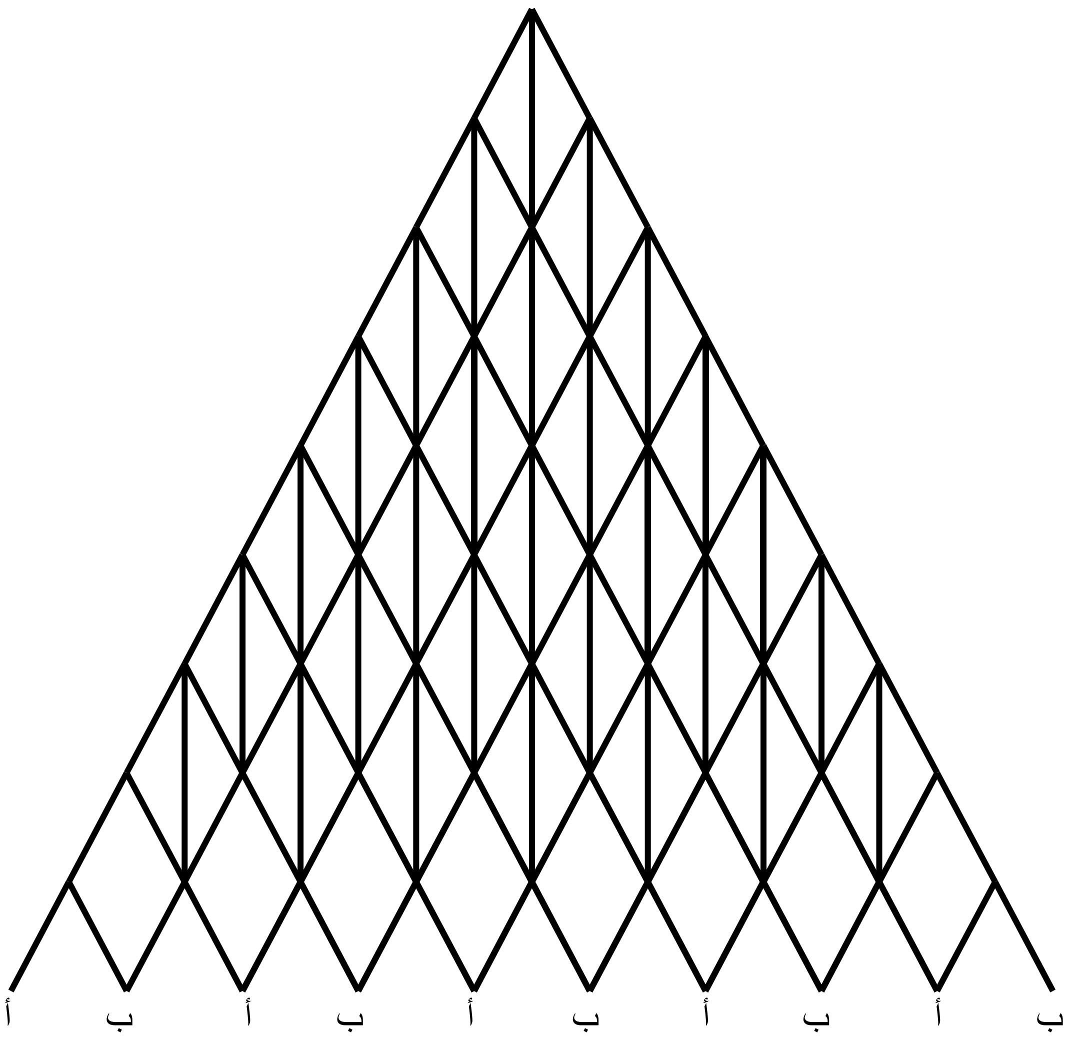
.1



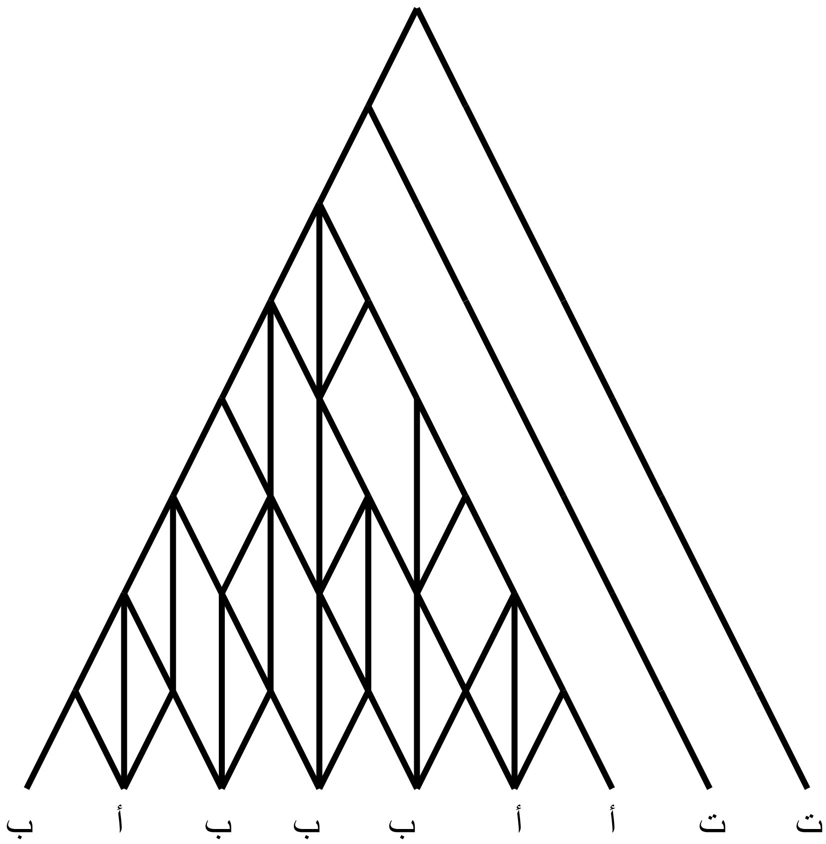
.2



.3



4.



لعبة "التشومب"

في لعبة التشومب، كل لاعب في دوره يقوم باختيار تربيعة ليست ممحية ، وعليه محيها وكل التربيعات التي فوقها وعن يمينها. الخاسر هو اللاعب الذي يضطر الى محي التربيعة المشار اليها بالحرف A. تنتهي هذه اللعبة بفوز واحد من اللاعبين ، ووظيفتكم هي اللعب ومحاولة كشف: لمن من اللاعبين توجد استراتيجية الفوز، وما هي؟

لعبة 1 – لوحة 5X5:

A				

A				

A				

A				

A				

A				

A				

A				

لعبة 2 – لوحة 2X7:

A								

A								

A								

A								

A								

A								

فيبوناتشي

سلسلة فيبوناتشي

1. في بداية الصف السابع تعلمتم خلال موضوع القانونية عن سلاسل أعداد

أ) ابنوا سلسلة أعداد بحسب التعليمات الآتية :
العدد الأول هو 1 وكذلك العدد الثاني.
العدد الثالث هو مجموع العددين الذين جاءا قبله .
أكملوا بهذه الطريقة : كل عدد إضافي في السلسلة يساوي مجموع العددين الذين سبقاه.
سجلوا أول اثني عشر عدد في السلسلة.

1 ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

ب) تمعنوا في السلسلة من اليسار إلى اليمين ، أشيروا إلى كل عدد ثالث.
ما المشترك لكل الأعداد التي أشرتم إليها ؟

ج) أشيروا إلى كل عدد رابع في السلسلة ، من اليسار إلى اليمين . ما المشترك لكل الأعداد التي أشرتم إليها ؟

د) كل عدد خامس في السلسلة هو من مضاعفات العدد 5 . أعطوا أمثلة إلى كل عدد خا في السلسلة ، من اليسار إلى اليمين . ما المشترك لكل الأعداد التي أشرتم إليها ؟

____

ه) مجموع مربعات كل عددين متتاليين في السلسلة هو دائمًا عدد آخر في السلسلة .
أعطوا 3 أمثلة : ____

و) على ماذا ينقسم بدون باقٍ مجموع كل عشر أعداد متتالية في السلسلة ؟ __________________________
أعطوا أمثلة:

____

____

السلسلة المهمة التي بنيتم وبحثتم فيها قليلاً تسمى "سلسلة فيبوناتشي"
وهي على اسم عالم الرياضيات ليوناردو فيبوناتشي.
وُلد ليوناردو فيزنو فيبوناتشي في مدينة بيزا في ايطاليا كما يبدو في سنة 1175 لعائلة غنية.
وعندما أُرسل أبيه إلى الجزائر ليشغل رجل جمارك من قبل مدينة بيزا ، أخذ معه ابنه . وفيما بعد زار فيبوناتشي ألقسطنطينية ، مصر، سوريا ، صقليا وبروفينس.
تعلم فيوناتشي الرياضيات على يد معلمين عرب في مصر ، وكان يقظًا للسهولة التي نجح فيها التجار إدارة حساباتهم ، وذلك لأنهم استعملوا طريقة الحساب الهندية العربية والتي بها 10 أرقام من 0 إلى 9 ، الطريقة المستعملة حتى اليوم .
حتى تلك الفترة كان من المتبع في أوروبا إدارة الحسابات بطريقة الأرقام الرومانية.

فيبوناتشي

وعند عودته إلى ايطاليا سنة 1202 كتب فيبوناتشي كتابه المهم جدًا Liber Abaci . في هذا الكتاب عمل في الجبر ونشر استعمال طريقة الحساب بحسب الاساس 10 لحساب الأعداد الصحيحة والكسور .
كعادة كل التجديدات الكثيرة كذلك تجديد فيبوناتشي لم يقبل مباشرة ، وانما فقط في القرن ألـ 15 أصبحت هذه الطريقة نهجًا للجميع.
افتتح فيبوناتشي كتابه في الكلمات الآتية : "الأرقام التسعة الهندية هي: 9 ، 8 ، 7 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1" .
بواسطة الأرقام التسعة هذه وبإضافة الرقم صفر يمكن كتابة كل عدد.
بالاضافة إلى ذلك ، استعمل فيبوناتشي الاعدادا السالبة ، عمل في حل معادلات ، وكان الأول الذي سجل الكسر بالطريقة التي فيها خط الكسر يفصل بين البسط والمقام.
كتاب مهم جدًا آخر نُسب إلى فيبوناتشى هو: Geometria Practica لتعليم الهندسة الإقليدية .

2. حاولوا أن تفكروا أنكم تعيشون في فترة فيبوناتشي (في القرن ألـ 12) وعليكم تنفيذ بعض الحسابات .
تمرّنوا في طريقتي الحساب : الرومانية والعشرية .
قيسوا المدة الزمنية التي تحتاجونها لتنفيذ الحساب في كل واحدة من الطريقتين.
فيما يلي عددان : العدد الأول : MMCCCXXI والثاني : MMCDXLIX

أ) اجمعوا العددين بالطريقة الرومانية :

ب) اكتبوا العددين بالطريقة العشرية ، ثم اجمعوا العددين .
MMCCCXXI ______________________
MMCDXLIX ______________________

ج) سجلوا تمرين ضرب أو قسمة مع نفس العددين بالطريقتين ، واحسبوا

حساب بالطريقة العشرية	حساب بالطريقة الرومانية

د) ما هو استنتاجكم بالنسبة لطريقة للحسابات والزمن المطلوب؟ ______________________

* من نسي قيمة الرموز في الطريقة الرومانية يمكنه الاستعانة بقيم "الأرقام الرومانية" في موقع ويكبيديا.

فيبوناتشي

سلسلة فيبوناتشي في عالم الاحياء

1. تسجيل السكان في مستوطنة الارانب .

فيما يلي سلسلة أعداد فيبوناتشي 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 ...

ماذا الذي وجّه فيبوناتشي "لإيجاد " تتابع هذه الأعداد ؟

حاول فيبوناتشي حساب وتيرة تكاثر مجموعة أرانب حسب الفرضيات التالية:

شهر هو الزمن اللازم لزوج أرانب للبلوغ. عند وصول زوج الارانب لعمر شهرين ينجب زوج أرانب جديد ، وعندها يكون زوج أرانب قديم وزوج أرانب جديد. (على فرض أنه لا يموت أي زوج من الارانب في فترة التجربة). في البداية يكون في مستوطنة الارانب زوج أرانب صغير . في الشهر التالي يصبح الزوج الصغير زوجًا بالغًا (هذان هما الحدان الاولان في السلسلة) . في الشهر التالي يكون في المستوطنة زوجان – واحد بالغ وآخر صغير . في الشهر التالي يوجد 3 أزواج – واحد الذي كان بالغًا في الشهر السابق وله ابنان (زوج جديد) ، وآخر الذي كان صغيرًا أصبح بالغًا .

نعرض المراحل بطريقتين : بالكلمات وبالرسم .

زوج صغير نرمز له بالحرف ص (صغير) وزوج بالغ نرمز له بالحرف ب (بالغ).

في كل شهر يتم التبديلات الآتية لكي ننتقل للشهر القادم : ص ← ب

ب ← ب ص

فيما يلي دورات التكاثر الاربعة الاولى. أكملوا خمس دورات إضافية:

الشهر	أزواج أرانب	عدد الازواج
أ	ص	1
ب	ب	1
ج	ب ص	2
د	ب ص ب	3
هـ		
و		
ز		
ح		
ط		

أ) ما العلاقة بين سلسلة الاحرف في شهر ما والأحرف في الشهر القادم ؟

____

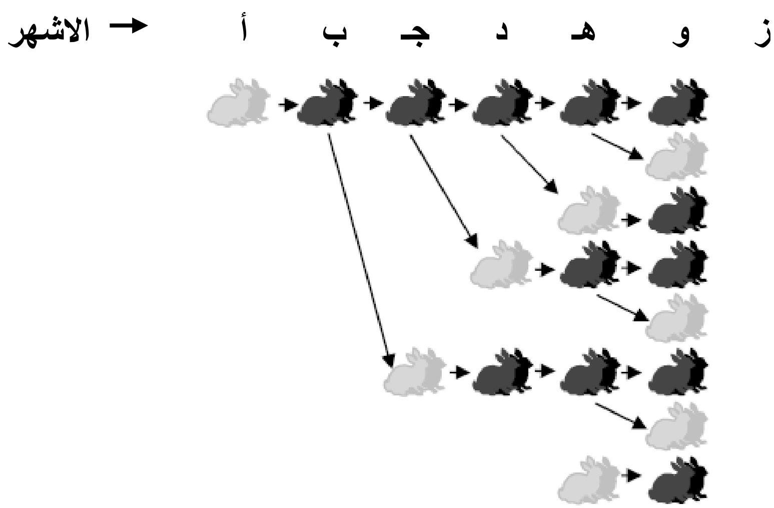
ب) احسبوا عدد أزواج الارانب بعد مرور 12 شهر ط استعينوا بنموذج الاحرف .

____

فيبوناتشي

سلسلة فيبوناتشي في عالم الاحياء

ج) نستعين بنموذج تخطيطي.
كل عمود يمثل شهر .
الارنب باللون الفاتح يمثل زوج أرانب صغير.
الارنب باللون الغامق يمثل زوج أرانب بالغ.
ارسموا الارانب في الشهر السابع .
كم أرنبًا يكون ؟ ________________________



سلسلة فيبوناتشي في عالم الاحياء

2. ماذا يختفي وراء مملكة النحل

كم حقيقة من الممكن أنكم لا تعرفون عن النحل ، تلك الحشرات الاجتماعية التي تعطي فوائد كثيرة للإنسان .

في خلية النحل على الملكة وضع البيض ، العاملات تنتج النحل وتهتم بعناية الملكة والذكور.

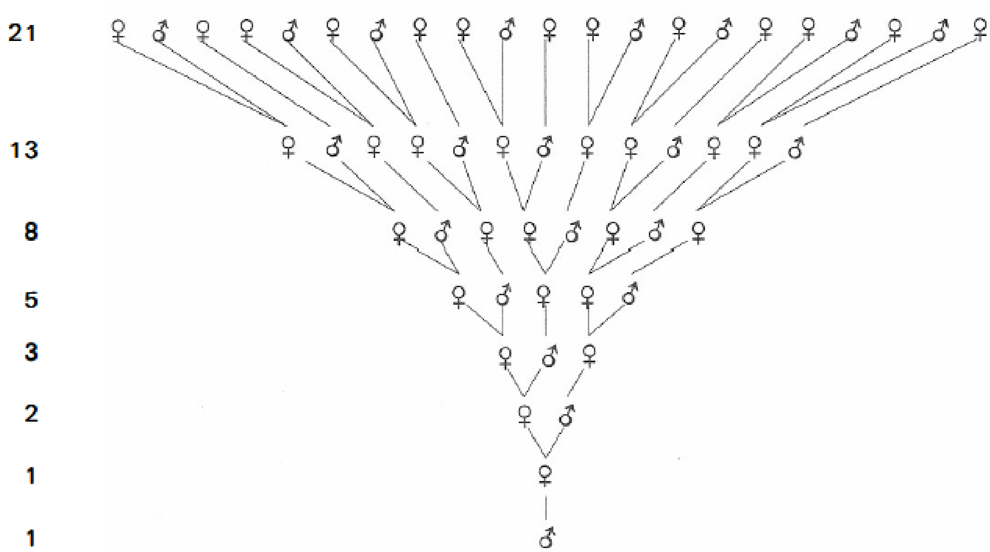
بشكل خاص ، الذكر ينتج من بيضة غير مخصبة تضعها الملكة ، بينما العاملات تنتج من بيضات مخصبة . هذا يعني أن للذكر والد واحد – أم بينما للملكة والعاملات يوجد والدان اثنان – ذكر وأنثى.

أ) تمعنوا في الشكل الذي يصف شجرة النسب لذكر النحل. في أسفل الشجرة يوجد الذكر ، وهو الحد الأول في السلسلة . كم والد يوجد له في الجيل السابق ؟ كم جد يوجد له ؟ ومن هم؟

سجلوا عدد الاباء والأمهات الذين سبقوه ل 7 أجيال أخيرة.

ب) تمعنوا في شجرة النسب للنحلات. كم نحلة في كل جيل ؟ ماذا تذكركم هذه الأعداد ؟

ج) أضيفوا جيلين اثنين مع المحافظة على القاعدة : لكل ذكر يوجد والد واحد ولكل أنثى يوجد زوج والدين.
ما هو عدد النحل في كل جيل من الاجيال التي أضفتموها ؟ هل هي أيضًا أعدادًا في سلسلة فيبوناتشي ؟



♂ الرمز المتبع للذكر ♀ الرمز المتبع للأنثى .

فيبوناتشي

لمسة الذهب

وجد فيبوناتشي الأعداد التي تبني السلسلة من خلال بحثه لمسألة الارانب ، ولكنه لم يعرف كل صفات هذه السلسلة كما اكتشفت فيما بعد . في القرن ألـ 19 ، أعطى العالم الرياضي لوكاس لهذه السلسلة الاسم "سلسلة فيبوناتشي " واستعملها لبحثه المتعلق بالأعداد الاولية .
عرّف لوكاس سلسلة مشابهة ، سُميت باسمه "سلسلة لوكاس" والتى حدودها: ... 29 ,18 ,11 ,7 ,4 , 3 , 1

1. أ) ما هي القانونية في سلسلة لوكاس؟ ______________________________

ما العلاقة بينها وبين سلسلة أعداد فيبوناتشي؟ ______________________________

____

ب) كم يكون الحد ألـ 8 ؟ ______________ الحد ألـ 10 ؟ ______________

2. النسبة الذهبية

أ) استعينوا بالحاسبة وأكملوا الجدول الآتي :

زوج أعداد فيبوناتشي متتالي	خارج قسمة العددين
5, 3	5:3 =
5 , 8	8:5 =
8 , 13	13:8 =
13 , 21	21:13 =
21 , 34	34:21 =
55 , 89	89:55 =
89 , 144	144:89 =
144 , 233	233:144=
233 , 377	377:233 =

ب) ماذا اكتشفتم ؟ ______________________________

ج) اختاروا زوجًا آخر لعددين متتاليين في السلسلة . ______________

هل هما يحققان نفس القانونية؟ هل هذه الظاهرة موجودة أيضًا في سلسلة لوكاس؟

____

إذا أحسنتم الحساب ، من المؤكد بأنه كلما تقدمنا في السلسلة ، خارج قسمة كل عددين متتاليين يقترب إلى العدد 1.618

هذه النسبة بين كل عددين متتاليين في سلسلة فيبوناتشي تسمى "النسبة الذهبية"

كما يبدو يمكن حساب هذه النسبة بطرق أخرى أيضًا ، كما يتضح فيما بعد .

نرمز "للنسبة الذهبية" بالحرف اليوناني Φ .

فيبوناتشي

لمسة الذهب

د) ادخلوا إلى موقع ويكبيديا، لموضوع " النسبة الذهبية" ، وأجيبوا عن الاسئلة.

النسبة الذهبية هو عدد غير نسبي ، ماذا يعني ذلك ؟

من اكتشف أولاً النسبة الذهبية ؟ قبل كم سنة ؟

أية أسماء أخرى توجد للنسبة الذهبية؟

لماذا من المتبع الاشارة إلى النسبة الذهبية بالحرف اليوناني Φ ؟

اكتبوا لصديق ماذا تتذكرون من الدرس

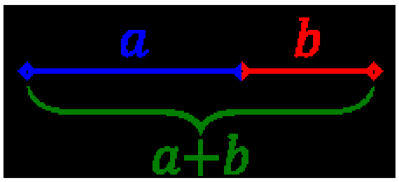
ارسل

فيبوناتشي

النسبة الذهبية ، هندسة وفن

النسبة الذهبية ، القطع الذهبي ، المستطيل الذهبي

عمل اليونانيون كثيرًا في النسب بين أطوال القطع . كما بحثوا في تساوي نسب من نوع خاص والذي له مكانة كبيرة في الهندسة والفن، وسمي "النسبة الذهبية " أو " القطع الذهبي " .



ما هي " النسبة الذهبية " ، وكيف يمكن الوصول اليها ؟

أمامكم قطعة مكونة من قطعتين a و b ، طول القطعة a+b .

النسبة الذهبية ناتج من القاعدة $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$

بكلمات أخرى، a و b يحققان النسبة الذهبية إذا كان النسبة بين مجموع طولي القطعتين إلى طول القطعة الكبيرة بينهما تساوي النسبة بين طول القطعة الكبير إلى طول القطعة الصغيرة بينهما.

كيف نحسب العدد الذي يمثل النسبة الذهبية؟

نفرض أن : b=1

نعبر عن طول القطعة a بالمتغير x ، فنحصل على المعادلة : $\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1}$

بعد التوسيع بالمقام المشترك نحصل على المعادلة الآتية : $x^2-x-1=0$

حل هذه المعادلة هو : ...x= 1.618034 ، والذي يسمى "النسبة الذهبية "

الغريب والعجيب ، أننا حصلنا على نفس العدد سابقًا في سلسلة فيبوناتشي .

1. أ) اختاروا زوج أعداد متتاليين في سلسلة فيبوناتشي . أشيروا للعدد الكبير بينهما بلحرف a والصغير بالحرف b .

____

ارسموا القطعة المبينة من هاتين القطعتين.

عوضوا العددين في القاعدة المسجلة أعلاه ، وافحصوا هل النتيجة تقترب من النسبة الذهبية.

(كلما تختارون زوج أعداد أكبر ، كلما اقتربتم من الجواب الاكثر دقة) .

____

ب) ارسموا قطعة طولها 21 سم. قسموا القطعة إلى قطعتين (غير متساويتين بطولها) وذلك بالتأشير إلى نقطة، وذلك بحيث إذا قسمتم طول القطعة كلها على طول القطعة الاطول من بينهما تكون النتيجة مساوية لخارج قسمة طول القطعة الاطول على طول القطعة الاقصر.

أين وضعتم نقطة التقسيم ؟ ____________________________________

ج) أعيدوا التمرين السابق عندما تكون طول القطعة كلها 34 سم.

إرشاد استعينوا بسلسلة فيبوناتشي.

فيبوناتشي

النسبة الذهبية ، هندسة وفن

"المستطيل الذهبي"

قدّر اليونانيون النسب المتكاملة بين الاطوال (التناسب) لشكل سُمي المستطيل الذهبي.

- أمامكم صورة للهيكل المقدس المسمى البارثينون.

ابحثوا في المصادر المكتوبة أو في مصدر إنترنتي .

أين يوجد هذا الهيكل المقدس ؟ ______________

لأي إله أو آلهة يونانية بُني هذا الهيكل ؟

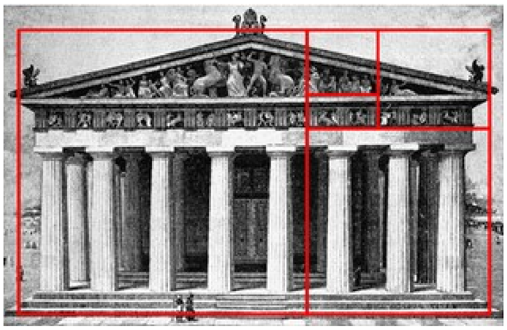
____

- حوطت صورة الهيكل بمستطيل.

قيسوا طول المستطيل ، قيسوا عرض المستطيل ،

اقسموا الطول على العرض .

ما هو العدد الذي حصلتم عليه؟ ______________________________



واجهة هيكل البارثينون اليوناني ، والنسبة الذهبية في الواجهة

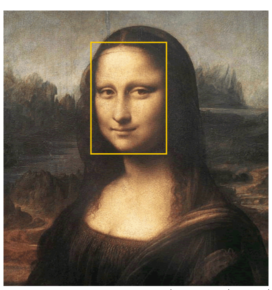
أيضًا بين أطوال أضلاع هذا المستطيل توجد نسبة معيّنة. بالنسبة لليونانيين كان "المستطيل الذهبي " قمة الجمال والكمال.

هذا الجمال طُبق في الفن المعماري الكلاسيكي ، بأبنية مختلفة ، من بينها البارثينون.

"المستطيل الذهبي " هو الشكل المشهور جدًا في عالم الفن ، الفن المعماري و الحياة اليومية. دلت الابحاث على أن أناس من ثقافات مختلفة يفضلون هذا المستطيل على مستطيلات بتناسب آخر . في الرسم المشهور لليوناردو ديفنيتشي "الموناليزا " من الممكن احاطت وجهة السيدة بـ "المستطيل الذهبي ". (انظر الشكل).

اليوم أيضًا يستعمل " المستطيل الذهبي " في فن البناء و فن الرسم والخطوط .

عدد من المبني الحديثة بُنيت في العالم وفق النسبة الذهبية .



الموناليزا – ليناردو دي فينيتشي

2. ارتفاع بناية الامم المتحدة هو 152 م ، وعرضه 95 م . ما هي النسبة بين الارتفاع والعرض ؟
لأي عدد يقترب ؟ ____

3. قيسوا بدقة طول وعرض كل واحد من البطاقات الممغنطة الموجودة لديكم، واحسبوا النسبة بين الاطول .
هل يقترب العدد من النسبة الذهبية ؟ ______________________________________

4. ارسموا مستطيلين مختلفين ، بحيث تكون النسبة بين الطول العرض لكل منهما قريبة من النسبة الذهبية ؟
بماذا يمكنكم الاستعانة لكي تحصلوا بسرعة على القياسات الصحيحة؟ ________________________

فيبوناتشي

النسبة الذهبية ، هندسة وفن

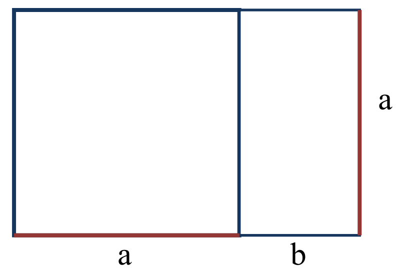
5. خذوا ورقة وارسموا عليها "المستطيل الذهبي " بحيث يكون طوله 21 سم وعرضه 13 سم .

اقطعوا من المستطيل مربع طول ضلعه 13 سم .

أي شكل يتبقى ؟ _________ ما هي أطواله ؟ _____________

هل الآن أيضًا تتحقق النسبة الذهبية بين الطول العرض؟ __________________________

عودوا على المراحل مرة أخرى .



6. نفذوا التعليمات وابنوا أنتم أيضًا مستطيل ذهب .

طول قطعة الوحدة يساوي 10 سم.

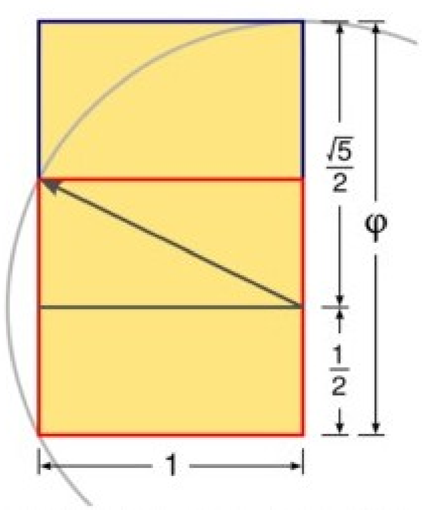
أ) ابنوا مربعًا هو قطعة وحدة واحدة.

ب) ارسموا مستقيمًا موازيًا للقاعدتين المتقابلتين ، بحيث ينصف المربع إلى مستطيلين، أطوال كل مستطيل 1 وحدة × 0.5 وحدة (10سم × 5 سم).

ج) ثبتوا رأس الفرجار في الطرف الايمن للمستقيم الذي رسمتموه ، افتحوا الفرجار وارسموا دائرة نصف قطرها يساوي قطر المستطيل . القوس الذي رسمتموه يلتقي مع امتداد ضلع المربع . أكملوا الأضلاع للمستطيل الجديد .

د) قيسوا أطوال الأضلاع ، اقسموا طول المستطيل الجديد على عرضه .

ما هو العدد الناتج؟ _________________________________

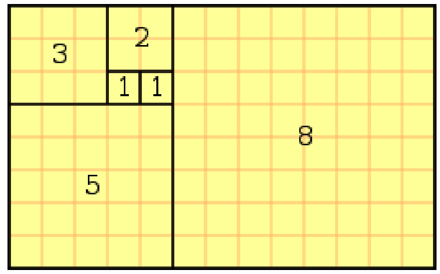


فيبوناتشي

عن لولبيات ، نجوم وصور أخرى

1. بناء "اللولب الذهبي "

أ) أمامكم شكل مستطيل ، انسخوه على ورقة .



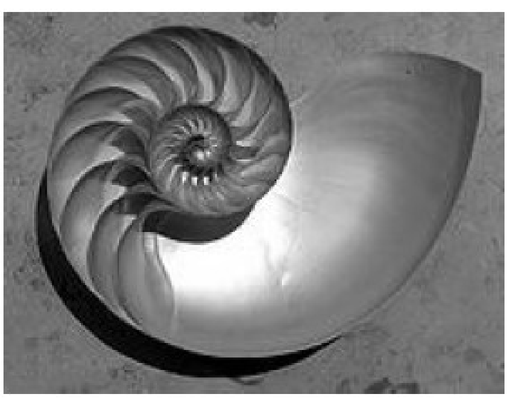
ب) هذا المستطيل مبني من مربعات، بداية من المربع الداخلي الصغير الذي طول ضلعه 1 سم ، وبجانبه مربع آخر بنفس القياسات. كيف تم بناء المربع التالي ؟ وذلك الذي يأتي بعده ؟

ج) أكملوا البناء وتكبير المستطيل. أي مربع تضيفون الآن ؟ وما هي قياساته؟

د) ضعوا رأس قلم الرصاص على الزاوية اليسرى العلوية للمربع الداخلي من جهة اليسار (1×1). ارسموا قوسًا محدبًا بين رأسين متقابلين في كل مربع، واستمروا إلى المربع التالي الذي يحد المربع الأول . مُروا عي كل الشكل من مربع إلى مربع من المركز باتجاه الخارج.

توصيل كل الاقواس يُنتج لكم اللولب الذهبي. هذا الشكل يظهر في الطبيعية مثل الاصداف والحلزونات ، والأناناس ، كوز الصنوبر وزهرة عباد الشمس.

متحف جونجهايم في نييورك



صدفة حلزون ناتيلوس مبينة بشكل لولبي

فيبوناتشي

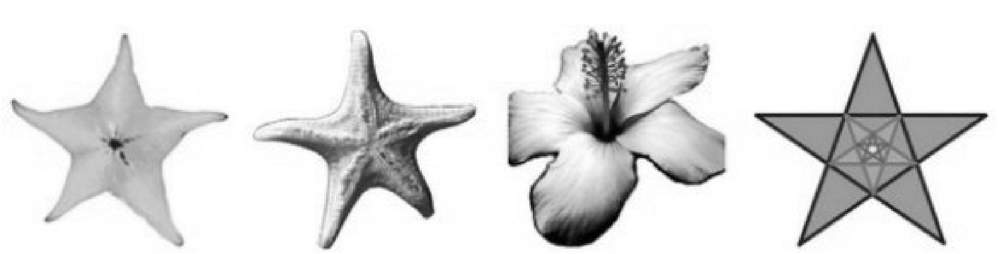
عن لولبيات ، نجوم وصور أخرى

البنتغرام

الرمز السري لفيثاغوروس ومجموعته هو البنتغرام . وهو نجم خماسي مبني من خمسة مثلثات متطابقة . يعتبر البنتغرام بالنسبة لليونانيين شكل له متكامل من حيث الجمال ونسبة القياسات. المثلثات في البنتغرام تحقق النسبة الذهبية.

معنى الكلمة اليونانية بنتغرام هو "خمسة خطوط" . وصف البنتغرام موجود في الكتب القديمة لحكماء ما بين النهرين، التي كتبت قبل 5000 سنة. البابليون واليونانيون نسبوا للبنتغرام قوى فوق طبيعية وقدرة سحرية ، اعتاد كثيرون في القدم لبس حلي تحتوي على البنتغرام وذلك للحماية من ارواح الشر .

لوجود نسبة القياسات الخاصة في البنتغرام ، يمكن رسمه في داخل نفسه عدد لا نهائي من المرات.



هذا الشكل يظهر في الطبيعة أيضًا. زهرة الايبسكوس، نجم البحر ، ومقطع ثمرة الكرمبولا ، لكلها شكل نجمة خماسية.

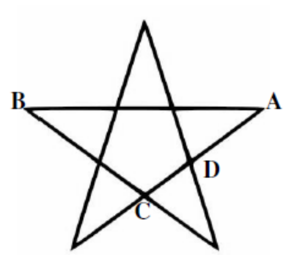
2. ادخلوا الى موضوع " بنتغرام " في الويكيبيديا وأجيبوا عن الاسئلة :

أ) كيف سُمي البنتغرام في العيرية؟ ________________________________

ب) استعمل البنتغرام رمزًا لمدينة مشهورة في السنوات 300 – 150 ق.م . أية مدينة؟ __________

في علم أي دول اليوم يظهر البنتغرام ؟ ________________________________

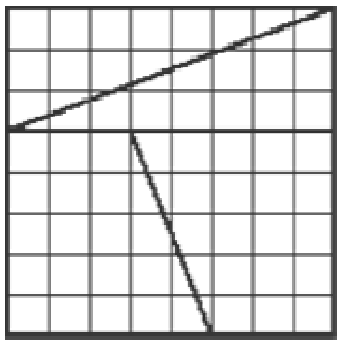
ج) احسبوا النسب : $\frac{AB}{BC}, \frac{BC}{AD}$ و $\frac{AD}{CD}$ على ماذا حصلتم ؟ ______________________

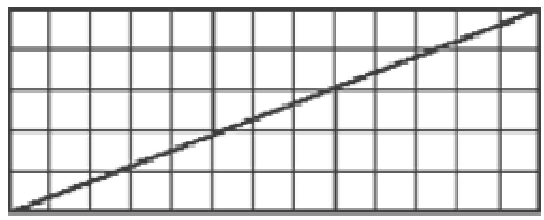


عن لولبيات ، نجوم وصور أخرى

3. أي سحر !

جاء في كتاب "أعداد سحرية " لإيلي ميطاب لغز مشهور والمنسوب لصاحب الالغاز الامريكي المشهور سام لويد الابن.





أ) الشكل الايسر هو مربع . ما هو طول ضلعه؟ ____________ ما هي مساحته ؟ ______________

ب) ارسموا على ورقة مربعات مربعًا مشابه وارسموا خطوط القص.

ج) قصوا المربع بحسب الاجزاء المشار اليها ، ثم أعيدوا ترتيبها لتحصلوا على مستطيل.

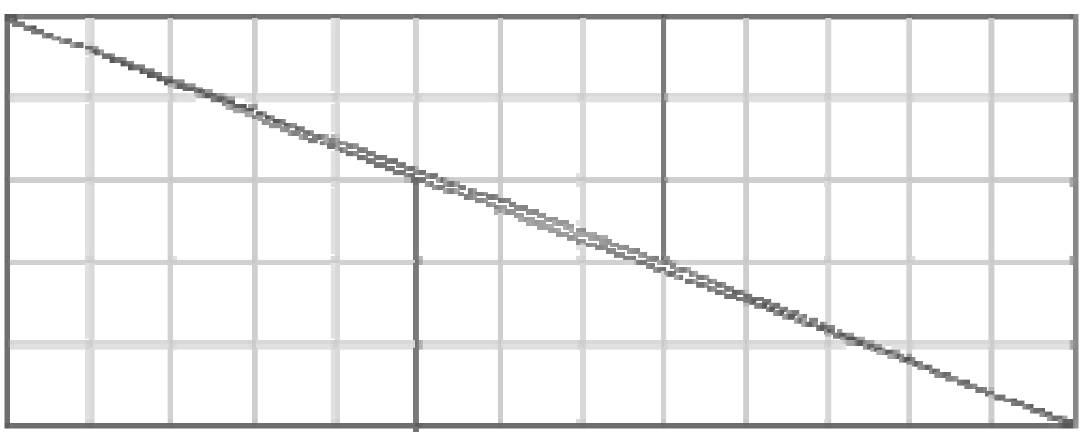
د) ما هو طول المستطيل؟ ______________ ما هو عرضه ؟ __________ ما هي مساحته؟ _______

ه) ما المفاجئ ؟ ____

و) ما العلاقة مع أعداد فيبوناتشي؟ _____________________________________

ز) تمعنوا في الشكل التالي، هل هذا يساعدكم في تفسير المساحة التي اختفت؟

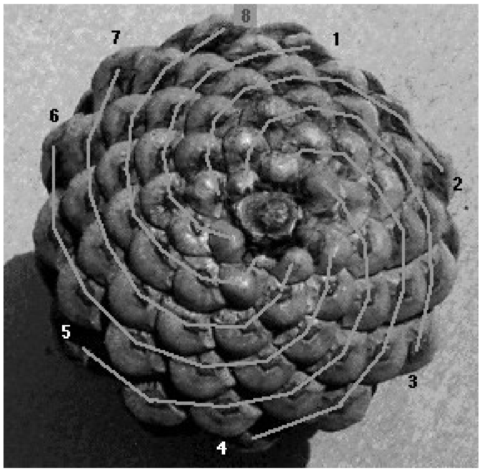
____



فيبوناتشي

عن لولبيات ، نجوم وصور أخرى

4. فيبوناتشي في الطبيعة



أ) أمامكم صورة لكوز صنوبر.

قشور الصنوبر مرتبة بشكل لولبي باتجاهين.

في الصورة مُبيّن اللولبيات التي هي باتجاه دوران عقارب الساعة .

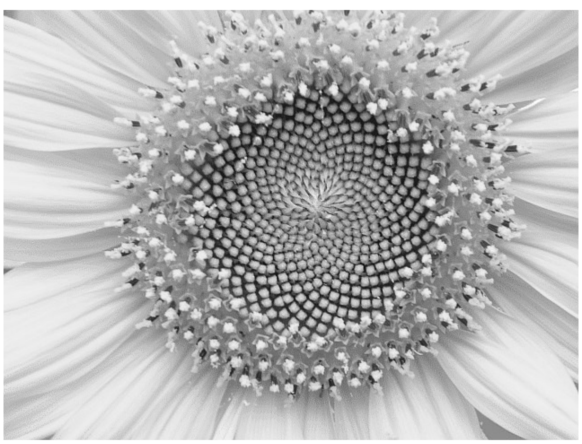
كم لولب مُبيّن في الصورة ؟ ________________

أشيروا بواسطة قلم تلوين اللولبيات التي هي بعكس دوران عقارب الساعة. كم لولب وجدتم ؟ ________

هل هذه الأعداد معروفة لديكم سابقًا ؟ أين ؟

____

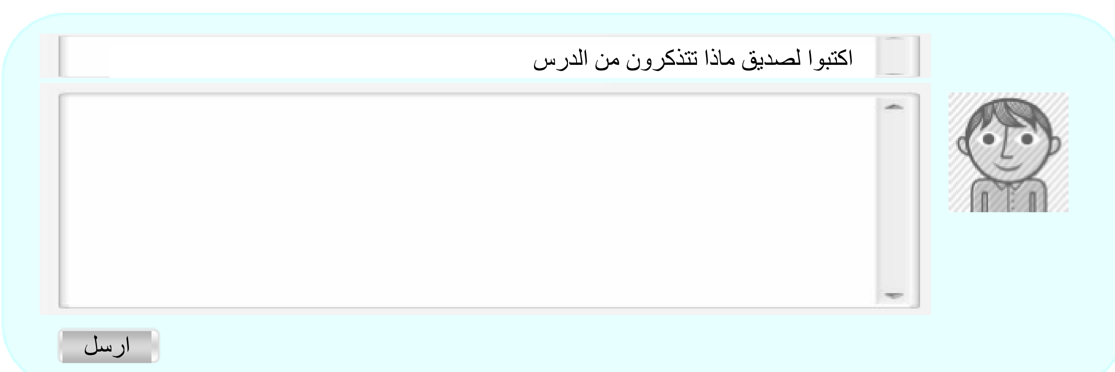
ب) الازهار في قرص عبّاد الشمس منتظمة في لولبيات . أشيروا بقلم حبر كل اللولبيات في اتجاه دوران عقارب الساعة ، واطلبوا من صديق أن يشير على الرسم لديه كل اللولبيات التي هي بعكس دوران عقارب الساعة.



كم لولب عددتم؟ ______________

هل العددان اللذان نتجا لديكما هما عددان متتاليان في سلسلة فيبوناتشي؟

____



الاعداد الحقيقية

المقدمة

ما هو العدد؟

هل الكسور اعداد؟

حاولوا ان تتخيلوا عالم من دون اعداد. ماذا سيحصل؟

في هذا الفصل سوف نعمق معرفتنا في **عالم الاعداد.**

في بداية البشرية بدءوا بالتعامل بالأعداد الطبيعية (... ،3 ،2 ،1) واستعملوها لعد العناصر في مجموعة. لذلك استعملوا احجارًا صغيرة من اجل جمع وطرح اعداد.

بعد ذلك بدءوا بالتطرق للأعداد ككائنات مجردة. عالم الاعداد أثار الكثير من الناس ، والفلاسفة الذين بدءوا ببحث هذا العالم المثير. في كثير من المرات نسبت للاعداد خصائص "صوفية" وحاولوا تفسيرها من خلال ظواهر طبيعية. فعلى سبيل المثال، فيثاغوروس – فيلسوف ورياضي يوناني ولد عام 570 ق.م. وأنشأ مدرسة المعروفة باسم "المجموعة الفيثاغورية" – أعطى معنى للأعداد وربطها بمصطلحات : "لا يتجزأ" (العدد 1) ، "سماء وأرض " (العدد 2) ، "طبيعة ساكن، نبات، حيوان" (العدد 3) ، و"عناصر اساسية – نار، ماء، هواء وتراب" (العدد 4) . مجموع الاعداد 1+2+3+4 كان العدد الكامل 10.

ومن ثم بدأوا استعمال العمليات الحسابية – جمع، طرح، ضرب وقسمة – وكانت الحاجة لتعميق المعرفة بعالم الاعداد. عرفوا حينها بأن حاصل جمع أو ضرب عددين طبيعيين يكون دائماً عدد طبيعي ايضا، لكن نتيجة طرح أو قسمة عددين طبيعيين ليس بالضرورة عدد طبيعي. مثلا، العدد الناتج من عملية طرح 3 من 1 ليس عددًا طبيعيًا.

قبل البدء باستعمال الاعداد السالبة، كان بالامكان تخيل العدد (2-)، ولكن لم يكن معنى لهذا العدد. وجود الاعداد السالبة كان بشكل نظري فقط لمدة تفوق الالفي عام.

ناتج قسمة 1 على 3 لا ينتمي لعالم الاعداد الطبيعية، إعطاء معنى **للكسر** يرجع أساسا إلى استخدام القياسات: استعمال وحدات الزمن، وحدات الطول، المساحة والحجم وأيضا بسبب الحاجة إلى تقسيم الوحدات المختلفة لوحدات اصغر منها.

هناك دلائل لاستعمال الكسور منذ مصر القديمة، عام 1600 ق.م.

عمل فيثاغوروس ومجموعته، في مجمل الامور، في تعلم وبحث عالم الاعداد. في تلك الفترة عرفوا الاعداد الصحيحة (موجبة وسالبة) والكسور التي عبرت حينها عن النسبة بين عددين صحيحين.

اعضاء المجموعة الفيثاغورية اكتشفوا صفات عديدة للاعداد، النظرية التي تربط بين اطوال الاضلاع القائمة في مثلث قائم الزاوية وبين طول الوتر هي النظرية الأكثر شهرة ومعروفة باسم "نظرية فيثاغوروس". آمنت المجموعة الفيثاغورية بانه يمكن تفسير اي ظاهرة في العالم بواسطة اعداد صحيحة وكسور- وهذه الاعداد معروفة باسم **الاعداد النسبية**، تلك اعداد يمكن عرضها كنسبة بين عددين صحيحين. يدعي البعض بان احد افراد هذه المجموعة ويدعى هيفاسوس، اكتشف وجود **الاعداد الغير حقيقية** (اعدادلا يمكن عرضها بواسطة عددين صحيحين). أثبت هيفاسوس بأن العدد $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي، وبسبب اكتشافه هذا طُرد هيفاسوس من المجموعة الفيثاغورية، وحتى يقال انه أغرق على يد المجموعة.

الاعداد الحقيقية

مجموعة الاعداد
الاعداد الحقيقية

تعريف:

الاعداد الطبيعية – مجموعة الاعداد ...5، 4، 3، 2، 1.

من المعتاد التعبير عن مجموعة الاعداد الطبيعية بالحرف N

الاعداد الصحيحة - مجموعة الاعداد التي تحتوي على الاعداد الطبيعية، الاعداد الصحيحة السالبة والصفر.

من المعتاد التعبير عن الاعداد الصحيحة بالحرف Z.

عدد نسبي – عدد يمكن التعبير عنه كنسبة بين عددين صحيحين. من المعتاد التعبير عن مجموعة الاعداد النسبية بالحرف Q.

مثال: $\frac{7}{8}$ ، $\frac{1}{3}$ هي اعداد نسبية.

ملاحظة: مجموعة الاعداد العشرية هي جزء من المجموعة Q. واحيانا يعبر عنها بالحرف D.

مثال: 0.5 هو عدد نسبي، لانه من الممكن التعبير عنه بالكسر $\frac{1}{2}$.

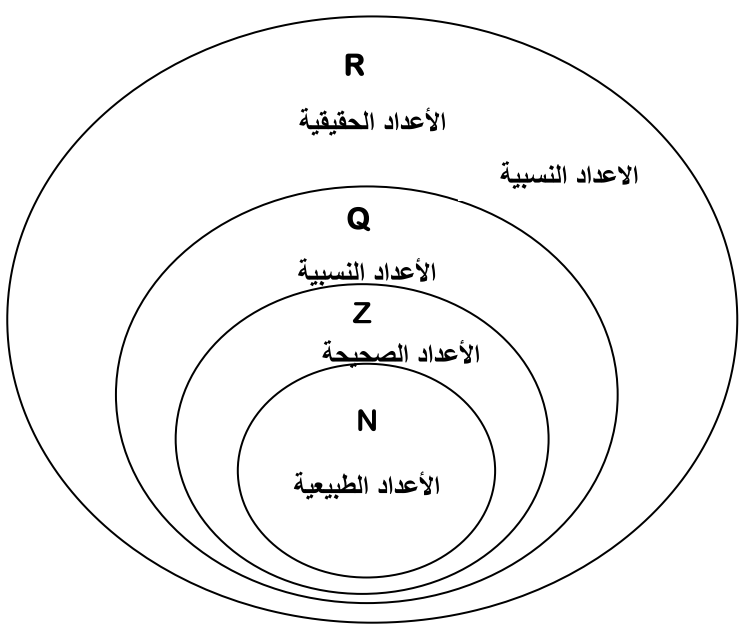
عدد غير نسبي – عدد لا يمكن التعبير عنه كنسبة بين عددين صحيحين.

مثال: سنبرهن في وقت لاحق ان العدد $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي.

عدد حقيقي – هو عدد يمكن التعبير عنه بواسطة نقطة على محور الاعداد.

هذه المجموعة تحتوي على كل الاعداد التي ذكرناها حتى الان: اعداد طبيعية، اعداد صحيحة، اعداد سبية وأعداد غير نسبية. من المعتاد التعبير عن الاعداد الحقيقية بالحرف R.

امثلة: $\frac{1}{2}$ ، 3-، 0، $\sqrt{2}$ ، ...7.21221222122221- هي اعداد حقيقية.



الاعداد الحقيقية

مجموعة الاعداد

كي نبرهن ان العدد $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي، نبرهن هنا عدة حقائق في الاعداد الصحيحة.

1. أ) معطى عدد صحيح n. هل العدد 2n زوجي أم فردي؟ ________________________________

ب) هل العدد 2n+1 هو زوجي أم فردي؟ ____

2. أ) معطى عدد زوجي k. هل يوجد عدد صحيح n ، الذي يحقق k=2n؟ عللوا اجابتكم وأعطوا مثالًا؟

____

ب) معطى عدد فردي s. هل يوجد عدد صحيح n، الذي يحقق s=2n+1؟ عللوا اجابتكم وأعطوا مثالًا؟

____

3. أ) معلوم أن k هو عدد زوجي. ماذا يمكننا القول عن العدد k^2؟ اكتبوا برهانًا ، يحتوي على احد التعابير الموجودة في البند 2.

____

____

ب) معلوم أن s هو عدد فردي. ماذا يمكننا القول عن العدد s^2؟ اكتبوا برهانًا ، يحتوي على احد التعابير الموجودة في البند 2.

____

____

4. معلوم أن k^2 هو عدد زوجي. هل يمكن ان يكون k عدد فردي؟ عللوا اجابتكم.

____

____

5. معطى ان $m^2=2k^2$. هل يمكن أن يكون m عدد فردي

اذا أجبتم بنعم اعط مثالا لـ m و k ملائمين. واذا اجبتم بلا، عللوا لماذا؟

____

____

6. أ)ماذا يوجد اكثر: اعداد طبيعية ام اعداد طبيعية زوجية؟ ______________________________

ب) ماذا يوجد اكثر: اعداد طبيعية فردية أم اعداد طبيعية زوجية؟ __________________________

ج) حاولوا حل البنود أ و ب من خلال ملائمة كل عدد طبيعي لعدد زوجي في البند أ، ومن خلال ملائمة كل عدد طبيعي فردي لعدد طبيعي زوجي في البند ب. ____________________________

____

الاعداد الحقيقية

$\sqrt{2}$

يدّعون ان العدد $\sqrt{2}$ هو أقدم عدد غير النسبي.

يوجد عدة تقريبات للعدد $\sqrt{2}$ بواسطة كسور ، مثلاً : $\frac{8119}{5741}$... ، $\frac{99}{70}$ ، $\frac{41}{29}$ ، $\frac{17}{12}$ ، $\frac{7}{5}$ ، $\frac{3}{2}$.

العدد 1.41421356237309504880168872420969807856967187537695
هو $\sqrt{2}$ المقرب حتى خمسون منزلة بعد الفاصلة العشرية.

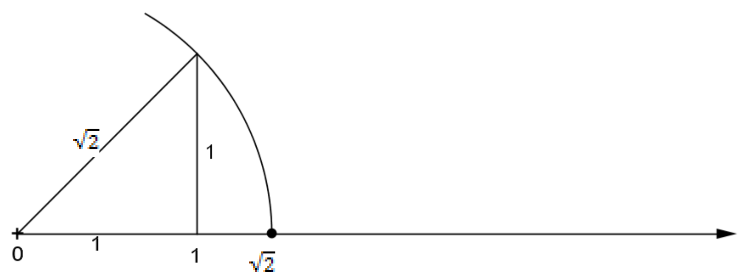
نبين أن العدد $\sqrt{2}$ هو عدد حقيقي بواسطة **تعينه على محور الاعداد**.

نرسم قطعة طولها وحدة واحدة على محور الاعداد (انظر الرسم).

نستعين بنظرية فيثاغوروس كي نبني قطعة طولها $\sqrt{2}$

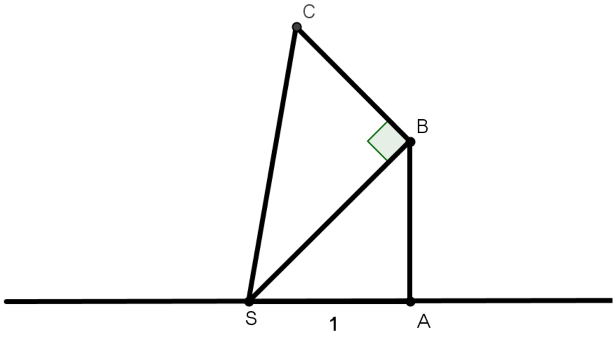
نبني مثلثا قائما ومتساوي الساقين، طول كل واحد من قائميه هو 1.

حسب نظرية فيثاغوروس، طول الوتر في المثلث يساوي: $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$



بعد ان بنينا المثلث، نستعين بالفرجار لنحدد على المحور قطعة بطول وتر المثلث .
طرف واحد يكون عند بداية المحور ، والطرف الثاني يصل إلى مكان $\sqrt{2}$ على محور الأعداد. برهنا بواسطة مكان $\sqrt{2}$ على محور الاعداد، أن $\sqrt{2}$ هو عدد حقيقي. هناك براهين آخرى لذلك.

في مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين SAB، معطى أن SA=1 .



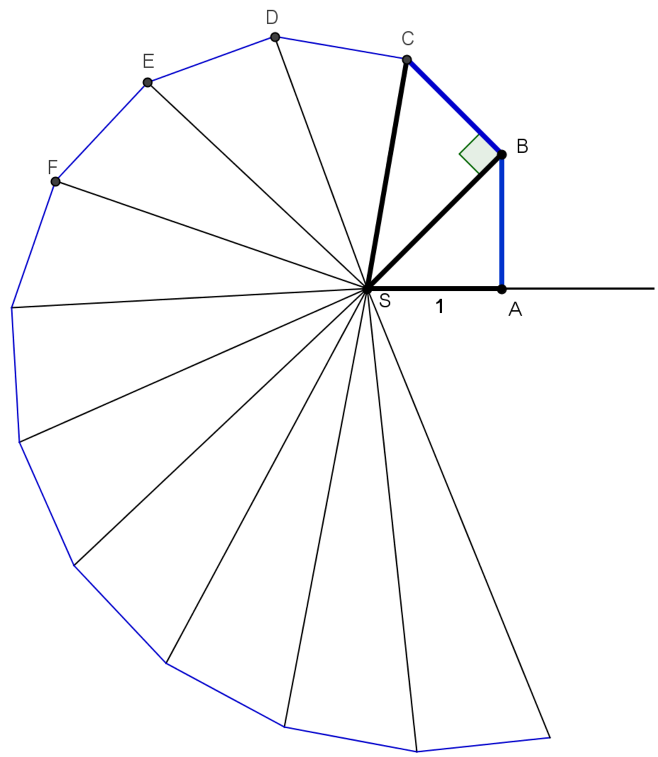
أ) ما هو طول القطعة CS ؟ ____________________
فسروا اجابتكم. ____________________________
____

ب) استعينوا بالرسم من البند أ، وابنوا قطعه طولها $\sqrt{5}$.
اشرحوا طريقة البناء. ______________________
____

الاعداد الحقيقية

$\sqrt{2}$

1. الرسم الذي امامنا مبنّي بالطريقة التي رأيناها في التمرين السابق: كل المثلثات قائمة الزاوية ، وكل القطع الزرقاء متساوية.



أ) تمعنوا في المثلث SEF. ما هي اطوال الاضلاع القائمة في هذا المثلث؟ __________ ما هو طول الوتر؟ __________

ب) أكتبوا سلسة الاعداد التي تمثل اطوال الاوتار في المثلثات، من الصغير الى الكبير.

____

ت) المتوالية من البند ب هي متوالية لا نهائيه. ما هو العدد التالي في هذه المتوالية حسب رأيكم؟ ______________

ث) أبنوا على الرسم قطعة طولها يساوي العدد التالي في المتوالية.

ج) برهن أن $\sqrt{7} > \sqrt{5} > \sqrt{3}$. ____

____

الاعداد الحقيقية

$\sqrt{2}$

نبرهن أن العدد $\sqrt{2}$ غير نسبي، أي لا يمكن التعبير عنه كخارج قسمة بين عددين صحيحين.

نبرهن هذا الأدعاء بالطريقة السلبية: نفرض أن الأدعاء صحيح، ونحصل على تناقض. وهكذا نستنتج أن الأدعاء صحيح.

البرهان:

نفرض أن العدد $\sqrt{2}$ هو عدد نسبي، أي هناك عددان m و n، يحققان $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$.

نفرض أن الكسر $\frac{n}{m}$ هو كسر مختزل، أي لا يوجد ولا أي عامل مشترك، عدا الـ 1 بين m و n .

فرضنا في السابق أن $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$. نربع الطرفين $2=\frac{n^2}{m^2}$.

نضرب الطرفين بـ m^2 ونحصل على $2m^2=n^2$.

هكذا حصلنا على طرفي معادلة يشكلان اعداد زوجية. الطرف الأيسر هو عدد زوجي لأنه من مضاعفات الـ 2، والطرف الأيمن هو زوجي لأنه مساو للطرف الأيسر. بما أن التعبير n^2 هو عدد زوجي فأن n هو عدد زوجي ايضا. ونكتب $n=2k$، ونعوض في المعادلة $2m^2=n^2$.

ونحصل على $2m^2=(2k)^2$

$2m^2=4k^2$

$m^2=2k^2$

وهكذا m^2 هو عدد زوجي، فإن m هو زوجي أيضا.

أي أن m و n هي اعداد زوجية، لذلك فإن الكسر $\frac{n}{m}$ هو كسر غير مختزل.

لكننا فرضنا أن الكسر $\frac{n}{m}$ هو كسر مختزل. وهكذا نكون قد حصلنا على تناقض. هذا يعني أن الادعاء العدد $\sqrt{2}$ هو عدد نسبي وصّلنا الى تناقض، لذالك **العدد $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي.**

1. برهنا في الدرس أن $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي.

أ) برهن أن العدد $\sqrt[3]{2}$ هو عدد غير نسبي.____

____

____

____

____

$\sqrt{2}$

ب) برهن أن العدد $\sqrt{5}$ هو عدد غير نسبي.____ ____________

____

____

____

____

____

____

____

ج) هل يمكن البرهنة بنفس الطريقة بأن العدد $\sqrt{4}$ هو عدد غير نسبي؟ عللوا اجابتكم

____

____

____

2. أمامكم برهان بأن مجموع عدد نسبي (a) وعدد غير نسبي (b) لا يمكن ان يكون عدد نسبي (c).
البرهان هو بالطريقة السلبية.
نفرض أن (c) عدد نسبي a+b=c لذلك b=c-a ، ولكن الفرق بين عددين نسبيين هو عدد نسبي لذلك الفرض غير صحيح. وحصلنا على تناقض.
يحاول كل من أديب ووائل ان يقرر هل يمكن ان تكون نتيجة الطرح $4-9\sqrt{2}$ عدد نسبي.
يدعي أديب بأنه من السهل جدا برهان حاصل ضرب $\sqrt{2}$ بعدد صحيح هو عدد غير نسبي. لذلك العدد المعطى هو غير نسبي.

أ) هل صدق أديب؟ ____

ب) برهن بأن حاصل ضرب $\sqrt{2}$ بعدد صحيح هو عدد غير نسبي، بوسطة برهان مشابه للبرهان المعطى.

____

____

____

ت) عللوا أجابتكم للبند أ. (رمز: استعملوا برهان مشابه للبرهان المعطى).

____

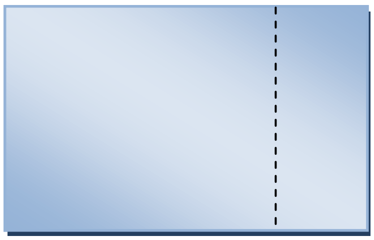
____

-____

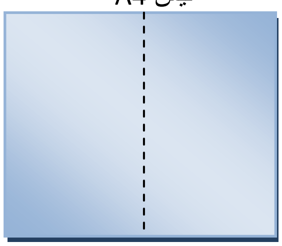
الاعداد الحقيقية

$\sqrt{2}$ وورقة A4

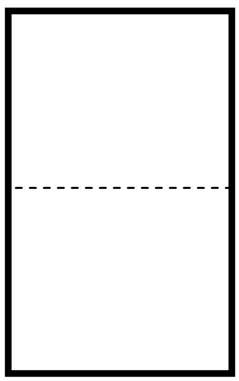
يمكن القول بان الاعداد π، φ و $\sqrt{2}$ هي الاعداد غير النسبية الاكثر شهرة والاكثر استعمالاً.
وبالأخص فنحن نستعمل بكثرة $\sqrt{2}$ وهو موجود كل يوم أمامنا: ورقة التصوير والطباعة A4 .



ليس A4

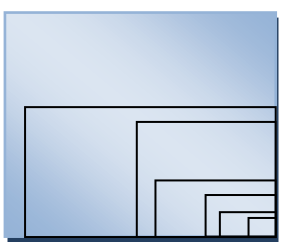


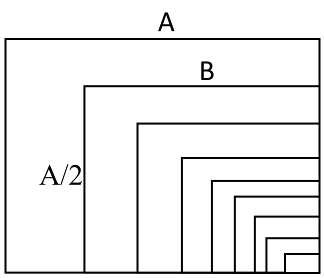
A4



1. في المهمة التالية سنكتشف اصل اطوال الورقة A4.
   أ. خذوا ورقتين A4. (من المفضل ان تكون بلونين مختلفين، أو ميّزوا احدى الورقتين بخطوط أو بأي رسمة أخرى). قصوا من الورقة قطعة مستطيلة الشكل.
   ب. نفذوا البنود *I* - *IV* في الجزء الكبير من الورقة وفي الورقة الكاملة.
   I. قصوا كل ورقة الى قسمين متساويين. قسّموا الضلع الاكبر الى قسمين.
   II. ضعوا جانبا نصف واحد من كل ورقة، وأكملوا العمل في النصف الثاني.
   III. نفذوا مرة اخرى البندين *I* و *II* على الاقل ثماني مرات.(انتبهوا! في كل مرة نقسم الضلع الكبر).
   IV. حصلتم على مجموعتين من الأجزاء الآخذة بالصغر. رتبوا الاوراق واحدة على الاخرى من الكبير الى الصغير على طول الضلع الاكبر، بحيث أن طرفهم في الرأس الايمن في اسفل الورقة.

   اذا قمتم بالعمل بالشكل الصحيح تكونوا قد حصلتم على الشكلين التاليين:





   ج. حسب رأيكم، ما الفرق بين الشكل؟ ________________
   ____
   ____
   د. أكملوا الجدول التالي بمعطيات ورقة A4 الكاملة بحيث أن *A* طول الورقة الأصلية، و B عرضها.

المرحلة	0	1	2	3	4	5	6	7	8
طول a	A	B	$\frac{A}{2}$						
طول b	B	$\frac{A}{2}$	$\frac{B}{2}$						
النسبة $\frac{a}{b}$									

   ه. تمّعنوا في السطر الاخير من الجدول، وحددوا في أي شرط تبقى النسبة ثابتة. ______________________________
   حسب هذا الشرط، ماذا ستكون أطوال A و B، كي تكون مساحة الورقة بالضبط 1 $م^2$؟
   ____
   ____
   حسب هذه المعطيات، ما هي أطوال الورقة في المرحلة رقم 4؟ ______________________________

π - باي

العدد π يمثل نسبة ثابتة بين محيط الدائرة وقطرها

π هو عدد غير نسبي معروف، وتعبيره العشري حتى خمسين منزلة بعد الفاصلة العشرية هو:
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

تقريب π ككسر هو $\frac{22}{7}$ أو $3\frac{1}{7}$

نستعمل العدد π في قوانين حساب محيط دائرة، مساحة دائرة، مساحة القطع الناقص (אליפסה)، حجم كرة، مساحة سطح كرة، حجم اسطوانة، حجم مخروط وقوانين عديدة أخرى.

سوف نتعرف في هذا الفصل على طرق لحساب π. منذ زمن بعيد، اشغلت طريقة حساب π الرياضيين. هناك تطرق للموضوع في مصادر يهودية ومصادر أخرى. في الكتاب المقدس، في كتاب الملوك أ، وصف لمحيط دائرة وقطرها، والنسبة المذكورة هناك هي واحد لثلاث.

هذا العدد أشغل أيضا الصين القديمة. قبل حوالي 2000 سنة حسب الصينيون النسبة بين محيط مضلع محصور في دائرة وبين قطره، وهكذا توصلوا مباشرة لتقريب π. الرياضي الصيني لي هوي (Li Hui)، الذي عاش قبل حوالي 1700 سنة حصر في بادئ الامر مسدس منتظم داخل دائرة، وفي كل مرحلة ضاعف عدد اضلاع المضلع كي يقترب لمحيط الدائرة. هكذا حصل على مضلعات ذا 12 ضلع, 24 ضلع, 48 ضلع و 96 ضلع. استعمل نظرية فيثاغوروس لحساب أطوال الاضلاع.

تقاريب لـ π بحساب لي هوي:

عدد الاضلاع	6	12	24	48	96
النسبة: $\frac{\text{محيط}}{\text{قطر}}$	3	3.105	3.133	3.139	3.141

واضح من طريقة لي هوي بأن قيمة π أكبر من كل تقريب نحصل عليه، ولكن غير معلوم بكم أكبر.

الرياضي اليوناني أرخميدس، الذي عاش في سنوات 212-287 قبل الميلاد، طور طريقة لي هوي. أرخميدس لم يستعمل مضلعات محصورة داخل دائرة فقط، بل وبمضلعات تحصر دوائر. أرخميدس حصر مضلع منتظم داخل دائرة، وحصر دائرة داخل مضلع منتظم ذا نفس عدد الاضلاع. وفي كل مرحلة ضاعف عدد أضلاع المضلع، وهكذا كان محيطان قريبان من محيط الدائرة. بهذه الطريقة حصر قيمة π بين قيمتين، واحد أكبر منه وواحد أصغر منه. وعند العمل على المضلع ذا الـ 96 ضلعا، توصل أرخميدس للنتيجة:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

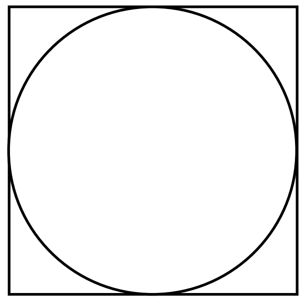
الاعداد الحقيقية

π - باي

هناك طرق عديدة لحساب π، نتعرف على إحداها.

1. **حساب π بطريقة احصائية – طريقة مونت- كارلو.**

يظهر في الرسم أمامنا مربع وبداخله محصورة دائرة. (قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع.)



أ. ما هي النسبة بين مساحة الدائرة ومساحة المربع؟ عبروا عن الاجابة بواسطة π.

____

____

ب. تخيلوا اطلاق سهم من قوس باتجاه هدف عبارة عن المربع الظاهر في الرسم. الاسهم غير موجهة لمكان معين بداخل المربع، وإنما كل نقطة داخل المربع هي هدف. عيّنوا نقاط بشكل عشوائي في أماكن مختلفة من الرسمة التي تشكل مواقع الاسهم. (عيّنوا على الاقل 50 نقطة موزعة بشكل متجانس قدر الامكان.)

ج. جدوا النسبة بين عدد النقاط الواقعة داخل الدائرة وبين مجموع كل النقاط.

____

د. استعينوا بالبند أ، واقترحوا طريقة لحساب تقريب π بواسطة النسبة التي وجدتموها في البند ج. عللوا اجابتكم.

____

ه. احسبوا قيمة π بواسطة الطريقة التي اقترحتموها في البند د.

____

و. اقترحوا طريقة من اجل رفع درجة تدقيق الحساب في طريقة مونت – كارلو.

____

____

ز. لخّصوا الطريقة بالكلمات: كيف يمكن حساب العدد π بطريقة مونت – كارلو.

____

____

π - باي

2. تدّعي دينا : "النسبة بين مساحة ربع دائرة وبين مساحة المربع المبني على نصف القطر هو $\frac{\pi}{4}$".

أ. هل ادعاء دينا صحيح؟ عللوا اجابتكم. (استعينوا في التمرين 1.)

____

____

ب. اقترحوا طريقة لحساب π بواسطة ادعاء دينا وبطريقة مشابهة لطريقة مونت – كارلو.

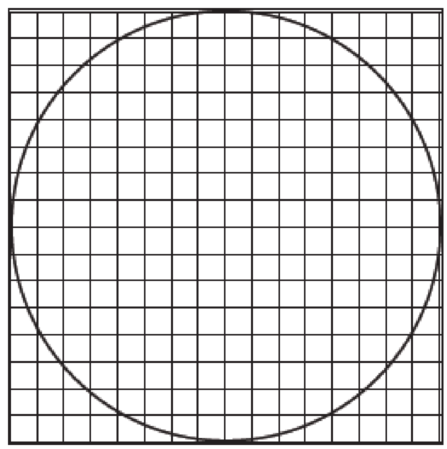
استعينوا بورقة تربيعات، مسطرة، منقلة وبالنقاط التي سترسمونها.

وصف الطريقة: ____

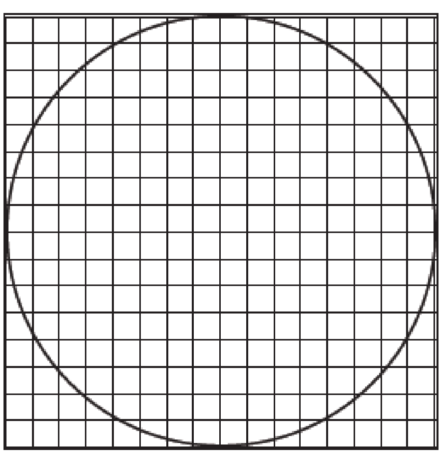
____

____

____



ج. اقترحوا طريقة لحساب π بواسطة رسم مشابه على ورقة تربيعات، ولكم بدون النقاط. اشرحوا اجابتكم.
بماذا يمكن ان نبدل النقاط؟



____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

الاعداد الحقيقية

أعداد حقيقية وكسور

التعبير عن الكسر كعدد عشري

يمكن التعبير عن كسر بواسطة عدد عشري. لذلك هنالك طريقتين مختلفتين.

الطريقة أ: توسيع الكسر بحيث يكون المقام قوة لـ 10.

مثال: $\frac{1}{80}=\frac{1\cdot 125}{80\cdot 125}=\frac{125}{10{,}000}=0.0125$

الطريقة ب: حساب الكسر بواسطة القسمة.

مثلا: $\frac{5}{7}=$ ؟

نقسم 5 على 7 بواسطة القسمة الطويلة.

$$\begin{array}{rl} & 0.714285714285\ldots\ldots \\ 50 & \big|\, 7 \\ -\ 40 & \\ \hline 10 & \\ -\ \ 7 & \\ \hline 30 & \\ -\ 28 & \\ \hline 20 & \\ \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

الان نفحص باي حالات يمكن استعمال طريقة التوسيع، وباي حالات علينا الاستعانة بطريقة القسمة الطويلة كي نحول كسر لعدد عشري.

نتطرق لكسر مختزل $\frac{a}{b}$، $b\neq 0$.

ادعاء 1: عندما $\underline{b=2^m\cdot 5^n}$، يمكننا تحويل الكسر $\frac{a}{b}$ لعدد عشري بواسطة توسيع الكسر ، بحيث يكون المقام من قوى الـ 10. (في حالة عدم وجود عامل توسيع ليعطينا قوى الـ 10، عندها لا يمكن استعمال هذه الطريقة).

مثال: الكسر $\frac{1}{80}$، a=1 ، $b=2^4\cdot 5^1$. لذلك يمكن تحويل الكسر لعدد عشري بواسطة التوسيع.

1. تعليل ادعاء 1

أ. اكتبوا عدد طبيعي بحيث تكون عوامله الوحيدة عبارة عن حواصل ضرب قوة 2 بقوة 5. ______________

ب. في أي عدد طبيعي يمكن ضرب العدد 40 ونحصل على قوة 10؟ ____________________________

ج. في أي عدد طبيعي يمكن ضرب العدد $c=2^3\cdot 5^4$، ونحصل على قوة 10؟ ______________________

د. هل يوجد عدد طبيعي بضربه بـ 70 نحصل على قوة 10؟ _____________ عللوا اجابتكم.

____

____

الاعداد الحقيقية

أعداد حقيقية وكسور

2. أكتبوا الاعداد التالية بالطريقة العشرية.

$\frac{3}{55}$ ____________ $\frac{1}{16}$ ____________

$\frac{5}{11}$ ____________ $\frac{11}{8}$ ____________ $\frac{2}{9}$ ____________

3. أكتبوا خمسة كسور مختلفة يمكن تحويلها لأعداد عشرية بواسطة التوسيع. أكتبوا التوسيع الملائم.

____

____

____

____

____

كيف يمكن ايجاد عامل التوسيع؟ ____

____

ادعاء 2: عندما تكون امكانية تحويل كسر لعدد عشري بواسطة التوسيع، نحصل على عدد عشري نهائي (أي أن له عدد نهائي من المنازل بعد الفاصلة العشرية).

4. شرح ادعاء 2.

أ. أعطوا مثالين ملائمين للادعاء. ____

ب. عللوا الادعاء.

____

____

____

5. هل يمكن كتابة الكسور التالية كاعداد عشرية نهائية؟

أ. $\frac{1}{2}$ ____________ ب) $\frac{2}{3}$ ____________

ج) $\frac{5}{200}$ ____________ د) $\frac{3}{400{,}000{,}000}$ ____________

الاعداد الحقيقية

أعداد حقيقية وكسور

يكون العدد العشري **لا نهائي**, اذا كتب الجزء الكسري منه بواسطة عدد لا نهائي من المنازل امختلفة عن الـ0.

نرمز لعدد لا نهائي بواسطة نقاط ... على يمين العدد. مثلا: ...35.1578219

يكون العدد العشري **لا نهائي دوري**، اذا كان في الجزء الكسري سلسلة من الاعداد تعيد على نفسها مباشرة بعد الفاصلة العشرية أو بعد عدد من المنازل المختلفة عن السلسلة.

نرمز لعدد عشري **لا نهائي دوري** بواسطة خط – فوق سلسلة الاعداد التي تعيد على نفسها.

أمثلة: $4.252525252525\ldots = 4.\overline{25}$ $\quad\quad$ $13.222353535353535\ldots = 13.222\overline{35}$

ادعاء 3: عندما **لا يمكننا** تحويل كسر لعدد عشري بواسطة التوسيع، نحصل على عدد عشري لا نهائي دوري.

6. أ) أكتبوا ثلاثة كسور مختلفة **لا يمكن** تحويلها لاعداد عشرية بواسطة التوسيع.

____

ب. حوّلوا الكسور من البند أ لأعداد عشرية. أكتبوا خمسة عشر منزلة بعد الفاصلة العشرية.

____

____

ج. هل حصلتم على اعداد عشرية نهائية ؟ اعداد عشرية لا نهائية؟ اعداد عشرية لا نهائية دورية؟

____

7. أ) ما هو الباقي من نتيجة قسمة عدد معيّن على 7؟ ______________________

كم عددًا كتبتم؟ ______________________________

ب. اكتبوا الكسر $\frac{3}{7}$ كعدد عشر، اكتبوا حتى 20 منزلة بعد الفاصلة العشرية.

____

ج. من اجل حل البند السابق ، هل كان علينا القيام ب 20 مرحلة من عملية القسمة الطويلة؟ أم كان بإمكانكم انهاء المهمة بعدد أقل من المراحل؟ عللوا اجابتكم.

____

____

____

أعداد حقيقية وكسور

د. ما هو طول الجزء الدوري في العدد من البند ب؟

____

هـ. هل يمكن وجود كسر من الصورة $\frac{a}{7}$, بحيث يكون الجزء الدوري من العدد العشري الملائم أطول من العدد في البند السابق؟ عللوا اجابتكم.

____

____

____

8. أمامكم كسر مختزل $\frac{5}{11}$. استعينوا باستنتاجاتكم السابقة واجيبوا عن الاسئلة.

أ) هل العدد العشري الملائم للكسر المعطى هو كسر نهائي أم كسر لا نهائي؟ _________________________

ب) اذا قررتم ان العدد العشري هو لا نهائي، هل هو دوري؟ عللوا اجابتكم. __________________________

____

____

ج) اذا قررتم ان الكسر اللانهائي هو دوري، ما هو الطول الاكبر الممكن للجزء الدوري؟ عللوا اجابتكم.

____

____

د) احسبوا العدد العشري الملائم. وافحصوا فيما اذا كانت فرضياتكم في البنود السابقة صحيحة.

____

____

9. استعينوا بالتمرينين 7 و 8 وأكملوا استنتاجكم العام:

عند تحويل كسر مختزل $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ لعدد عشري، ونحصل على عدد عشري لا نهائي، فمن المؤكد انه سيكون كسر دوري، وطول الجزء الدوري لا يتعدى عدد الـ ______________________________________

أعداد حقيقية وكسور

10. معطى تمرين القسمة 34:216. أجيبوا عن البنود أ – ج من دون حساب.

أ. هل نتيجة القسمة هو عدد عشري نهائي؟ عدد عشري لا نهائي؟ عدد عشري لا نهائي دوري؟ عللوا اجابتكم.

____

____

ب. اذا كانت اجابتكم عدد عشري دوري، ما هو الطول الاكبر للجزء الدوري؟ فسروا اجابتكم. ________________

____

ج. نفّذوا عملية القسمة، وافحصوا اجاباتكم للبنود أ و ب.

____

11. أكتبوا ثلاثة كسور ذات مقام فردي، عند تحويلها لعدد عشري نحصل على عدد عشري لا نهائي دوري، في الجزء الدوري يكون على الاقل 20 منزلة. فسروا اجابتكم.

____

____

أعداد غير نسبية

أنواع الأعداد العشرية

يمكننا عرض أي عدد بواسطة عدد عشري.

تقسم الاعداد العشرية لعدة انواع.

اعداد عشرية نهائية
12.278

اعداد عشرية لا نهائية

اعداد عشرية لا نهائية دورية

اعداد عشرية لا نهائية غير دورية
1.010010001...

اعداد عشرية لا نهائية دورية، الجزء الدوري فيها يبدأ مباشرة بعد الفاصلة العشرية
$4.\overline{25}...$

اعداد عشرية لا نهائية دورية، الجزء الدوري فيها لا يبدأ مباشرة بعد الفاصلة العشرية
$13.222\overline{35}$

كل الاعداد العشرية التي يمكن التعبير عنها بواسطة كسر هي **اعداد نسبية** (RATIO باللاتينية = نسبة.)
لذلك اعداد عشرية لا نهائية غير دورية هي **اعداد غير نسبية.**
سوف نتعلم في هذا الفصل تحويل اعداد عشرية لكسور.
حالة 1: تحويل عدد عشري نهائي لكسر.
نستعمل تعريف العدد العشري كي نحول عدد عشري لكسر: $12.278 = 12\frac{278}{1,000} = 12\frac{139}{500}$

في هذه الطريقة استطعنا تحويل عدد عشري نهائي لكسر
حالة 2: تحويل عدد عشري غير نهائي دوري لكسر.
نحوّل العدد الدوري $14.2\overline{35}$ لكسر. نعمل على الجزء الكسري من العدد.
الهدف هو "التخلص" من الجزء الدوري. لذلك نستعمل الضرب بقوى الـ 10، ونحصل على عددين، الجزء الدوري فيهما متساو ويبدأ مباشرة بعد الفاصلة العشرية.
في الوضع القائم نرمز بـ $x=0.2\overline{35}$. نستعين بمضاعفات القوى 10، ونحصل على عددين الجزء الدوري بهم مطابق.
$10x=2.\overline{35}$. في هذا العدد الجزء الدوري يظهر مباشرة بعد الفاصلة العشرية.
$1,000x=235.\overline{35}$.
نطرح العددين كي نطرح الجزء الدوري.

$$1,000x - 10x = 235.\overline{35} - 2.\overline{35}$$

$$990x=233$$

$$x = \frac{233}{990}$$

لذلك $14.2\overline{35} = 14\frac{233}{990}$

بطريقة مشابهة يمكن تحول أي عدد عشري دوري لعدد كسري

الاعداد الحقيقية

1. حوّلوا الاعداد التالية لأعداد كسرية.

أ) 0.123 ____________________

ب) 1.27 ____________________

ت) 213.6667 ____________________

2. حوّلوا الاعداد التالية لاعداد كسرية.

ث) $0.\overline{235}$ ____________________

أ) $1.\overline{17}$ ____________________

أ) $24.2\overline{4}$ ____________________

ب) $123.123\overline{45678}$ ____________________

3. تدعي ناديا بأنه لا يمكن ان يكون التعبير العشري للكسر $\frac{3}{11}$ هو $0.\overline{23456787654}$

من دون تحويل الكسر للتعبير العشري، عللوا ادعاء ناديا.

____

____

4. ريما ودينا تلعبان بلعبة الاعداد. ترميان قطعة نقدية، في حالة الحصول على "صورة"، كل واحدة بدورها عليها كتابة عدد نسبي ، وفي حالة الحصول على عدد، كل واحدة بدورها تكتب عددًا غير نسبي.

أ) في الرمية الاخيرة حصلت دينا على عدد وكتبت: ...1.0000011111111.

هل صدقت دينا؟ ____________________

ب) حصلت ريما على صورة وكتبت : 19 ، هل صدقت ريما؟ ____________________

ج) حصلت دينا على صورة وكتبت : 0 هل صدقت دينا؟ ____________________

د) حصلت ريما على صورة وقالت: "نكتب العدد ...1.11111111، بعد ذلك نبدل قسم من المنازل بـ 0 هكذا:

...1.10110111011110111110." هل صدقت ريما؟ ____________________

ه) اقترحوا امثلة أخرى لكسور لا نهائية دورية، تعبّر عن عدد غير نسبي. عللوا لماذا بالطريقة التي اقترحتموها الكسور فعلا غير دورية.

____

____

____

המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence through Education

מצוינות 2000
בחסות קרן סקירבול

المعهد للتفوق في التعليم

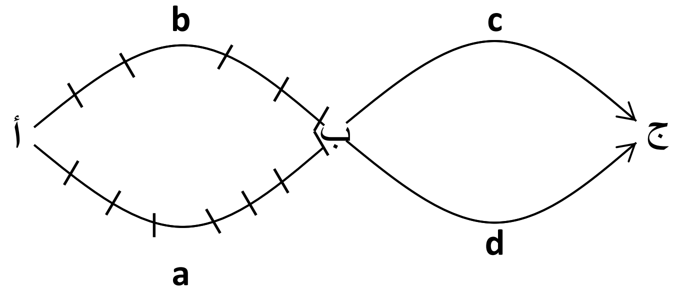
المهمة هي التحسين الاقصى

מאת: אמנון זקוב

מערכת: גלי שמעוני, ד"ר אבי פולג

وصف المهمة

أمام عماد عُرض التحدي الاتي : عليه أن يصل من النقطة أ إلى النقطة ب حسب التعليمات الاتية :



1) في البداية يأخذ 70 شاقلاً بقطع نقدية معدنية من 10 شاقل فقط. في تمام الساعة 8^{00} صباحًا يحرك سيارته من النقطة أ ويسافر إلى النقطة ب بشارع "أ" أو شارع "ب".

2) في الشارع a يوجد 7 قطع سفر و 7 حواجز . تكلفة المرور في كل حاجز هو 3 شواقل. يُسمح للموظف عند الحاجز اعطاء باقي بقطع نقدية واحدة فقط : 5 شواقل أو شاقل واحد ، لذلك من الممكن أن يكون الدفع أكثر من 3 شواقل . الزمن الذي يستغرقه السفر في كل قطعة من الشارع مع زمن التوقف عند الحاجز في نهايتها هو 11 دقيقة.

3) في الشارع b يوجد 5 قطع سفر و 5 حواجز. الزمن الذي يستغرقه السفر في كل قطعة من الشارع مع زمن التوقف عند الحاجز في نهايتها هو 15 دقيقة. تكلفة المرور في كل حاجز هو 6 شواقل ، . يُسمح للموظف عند الحاجز اعطاء حتى 3 قطع نقدية من فئة الـ 5 شواقل أو شاقل واحد (يمكنه ترجيع باقي مكون من قطع نقدية من فئتين محتلفتين). كذلك هنا من الممكن أن يكون الدفع عند الحاجز أكثر من 6 شواقل.

4) عندما يصل إلى النقطة ب ، والتي هي محطة قطار ، توجد أمكانيتان :

- اختيار القطار c الذي يخرج مرة كل ساعة ، في الساعات : 6:30 ، 7:30 ، 8:30 ... زمن السفر في هذا القطار هو 25 دقيقة وتكلفة السفر 30 ش.ج
- اختيار القطار d الذي زمن خروجه غير محددة ، ولكن من المعلوم أن الفرق بين كل مرة هو 20 دقيقة بالضبط. فمثلاً إذا خرج القطار الاول في الساعة 06:22 فالقطار التالي يحرج في الساعة 06:42 والذي يليه في الساعة 07:02 وهكذا . من هنا ، مواعيد خروج القطار غير معطاة (من الممكن أن يكوون زمن الخروج ليست بدقائق مقربة) . ولكن من جهة أخرة ، معطى أن زمن السفر في هذا القطار هو 27 دقيقة وتكلفة السفر 27 شاقلاً.

في نهاية المهمة ، عندما يصل عماد إلى النقطة ج ، يحصل على المكافأة التالية:

يُرجع عماد أولاً المبلغ المتبقي من أل 70 شاقلاً أُعطيت له في البداية . ومقابل كل شاقل يُرجعة يحصل على 20 شاقلاً.

مقابل كل دقيقة يصل بها قبل الساعة الـ 10:00 يحصل على 100 شاقلاً.

مقابل كل دقيقة يتأخرها ويصل بها بعد الساعة 10:00 يدفع 200 شاقلاً.

انتبهوا إلى الشرط الاضافي:

قبل أن يخرج عماد إلى المهمة عليه أن يقرر سلفًا في أي مسار من المسارات الاربعة يختار: a-c أو b-c أو a-d أو b-d

أسئلة:

1. كم تكون المكافأة التي يحصل عليها عماد إذا اختار المسار a-c ؟
2. كم تكون المكافأة التي يحصل عليها عماد إذا اختار المسار b-c ؟

المساران a-d و b-d يشملان القطار d الذي به زمن الخروج للسفر ليست دقيقة وغير معروفة. من يختار هذا المسار فإنه متعلق بالحظ. في أحسن الحالات ، أن يصل إلى النقطة ب بالضبط عند ساعة وصول القطار d إلى هناك ، ويصعد عليه مباشرة. وفي أسوء الحالات أن يصل إلى النقطة ب في نفس اللحظة التي انطلق فيها القطار d وترك المكان ، عندها عليه الانتظار 20 دقيقة.

3. كم تكون مكافأة عماد إذا اختار المسار a-d وحالفه الحظ، أي وصل القطار d إلى النقطة ب في نفس اللحظة التي وصل بها هو؟
4. كم تكون مكافأة عماد إذا اختار المسار a-d ولسوء حظه وصل إلى النقطة ب في نفس اللحظة التى انطلق فيها القطار d وترك المحطة ، ويضطر أن ينتظر 20 دقيقة؟
5. كم تكون مكافأة عماد إذا اختار المسار b-d وحالفه الحظ، أي وصل القطار d إلى النقطة ب في نفس اللحظة التي وصل بها هو؟
6. كم تكون مكافأة عماد إذا اختار المسار b-d ولسوء حظه وصل إلى النقطة ب في نفس اللحظة التى انطلق فيها القطار d وترك المحطة ، ويضطر أن ينتظر 20 دقيقة؟
7. في أي مسار كنتم تقترحون لعماد أن يختار ؟

مبدأ برج الحمام

برنامج التفوق في الرياضيات

التخنيون

<u>رئيسة البرنامج والاستشارة العلمية والتربوية</u>

برفسور أوريت زسلافسكي

<u>مديرة البرنامج</u>

د. ايريس زوديك

<u>طاقم التطوير</u>

ايرينا جورفيتش، د. ايريس زوديك ، د. عليزا ملك

<u>استشارة رياضية</u>

د. عليزا ملك

بعض المسائل في هذا الفصل تم تأليفها بروح المسائل التي وردت في كراس " مهام لتطوير التفكير الرياضي " الذي نتج في إطار مشروع " تيلم – التخنيون لتشجيع الرياضيات"

مبدأ برج الحمام

مقدمة

يتناول هذا الفصل حل مسائل رياضية. يمكن حل بعض هذه المسائل بطرق مختلفة، ومع هذا يوجد ما هو مشترك لجميعها . هدف الفصل هو تعّلم المشترك بين المسائل ، عن طريقها تعّلم مبدأ رياضي بسيط ، والذي يساعد في حل مسائل غير بسيطة .

<u>مسألة 1</u>

في كيس مقفل يوجد جوارب زرقاء وأخرى حمراء. في كل مرة نُخرج من الكيس جورب واحد، لا يمكن أن نرى لون الجورب الذي نخرجه.

أ) كم جوربًا يجب إخراجه من الكيس لنضمن زوج جوارب مطابق (ذات اللون) ؟
ب) هل هناك أهمية لعدد الجوارب من كل لون ؟

حاولوا تفسير جوابكم بطرق مختلفة.

<u>مسألة 2</u>

نوسع المسألة رقم 1 قليلاً:

في كيس مقفل توجد جوارب باللون الأزرق ، وجوارب باللون الأحمر ، وجوارب باللون الاخضر ، وجوارب باللون الأبيض. في كل مرة نُخرج جوربًا واحدًا من الكيس ، لا يمكن رؤية لون الجورب الذي نُخرجه.

أ) كم جوربًا يجب إخراجه من الكيس لنضمن زوج جوارب مطابق (ذات اللون) ؟ فسروا
ب) هل ، وإذا نعم، كيف يتغير جوابكم للبند أ إذا كان في الكيس أيضًا جوارب باللون الاسود ؟ فسروا
ج) هل ، وإذا نعم، كيف يتغير جوابكم للبند ب إذا كان في الكيس بالضبط 4 جوارب من كل لون ؟ فسروا
د) هل ، وإذا نعم، كيف يتغير جوابكم للبند ج إذا كان في الكيس بالضبط 5 جوارب من كل لون ؟ فسروا
ه) هل ، وإذا نعم، كيف يتغير جوابكم للبند د إذا كان في الكيس: 3 جوارب زرقاء ، 4 جوارب حمراء، 7 جوارب خضراء ، 2 جوارب بيضاء و 10 جوارب سوداء ؟ فسروا
و) هل ، وإذا نعم، كيف يتغير جوابكم للبند هـ إذا كان في الكيس: 3 جوارب زرقاء ، 4 جوارب حمراء، 7 جوارب خضراء ، 2 جوارب بيضاء و جورب واحد أسود ؟ فسروا
ز) حاولوا تعميم المسألة وإيجاد حل عام . اشرحوا .

<u>مسألة 3</u>

لجدة ثمانية أحفاد . كل حفيد يزورها مرة واحدة في الاسبوع في الساعة 16:00 .

أ) هل يمكن خلال اسبوع أي حفيدان لا يلتقيان عند جدتهما ؟ فسروا
ب) هل ، وإذا نعم ، كيف يتغير جوابكم للبند أ إذا كان للجدة 10 أحفاد ؟ 7 أحفاد ؟ 5 أحفاد ؟ فسروا
ج) ما هو أقل عدد من الاحفاد الذي يكون للجدة لتضمن أنه في كل أسبوع يلتقي حفيدان عندها ؟ فسروا.

مسألة 4

نوسع قليلاً المسألة 3:

للجدة 8 أحفاد . لنفرض أن كل حفيد يزورها مرة في الاسبوع . بعض الاحفاد يزورونها صباحًا الساعة 10:00 وبعضهم يزورونها مساءًا الساعة 18:00 .

أ) هل حتمًا في كل أسبوع يلتقى حفيدان عن جدتهما ؟ فسروا
ب) كيف يتغير جوابكم للبند أ إذا كان عدد الاحفاد 10 ؟ 20 حفيدًا ؟ فسروا
ج) ما هو أقل عدد من الاحفاد يكون للجدة ، لكي تضمن أن يلتقى حفيدان من أحفادها عندها؟ فسروا
د) حاول تعميم المسألة وإيجاد حل عام لها . اشرحوا

بنظرة إلى الوراء

ارجعوا إلى المسائل 1 – 4 التي حللتم .

أ) حاولوا أن تجدوا وجه الشبه والاختلاف بين عائلة المسألتين 1 و 2 من جهة وعائلة المسألتين 3 و 4 من جهة أخرى ، فسروا .
ب) حاولوا كتابة مسائل من عندكم ، التي يمكن حلها بطرق مشابه.

ما هو مبدأ برج الحمام ؟

لكي نحل المسائل 1 – 4 يمكن الاستعانة بمبدأ رياضي بسيط يسمى : **مبدأ برج الحمام**

مبدأ برج الحمام يقول بأن إذا وُجد m خلايا في برج حمام، ونريد إدخال m+1 حمامات اليه ، لا بُد من وجود خلية فيها حمامتان على الاقل.

هذا المبدأ ، والذي يظهر بسيطًا جدًا ، يسمى مبدأ الجوارير أو مبدأ ديريكله .

نُص مبدأ برج الحمام ، على ما يبدو ، بشكل رسمي على ثيد الرياضي يوهان جوستيف لجن ديريكله (Le jeune de Richelet) في سنة 1834 . ومن هنا سمي مبدأ ديريكله .

ولد ديريكله سنة 1805 في مدينة ريكله في بلجيكا، ومن هنا جاء اسمه. وهو في عمر 12 سنة اهتم ديريكله الصغير في الرياضيات واشترى بمصروفه كتاب رياضيات. تمييز في مدرسته في الرياضيات والتاريخ . بعد أن أنهى تعليمه الثانوي في سنة 16 سنة انتقل إلى الجامعة في باريس ليتعلم مع أعظم الرياضيين في عصره ، وذلك بعد أن تغلّب على مرض الجدري . وفيما بعد انتقل إلى جامعات أخريات في المانيا ، حيث اوجد اكتشافات جديد في مجال الرياضيات والفيزياء. كم وساهم كثيرًا في حل اللغز الرياضي المعروف باسم نظرية فيرماة . عُرف كثيرًا بفضل مبدأ ديريكله .

يمكن كتابة نص مبدأ برج الحمام بطرق أخرى ، مثل:

إذا كان لدينا m خلايا ونريد إدخال أكثر من m حمامات اليها ، يجب أن يكون هناك خلية فيها عدد الحمامات أكبر من 1 .

سؤال للتفكير :

- إذا أدخلنا m+1 حمامات ل m خلايا في البرج، هل يمكن أن يكون هناك خليتان فيهما أكثر من حمامة واحدة ؟
- إذا أدخلنا m+1 حمامات ل m خلايا في البرج، هل يمكن أن يكون هناك 3 خلايا فيها أكثر من حمامة واحدة ؟

لنتمعن في المثال التالي:

نفرض أنه في برجنا يوجد 10 خلايا ولدينا 11 حمامة . لدينا عدة إمكانيات لإدخال الحمامات للخلايا في البرج. . فيما يلي عدد من الحالات لترتيب الحمامات في البرج. بالنسبة لكل واحد من الحالات افحصوا إذا فعلاً يوجد في خلية واحدة على الاقل حمامتان.

الحالة 1 – خلية واحدة فارغة ، لا يوجد بها أية حمامة ، 6 خلايا يوجد في كل منها حمامة واحدة ، وخليتان في كل منها حمامتان:

الحالة 2 – ثلاثة خلايا فارغة ، ثلاثة خلايا في كل منها حمامة واحدة وأربعة خلايا في كل منها حمامتان.

الحالة 3 – خمسة خلايا فارغة ، مكانان في كل منهما حمامة واحدة وثلاثة خلايا في كل منها 3 حمامات .

الحالة 4 - تسعة خلايا في كل منها حمامة واحدة ، وخلية واحدة فيها حمامتان .

بالطبع يوجد إمكانيات كثيرة أخرى (جدوا بعضها).

يُسأل السؤال: ما المشترك لكل الترتيبات المذكورة أعلاه ، ولكل الترتيبات الممكنة التي لم تُذكر هنا ؟ الجواب هو، أنه في كل ترتيب ممكن ، دائمًا يوجد خلية يكون فيها أكثر من حمامة واحدة ، أو بكلمات أخرى – دائمًا يوجد خلية فيها على الاقل حمامتان. حتى إذا حاولنا توزيع الحمامات على أكثر عدد ممكن من الخلايا (كما في الحالة 4) ، يكون هناك خلية واحدة فيها حمامتان ، لأن عدد الخلايا أقل من عدد الحمامات .

بالرجوع إلى المسائل التي حللنا :

ارجعوا إلى المسائل 1 – 4 وحاولوا أن تحلوها باستعمال مبدأ برج الحمام. لكي نحل المسائل باستعمال هذا المبدأ، هناك حاجة لتحديد أي معطى من معطيات المسألة يمثل الخلايا في البرج وأيها هو الحمام.

نمثل ذلك في المسألة 1 :

في المسألة يوجد لونان ، لذا في برجنا (الخيالي) يوجد خليتان : إحداهما تسمى "أحمر" والثاني تسمى "أزرق". والآن نُخرج جوارب، وكل جورب ندخله في خلية مناسبة بحسب لونه ، لذا الحمام في هذه المسألة هي الجوارب . نُخرج الجورب الأول . لنفرض أنه أحمر ، نُدخله إلى الخلية "الأحمر" . والآن توجد خلية واحدة فارغة وخلية أخرى فيها جورب واحد. نُخرج جورب إضافي . إذا كان لونه أحمر عندها يوجد في خلية الأحمر جوربان ، وعندها حصلنا على جورب مطابق (في هذه الحالة زوج جوارب لونه أحمر) وبذلك أنهينا .

ولكن من الممكن أن يكون لون الجورب الثاني الذي أخرجناه أزرق. في هذه الحالة نُدخله إلى الخلية "أزرق" ، ويكون جوربًا واحدًا في خلية "أزرق" وجورب في خلية "أحمر" . هذا يعني أنه لا يكفي أن نُخرج جوربين لنضمن زوج جوارب مطابق . ولكن عند إخراج جورب ثالث ، فمن المؤكد أن يكون في إحدى الخليتين زوج جوارب مطابق(لهما ذات اللون).

يعني ، لكي نضمن الحصول على زوج جوارب مطابق من نفس اللون علين إخراج 3 جوارب (واحد أكثر من عدد الخلايا) .

نُلخص العلاقة بين الحل وبين مبدأ برج الحمام:

إذا أردنا أن نضمن وجود خلية واحدة بداخلها جوربين (للحصول على زوج جوارب ملائم) ، بحسب مبدأ برج الحمام ، علينا أن نهتم بأن يكون عدد الجوارب التي نُخرجها (عدد الحمام) أكبر من عدد الالوان المختلفة (عدد الخلايا في البرج) . أقل عدد من الجوارب التي يجب إخراجها (عدد الحمامات) لنضمن ذلك ، يجب أن يكون أكبر ب 1 من عدد الالوان المختلفة للجوارب (الخلايا في البرج).

تطبيقات لمبدأ برج الحمام

مسألة رقم 5

عندما أحضروا لحديقة الحيوان 21 حمامة. اتضح أن في برج الحمام هناك يوجد 20 مكان فقط . تم إدخال كل ال 21 حمامة إلى الأمكنة في البرج . هل يمكن الاستنتاج الاكيد أن:

أ. يوجد مكان في البرج فيه حمامتان بالضبط؟ فسروا
ب. يوجد مكان في البرج فيه على الاقل حمامتان ؟ فسروا
ج. يوجد مكان واحد بالضبط فيه على الاقل حمامتان ؟ فسروا
د. لا توجد في البرج أمكنة فارغة ؟ فسروا

مسألة 6

اشترت جنان علبة كعكات لتقدمها إلى صديقاتها في الحفلة التي نظمّتها. عندما فتحت العلبة ، وجدت أنها تحتوي على 49 كعكة . اشترك في الحفلة 8 صديقات ، وأثناء الحفلة أكلن كل الكعكات .
أ. هل يمكن أن يكون أن كل واحدة من الصديقات أكلت أقل من 6 كعكات ؟ فسروا
ب. هل يمكن أن يكون أن كل واحدة من الصديقات أكلت أقل من 7 كعكات ؟ فسروا
ج. هل يمكن أن يكون أن كل واحدة من الصديقات أكلت أقل من 8 كعكات ؟ فسروا

مسألة 7

جدول مربع فيه 4×4 تربيعات ، في كل تربيعة سُجُّل أحد الاعداد 1 ، 0 ، 1- . نحسب، في كل سطر، مجموع الاعداد المسجلة ، ومجموع الاعداد في كل عمود ، ومجموع الاعداد في كل قطر.

أ. ما هي كل النتائج التي نحصل عليها عندما نحسب كل المجموعات هذه؟ وكم مجموع مًمكن ؟ فسروا
ب. هل يمكن أن يكون بين كل النتائج التي نحصل عليها فعلاً، لا توجد نتيجتان متساويتان.
ج. أجيبوا عن البندين أو ب بالنسبة لجدول مربع فيه 5×5 تربيعات ، بالنسبة لجدول مربع فيه 8×8 تربيعات.
د. اكتبوا مسائل مشابهة بالنسبة لجداول مربعة مختلفة ، حلوا وحاولوا التعميم.

مبدأ برج الحمام وخواص الاعداد الطبيعية

مسالة 8

سجلوا 12 عددًا مختلفًا ثنائي المنزلة. احسبوا الباقي من قسمة كل عدد على العدد 11. جمّعوا الاعداد بحسب الباقي من القسمة على 11 في مجموعات (مثال: العددان 59 و 37 ينتميان لنفس المجموعة ، لأن لهما نفس الباقي من قسمة كل منهما على 11).

أ. هل بين الاعداد التي سجلتموها يوجد عددان الفرق بينهما هو عدد مكون من منزلتين متساويتين؟ (مثال: إذا سجلتم العددين 59 و 37 ، فالفرق بينهما هو 22 ، والفرق أيضًا يحقق المطلوب).
ب. سجلوا 12 عددًا آخر ، ومختلفة عن بعضها البعض وعن الاعداد التي سجلتموها قبلاً . هل يوجد ، بين الاعداد الجديدة التي اخترتموها زوج أعداد الفرق بينهما هو عدد مكون من منزلتين متساويتين ؟

ج. هل الاستنتاجات التي حصلتم عليها في البندين أ و ب هي من باب الصدفة ؟ حاولوا التعميم استنتاجاتكم وبرهنة (أو نقضها) صحتها .

مسالة 9

معطى 10 أعداد طبيعية ما .

أ. كم يمكن أن يكون الباقي من قسمة كل واحد من هذه الاعداد على 9 ؟
ب. لنفرض انه هناك عددان يعطيان نفس الباقي من قسمتهما على 9 . ماذا يمكن القول عن الفرق بين هذين العددين؟ فسروا.
ج. بيّنوا أن بين كل 10 أعداد نختارها يوجد عددان على الاقل الفرق بينهما يقبل القسمة على 9 بدون باقٍ.
د. ما العلاقة بين هذه المسألة والمسألة السابقة (مسألة رقم 8) ؟ فسروا
ه. بيّنوا أنه بين كل 125 عدد طبيعي يوجد على الاقل عددان الفرق بينهما يقبل القسمة على 124 بدون باقٍ.
و. اقترحوا مسائل مشابهة للمسألتين 8 و 9 ، حلوها ، ثم حاولوا التعميم .
ز. برهنوا الادعاء الاتي:

ادعاء 1 (عن قسمة فروق بين أعداد صحيحة):
بين كل k أعداد صحيحة، دائمًا يمكن إيجاد عددين الفرق بينهما يقبل القسمة على العدد $(k-1)$.

مسالة 10 :

معطاة مجموعه من 7 أعداد مختلفة المكونة من الرقم 1 فقط :

أ - اطرحوا عددين مختلفين من المجموعة (اطرحوا العدد الصغير من الكبير)، اعيدوا هذه العمليه على ازواج مختلفة من الاعداد ، وافحصوا ماذا يميز الفروق .
ب -بينوا انه يمكن ايجاد عدد المكون من الارقام 0 و 1 فقط ويقبل القسمة على 6 بدون باقٍ.
ت -بينوا انه لكل عدد طبيعي n، يمكن ايجاد عدد طبيعي مكون من الارقام 0 و 1 فقط, ويقبل القسمة على n .

مبدأ برج الحمام والبعد بين النقاط

مسالة 11 :

ما هو أكبر بُعد ممكن ان يكون بين نقطتين داخل مربع او على محيطه ؟
هذا السؤال يساعد على حل مسالة 12 , نحاول حلها بمساعده البنود التاليه .

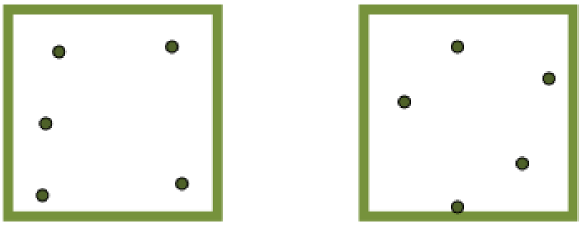
معطى مربع طول ضلعه 1 م .

أ) ما هو أكبر بُعد ممكن بين زاويتي المربع ؟ فسروا
ب) بينوا ان البعد بين احدى زوايا المربع لأي نقطه على محيطه اقل من طول قطر المربع .
ج) بينوا ان البعد بين اي نقطتين على محيط المربع اقل من طول قطر المربع .

د) بينوا ان البعد بين نقطه في داخل المربع وبين نقطه على محيطه اقل من طول قطر المربع .
ه) بينوا ان البعد بين نقطتين في داخل المربع اقل من طول قطر المربع .
و) ما هو أكبر بُعد بين نقطتين موجودتين داخل المربع او على محيطه ، اذا كان طول ضلع المربع هو 2م ؟ اين تقع النقطتان اللتان البعد بينهما هو الاكبر ؟ اشرحوا .
ز) ز. ما هو أكبر بُعد بين نقطتين موجودتين داخل المربع او على محيطه , اذا كان طول ضلع المربع هو 3 سم ؟ 0.5 م ؟ a سم (a>0) ؟

مسالة 12 :

أ) على نافذة مربعه الشكل طولها 1 م تتحرك 5 حشرات . بيّنوا انه في اي لحظة يوجد على الاقل زوج من الفراشات البعد بينهما أقل 75 سم . (في الرسم مثال لحالتين ممكنتين) .



ب)

ارشاد :

نحول الحشرات الى نقاط ، يمكن تقسيم المربع المعطى لعدد من المربعات المتطابقة، وتطبيق مبدأ برج الحمام، هذا بالإضافة إلى الاستنتاجات من المسألة السابقه. إلى كم مربع متطابق من المفضل تقسيم المربع المعطى، حسب رأيكم ؟ ولماذا بالذات مربعات متطابقة وليس مستطيلات متطابقة (او اشكال اخرى متطابقة) ؟ في الواقع يمكن وضع إدعاء افضل –ان البعد ليس اكبر من $\frac{\sqrt{2}}{2}$ م .

ج) على نافذة مربعة الشكل طولها 1 م تتحرك 10 حشرات . بيّنوا انه في اي لحظة يوجد على الاقل زوج من الفراشات البعد بينهما أقل 50 سم .
د) اقترحوا مسالة مشابهة يكون فيها عدد الحشرات 17 وحلها.
ه) اقترحوا مسالة مشابهة يكون فيها عدد الحشرات 26 وحلها.
و) كم نقطة علينا ان ندخل في مربع طول ضلعه 1م، لنضمن وجود زوج نقاط البعد بينهما يكون على الأكثر $\frac{\sqrt{2}}{4}$م ؟ $\frac{\sqrt{2}}{5}$م ؟ $\frac{\sqrt{2}}{\mathbf{n}}$ م (n هو عدد طبيعي)؟ اشرحوا.

مسالة 13 :

ما هو أكبر بُعد ممكن أن يكون بين نقطتين موجودتين داخل مثلث متساوي الاضلاع او على محيطه، اذا كان طول ضلع المثلث هو 1 م ؟ 4 سم ؟ 0.5 م ؟ a سم (a>0)؟ اشرحوا .

مسالة 14:

أ) في داخل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 1 م يوجد 5 نقاط . بيّنوا انه يوجد على الاقل زوج من النقاط البعد بينهما على الأكثر $\frac{1}{2}$م

إرشاد : ارجع الى الارشاد في مساله 12 ولائموا ذلك لشروط هذه المسألة.

ب) في داخل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 1 م يوجد 10 نقاط . بيّنوا انه يوجد على الاقل زوج من النقاط البعد بينهما يكون على الأكثر $\frac{1}{3}$م

ج) كم نقطه علينا ان ندخل في نفس المثلث , لنضمن وجود زوج نقاط يكون البعد بينهما على الأكثر $\frac{1}{4}$م ؟ $\frac{1}{5}$م ؟ $\frac{1}{\mathbf{n}}$م (n هو عدد طبيعي)؟ اشرحوا.

توسيع مبدأ برج الحمام

مساله 15

أ) ادخلنا 20 حمامة في برج به 6 خلايا . هل يمكننا الاستنتاج انه بالتأكيد يوجد خلية فيها اكثر من حمامه؟ هل يمكننا الاستنتاج انه بالتأكيد يوجد خلية فيها اكثر من حمامتين ؟ هل يمكننا الاستنتاج انه بالتأكيد يوجد خلية فيها اكثر من 3 حمامات؟ هل يمكننا الاستنتاج انه بالتأكيد يوجد خلية فيها اكثر من 4 حمامات؟ اشرحوا.

ب) ما هو اقل عدد علينا ان ندخل في برج فيه 6 خلايا لنكون متأكدين انه توجد خلية فيها اكثر من حمامه واحده ؟ اكثر من حمامتين ؟ اكثر من 3 حمامات ؟ اكثر من 4 حمامات؟ اكثر من 5حمامات؟

ج) افحصوا مسائل مشابهة فيها 21 حمامه و5 خلايا , او 24 حمامه و7 طاقات.

د) حاولوا ان تعمموا.

راينا في مسالة 15 انه اذا يوجد في برج 6 خلايا وعلينا ان ندخل 20 حمامة، يمكن الاجابة عن الأسئلة بواسطة العلاقة بين الخلايا والحمامات : $20 = 6 \times 3 + 2$.

بهذا التمثيل لعدد الحمامات ، يمكننا ان نبين طريقة ادخالها إلى الخلايا.

طريقه اولى هي ان ندخل اولا 18 (6×3) حمامة الى الخلايا .إذا أدخلنا عدد متساوٍ إلى كل خلية ، يكون 3 حمامات في كل واحدة. وبعدها ندخل الحمامتين ألباقيتين ، وبذلك نكون قد زدنا عدد الحمامات في إحدى الخلايا، هذا يعني أنه يوجد على الاقل خلية واحدة فيها أكثر من 3 حمامات . لذا يمكن القول بالتأكيد أنه توجد خلية فيها 4 حمامات او اكثر.

بالمقابل، اذا أدخلنا أول 18 حمامه الى الخلايا بحيث يكون في خلية ما اقل من 3 حمامات ، عندها اذا يجب ان تكون خلية فيها اكثر من 3 حمامات وذلك قبل ان ندخل الحمامتين الباقيتين.

لذلك يمكننا الاستنتاج انه بالتأكيد يوجد خلية فيها 4 حمامات على الأقل, ولكن ليس بالتأكيد يوجد خلية فيها 5 حمامات.

مبدا برج الحمام العام
اذا وجدت m خلايا في البرج ، ووجد اكثر من $m \cdot k$ حمامات التي نريد إدخالها للخلايا (k عدد طبيعي) ، يكون على الاقل خلية واحدة فيها اكثر من k حمامات.

افحصوا ماذا يحدث عندما يكون $k = 1$ ، وما هي العلاقة مع مبدأ برج الحمام الذي عرفتموه في بداية الفصل؟

ارجعوا الى المسألة 15 وحلوها حسب مبدا برج الحمام العام.

تطبيقات لمبدأ برج الحمام العام

<u>مسألة 16</u>

خرجت مجموعة مكونة من 12 تلميذًا لغرس الأشجار. وقد غرسوا 75 شجرة.

بيّنوا بالاستعانة بمبدأ برج الحمام العام انه يوجد تلميذ قد غرس 7 شجرات على الأقل.

إرشاد: التلاميذ كالخلايا في البرج، والشجرات كالحمام التي ندخلها إلى الخلايا .
حسب معطيات المسالة يوجد $12 \times 6 + 3 = 75$ حمام و12 تلميذاً.

<u>مسألة 17</u>

في كيس مغلق يوجد 18 حبة ملبس بطعم النعناع، 15 حبة ملبس بطعم ألليمون، و10 حبات ملبس بطعم التوت.

احمد خالد وعمر يريدون ان يأكلوا حبة ملبس من نفس الطعم.

أ) كم حبة ملبس يكفي ان نخرج من الكيس لنكون متأكدين ان يأخذ كل منهم حبة من نفس الطعم؟ اشرحوا.
ب) اذا انضم بديع اليهم ، كم حبه ملبس علينا ان نخرج الآن حتى نكون متاكدين ان كل واحد منهم يأخذ حبة من نفس الطعم؟ اشرحوا.
ج) اقترحوا مسائل مشابهة يكون فيها عدد الأنواع وعدد الأولاد مختلف وحلوها.
د) حاولوا ان تعمموا ، اشرحوا.

<u>مسألة 18</u>

في صف 40 تلميذًا

أ) هل من الممكن ان لا يكون تلميذان قد ولدا في نفس الشهر ؟ اشرحوا.
ب) هل من الممكن ان لا يكون ثلاثة تلاميذ قد ولدوا في نفس الشهر ؟ اشرحوا.
ج) هل من الممكن ان لا يكون أربعة تلاميذ قد ولدوا في نفس الشهر ؟ اشرحوا.
د) هل من الممكن ان يكون هناك شهر لم يولد فيه أي تلميذ في هذا الصف؟اشرحوا.
ه) ما هو اقل عدد من التلاميذ الذي يجب أن يكون في الصف لنضمن وجود شهر واحد على الأقل قد ولد فيه أكثر من 4 تلاميذ ؟ اشرحوا.
و) بينوا كيف يُطبق مبدأ برج الحمام العام في حل هذه المسالة.

مسألة 19

معلوم ان عدد الشعرات في راس كل انسان هو على الأكثر 300,000 شعرة ، في لواء تل ابيب يسكن اكثر من 1,000,000 شخص.

أ) هل يمكننا الاستنتاج انه بالتأكيد يوجد في لواء تل ابيب 4 اشخاص على رأسهم نفس العدد من الشعرات ؟ اشرحوا.
ب) ما هو اقل عدد من السكان يجب ان يكون في لواء ما لنكون متأكدين انه يوجد 4 اشخاص على راسهم نفس العدد من الشعرات ؟ اشرحوا.
ج) ما هو اقل عدد من السكان يجب ان يكون في لواء ما لنكون متأكدين انه يوجد 5 اشخاص على راسهم نفس العدد من الشعرات ؟ اشرحوا.
د) اكتبوا مسائل مشابهة ، حلوها وعمموا.

مسألة 20 :

أ) سجلوا 10 أعداد مختلفة ، واحسبوا ما هو معدل الحساب للأعداد ؟
ب) جدوا بين الاعداد التي اخترتموها عددًا أكبر من المعدل وعددًا آخر أصغر من المعدل.
ت) ارجعوا وحلوا البندين ا و ب بالنسبة لـ 10 أعداد أخرى ليست كلها متساوية ، و لـ 15 عددًا آخر مختلفًا .
ث) حاولوا تعميم النتائج والشرح ؟
ج) ما وجه الشبه بين الشرح في البند د مع مبدأ برج الحمام العام .
ح) اثبتوا الادعاء الاتي :

ادعاء 2 (مبدأ المعدل) :

في كل مجموعة أعداد ليست كلها متساوية ، يوجد عدد أكبر من المعدل الحسابي لكل الاعداد في المجموعة ، وعدد أصغر من المعدل الحسابي لكل الاعداد في المجموعة.

نقاط للتفكير :

- الادعاء 2 صحيح بالنسبة لكل مجموعة أعداد، ولكن بالعلاقة مع مبدأ برج الحمام ، يكفي أن نتناول مجموعة الاعداد الطبيعية ، وذلك لأن مبدأ برج الحمام يعالج حالات يكون فيها عدد (طبيعي) خلايا عدد (طبيعي) حمامات .
- العلاقة بين مبدأ برج الحمام العام وبين مبدأ المعدل غير مباشرة – حاولوا اكتشاف علاقة بين طرق اثبات صحة الإدعاءات في المبدأين .

مسألة 21

في صف 41 تلميذًا ، , عمل يوسف 13 خطأً في الامتحان ، وكان عدد أخطاء بقية التلاميذ أقل منه .
بينوا ان هنالك 4 تلاميذ على الاقل قد عملوا نفس عدد الاخطاء . اشرحوا بمساعدة مبدأ برج الحمام العام وبمساعدة مبدأ المعدل .

مسألة 22:

مع روني 70 حجر نرد ، لكل واحد لون خاص . عدد الالوان المتشابهة اقل من 10 . بينوا ان بين احجار النرد التي مع روني يوجد 8 احجار نرد لهم نفس اللون .

<u>مسائل اضافية :</u>

حلوا كل واحدة من المسائل حسبما تروه مناسبًا ، وبطرق مختلفة قدر الامكان. لكل مسألة، جدوا طريقة لحلها بحسب مبدا برج الحمام (العادي أو المعمم) . فسروا، وحددوا ما هي "الخلية" وما هي "الحمامة" .

<u>مسألة 23 :</u>

في لعبة شطرنج (لوحة لعب اسود وابيض 8×8)، يمكن تحريك الحصن على اللوح بخط مستقيم الى اليمين أو إلى اليسار ، أو إلى فوق أو إلى تحت . لا يوجد تحديد لطول قفزة الحصن. (يعني : يمكن أن يتحرك على عدد من المربعات بدون تحديد) . حصن أ "يهدد" الحصن ب إذا كان وقف الحصن ب في مساره . كم حصنًا على الاكثر يمكن أن نضع على لوحة الشطرنج في نفس الوقت ، بحيث لا يهدد أحدهما الآخر ؟

<u>مسألة 24 :</u>

في خزانة الاحذية يوجد أحذية لونها أحمر ، وأحذية لونها أبيض وأخرى لونها أسود. من كل حذاء يوجد نوعان: حذاء مع رباط وأخر بدون رباط . من دون أننظر لداخل الخزانة ، وبدون أن نرى الحذاء الذي نُخرجه كم حذاء علينا إخراجه من الخزانة لنضمن إخراج زوج حذاء ملائم واحد على الاقل؟

<u>مسألة 25 :</u>

أ) في مدرسة معينة يوجد 500 تلميذًا. هل من الممكن ان نستنتج بالتأكيد أن هناك تلميذين على الاقل قد ولدوا في نفس اليوم ؟ فسروا
ب) في مدرسه اخرى يوجد 350 تلميذًا. هل من الممكن ان نستنتج بالتأكيد أن هناك تلميذين على الاقل قد ولدوا في نفس اليوم ؟ فسروا
ت) ما هو أقل عدد ممكن لتلاميذ في مدرسة لنضمن بالتأكيد أن هناك تلميذان على الاقل قد ولدوا في نفس اليوم ؟

<u>مسألة 26:</u>

خرجت مجموعة مكونة من 11 تلميذًا لزراعة الاشجار . زرعت المجموعة 67 شجرة .

أ) بينوا بمساعدة مبدأ المعدل ان هناك تلميذ قد زرع 7 شجرات .
ب) قارن مع جواب المسألة 16 .
ج) ألفوا مسائل اخرى التي حلت بنفس الطريقة .

<u>مسألة 27 :</u>

معطى مكعب سُجل على أوجهه الارقام من 1 – 6 (ليست حتماً كما في حجر النرد) . بيّنوا أنه في كل طريقة تسجيل لهذه الارقام ، دائمًا يمكن أيجاد عددين متتاليين لهما ضلع مشترك.

<u>مسأله 28 :</u>

نتمعن في الارقام $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. نختار أية 6 ارقام من المجموعة . بينوا ان في كل اختيار، دائما هناك زوج اعداد مجموعهما 9 .

<u>مسألة 29 :</u>

بينوا انه في كل 100 سنه متتالية هناك على الاقل 15 سنة يكون فيها الاول من كانون ثاني هو نفس اليوم من ايام الاسبوع .

مسألة 30 :

بينوا ان في كل مجموعة مؤلفه من 50 شخص هنالك على الاقل 8 اشخاص يكون الفرق بين اعمارهم ينقسم على 7 بدون باقٍ.

مسألة 31 :

بينوا ان بين كل 2000 عدد طبيعي مختلفًا ، يوجد عددان الفرق بينهما ينقسم على 1999 بدون باقٍ .

مسألة 32 :

برهنوا ان هناك عددان طبيعيان مختلفان a, b يحققان $2^a - 2^b$ يقبل القسمة 57 بدون باقٍ؟
كيف يمكن تعميم هذه المسألة ؟

ارشاد : كم عددًا مختلفًا من الصورة 2^k يوجد لقيم طبيعية مختلفة ل k؟ لحل المسألة يمكن المساعده بالادعاء 1 ، بالنسبة لقسمة فروق أعداد طبيعية .

مسألة 33 :

معطى 12 عدد مختلف من المجموعة $\{10,11,12, ... 99\}$. بينوا ان بينهم عددين الفرق بينهما هو عدد مؤلف من رقمين مختلفين . اشرحوا؟

مسألة 34 :

في حفلة اشترك 20 شخصًا :

أ) هل يوجد في الحفلة شخصان على الاقل لهما نفس عدد الاصدقاء (انتبه ان "الصداقة هي صفة تبادلية، اي انه اذا كان شخص أ هو صديق لشخص ب يعني شخص ب هو صديق لشخص أ). اشرحوا ؟

ب) هل ، اذا كان الجواب نعم كيف يتغير جواب البند أ ، اذا اشترك في الحفله 30 شخصًا ؟ اشرحوا؟

ج) هل، اذا كان الجواب نعم كيف يتغير جواب البند أ، اذا اشترك في الحفلة n اشخاص (nهو عدد طبيعي) ؟ اشرحوا؟

ارشاد للبند أ : اذا عددنا لكل شخص في الحفلة عدد اصدقائه، ما هي كل الاعداد الممكنه التي يمكن الحصول عليها ؟ اعطوا رأيكم :هل يمكن أن يكون لشخص واحد 19 صديق ولشخص اخر لا يكون اي صديق ؟

مسألة 35 :

هل بين 65 عددًا صحيحًا مختلفًا يوجد دائماً 9 اعداد مجموعها ينقسم على 9 بدون باقٍ، اشرحوا ؟
اقترحوا مسائل مشابهة ، حلوا ، وعمموا ؟

ارشاد : مجموع 9 اعداد صحيحة يمكن ان ينقسم على 9 اذا كان لكل عدد يوجد باقي مختلف عند قسمته على 9 (لماذا) او اذا كان لجميعها نفس الباقي عند قسمته على 9 (لماذا) ؟ من المفضل تجميع الاعداد المعطاة لمجموعات(خلايا) بحسب الباقي من القسمة على 9 ، وتحليل الحالات التي يمكن أو يجب أن تتحقق.

مسألة 36 :

اشترك في السباق 100 عداء . معروف ان بين كل 12 عداء هناك 2 يعرف احدهما الاخر. وزعت ارقام للعدائين (ليس بالضرورة تسلسلية). بينوا ان هنالك عداءين يعرف احدهما الاخر وأرقامهما تبدءان بنفس المنزلة.

ارشاد : من المفضل تقسيم ال 100 عدد الذين اعطوا للعدائين إلى مجموعات حسب المنزلة الاولى في العدد . ما هو العدد الاكبر من المجموعات التي يمكن الحصول عليه حسب هذه الطريقة .

مسأله 37 :

لاجتماع مجلس التلاميذ حضر 11 ممثل من 4 صفوف، هل من الممكن ترتيب جلوسهم حول طاولة مستديرة، بحيث يكون بين كل خمسة جالسين بجانب بعضهم البعض يكون ممثل عن كل صف ؟ اشرحوا .

ارشاد : كم ممثلًا من كل صف كان قد وصل إلى الاجتماع ؟ هل يمكن أنه وصل 3 (او اكثر) ممثلين عن كل صف ؟ هل من الممكن ان هناك صف قد وصل منه ممثلان بالضبط ؟ هل من الممكن ان هناك صف وصل منه ممثل واحد بالضبط ؟افحصوا كل الاحتمالات المختلفة وكيف تؤثر على ترتيب الجلوس حول الطاولة ؟

مسأله 38 :

في الغرفه 20 شخص. يتصافح الاشخاص فيما بينهم كما يشاءون. لا يوجد زوج يتصافح اكثر من مرة واحدة، بينوا انه من المؤكد هناك شخصان تصافحا نفس عدد المرات.

مسألة 39 :

جلست سلمى ، نور ، ولين سوية ولوّن صورًا في دفتر الرسم. كل اقلام التلوين موجودة في داخل كيس، وهن لا يستطعن رؤية ألوان الاقلام في الكيس. في الكيس 5 اقلام خضراء، 7 اقلام ورديه، 8 اقلام صفراء ، 8 أقلام حمراء .

أ) ما هو أقل عدد من الاقلام علينا إخراجه من الكيس دفعة واحدة ، لكي نضمن أن كل البنات يستعملن قلمًا بنفس اللون ؟ اشرحوا ؟
ب) قررت البنات أن تبدأ بتلوين الشجرة في الرسم ولهذا هن بحاجة للون الأخضر . ما هو أقل عدد من الاقلام عليهن اخراجه الآن ، لتضمنّ الحصول على قلم التلوين الاخضر لكل منهن .
ج) هل، اذا كان الجواب نعم، كيف يتغير جوابك لبند ب اذا أرادت كل البنات اللون الوردي ؟ الاصفر؟
د) هل يمكن الاجابة عن البندين ب – ج اذا لم نعرف كم قلمًا من كل لون يوجد في الكيس؟ وماذا تكون الاجابة اذا كنا نعرف ان هناك 4 اقلام على الاقل من كل لون .

مسأله 40 :

لدى 10 اولاد 40 حبة جوز (انتبه ممكن ان هناك اولاد لا يوجد لديهم حبات جوز ، اي أن عدد حبات الجوز لديهم هو 0)

أ) بينوا ان هناك ولدين على الاقل لديهما نفس العدد من حبات الجوز .
ب) ماذا اذا كان 8 أولاد بدل 10 ولديهم 40 حبة جوز ؟ هل في هذه الحالة من المؤكد أن هناك ولدين لديهما نفس عدد حبات الجوز ؟ اشرحوا
ج) ماذا اذا كان لدى 10 اولاد 45 حبة جوز ، هل من المؤكد ان هناك ولدان لديهما نفس عدد حبات الجوز ؟اشرحوا؟

ارشاد لبند ا : هل من الممكن ان لكل ولد عدد مختلف من حبات الجوز ؟ اذا كان نعم ما هو اصغر عدد من حبات الجوز لكل الاولاد سوية ؟ هل توصلتم الى تناقض في الاجابة ؟

ورقة القصّ "تانچرام"

ورقة جداول