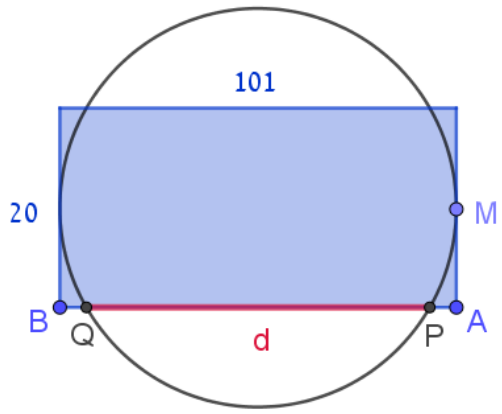
אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'2- תש"פ 28.10.19
תלמידי תיכון + פיתרון

1. חברי השכבה חולקו לקבוצות – חלקן בנות ארבעה תלמידים וחלקן בנות חמישה תלמידים. כאשר שאלו כל ילד "כמה ילדים יש בקבוצה שלך?" וחישבו את ממוצע התשובות, התקבלה התוצאה 4.25. מצאו את כמות הילדים בשכבה, אם ידוע שהיא קטנה מ-100.

פתרון. נבקש מכל ילד לכתוב על דף נייר את כמות הילדים בקבוצה שלו פחות 4.25. הילדים ששייכים לרביעיות יכתבו -0.25 והילדים ששייכים לחמישיות יכתבו 0.75. הממוצע של המספרים הרשומים הוא 0 (כי החסרנו את הממוצע), ולכן גם הסכום 0. לכן יש פי 3 ילדים שנמצאים ברביעיות מאשר כמות הילדים שנמצאים בחמישיות; נגיד ש-X ילדים נמצאים בחמישיות, ו-3X ברביעיות. אז X מתחלק ב-5, וגם 3X מתחלק ב-4, לכן X מתחלק גם ב-4 וגם ב-5, לכן X הוא כפולה של 20. סה"כ יש 4X ילדים, וזה כבר כפולה של 80. אם זה קטן מ-100 אז זה בהכרח 80 ילדים.

אם רוצים לקבל את הערך המינימלי, צריך שיהיו 60 ילדים ברביעיות ו-20 בחמישיות, כלומר 15 רביעיות ו-4 חמישיות, וזה אפשרי.

2. נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 20 ו-101, ונתון מעגל שמשיק לאמצעי הצלעות הקצרות של המלבן (ראו ציור). הצלע הארוכה של המלבן חותכת את המעגל בשתי נקודות, שהמרחק ביניהן הוא d. מצאו את d.



פתרון. נסמן A, B הקודקודים של הצלע הארוכה, P, Q נקודות החיתוך של אותה הצלע עם המעגל, M היא אמצע הצלע הקצרה שמכילה את A ולא את B.

אז $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\mathrm{AM}^2=100$.

$$\mathrm{AP}+\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}+\mathrm{AQ}=\mathrm{AB}=101$$

ולכן AP, AQ הם שני מספרים שסכומם 101 ומכפלתם 100, שהם 1 ו-100.

אז $d=\mathrm{AQ}-\mathrm{AP}=99$.

3. בהינתן שני מספרים שלמים x,y, נגדיר את mink(x,y) להיות הקטן מבינהם אם x+y זוגי, או הגדול מבינהם אם x+y אי-זוגי. לכל זוג מספרים מבין 1, 2, 3,...,100, אבי חישב את ה-mink שלהם. חשבו את סכום התוצאות שקיבל.

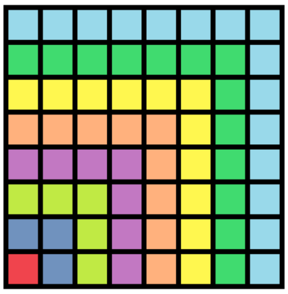
פתרון. נחלק את המספרים לזוגות:

$$(100\,,99)\quad,\quad(98\,,97)\quad,\quad...\quad,\quad(6\,,5)\quad,\quad(4\,,3)\quad,\quad(2\,,1)$$

נשאל על מספר כלשהו N כמה פעמים הוא נבחר בתור $\text{mink}(x,N)$. נשים לב שאם ננסה לעשות את הפעולה עם N ושני המספרים באחד הזוגות שרשמנו, אז סכום אחד יהיה זוגי והשני אי-זוגי, לכן N יבחר בדיוק באחד מהם.

לכן כל מספר מתקבל בדיוק 49 פעמים, אם לא מתחשבים בזוג מהרשימה שמכיל את N.

כאשר לוקחים את הזוגות שרשמנו, בכל זוג הסכום אי-זוגי, לכן בוחרים את המספר הגדול בזוג, כלומר את המספרים 2, 4, 6, ... , 98, 100. לכן בסה"כ ניתן להגיד שכל מספר מתקבל 50 פעמים, ובסוף להחסיר $1+3+5+7+...+99$.

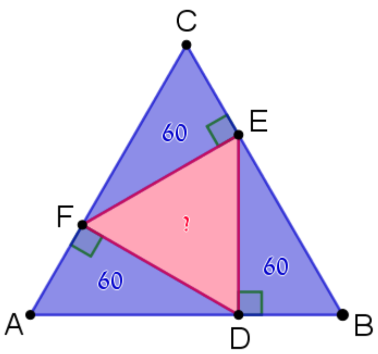


קל לראות כי $1+3+5+7+...+99=50^2$.
בציור רואים הוכחה של כך, שסכום של מספרים אי-זוגיים הוא ריבוע (כמובן שניתם להוכיך את זה גם באינדוקציה).

ובכן, נרצה לחשב את

$$50\cdot(1+2+3+4+...+100)-(1+3+5+...+99)=$$
$$=50\cdot50\cdot101-50^2=50^2\cdot(101-1)=2500\cdot100=250000$$

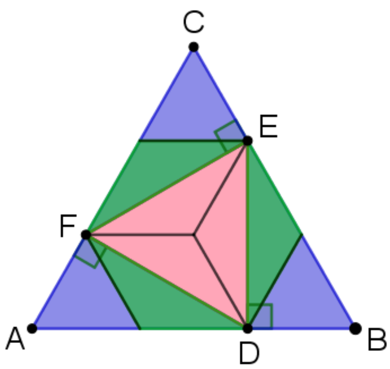
4. על הצלעות AB, BC ו-CA של משולש משוכלל ABC נבחרו נקודות D, E ו-F כך ש-DE מאונך ל-AB, EF מאונך ל-BC, ו-FD מאונך ל-CA, וגם המשולש DEF משוכלל (ראו ציור). שטחו של כל אחד מהמשולשים AFD, BDE, CEF הוא 60. מצאו את שטח המשולש DEF.



פתרון ראשון. נניח כי $\text{AF}=\text{BD}=\text{CE}=x$ (כי התמונה סימטרית). משולש BED ישר זווית, עם זווית של 60°, לכן $\text{BE}=2x$, ומכאן לפי משפט פיתגורס $\text{DE}=\sqrt{3}\cdot x$. הצלע של המשולש ABC היא

$$\text{BC}=\text{BE}+\text{EC}=2x+x=3x$$

ובכן המשולשים ABC, DEF הם משולשים שווי צלעות, הראשון עם צלעות באורך $3x$ והשני עם



צלעות באורך $\sqrt{3}\cdot x$, כלומר היחס בין השטחים שלהם הוא 3. לכן מהמשולש ABC השטח של DEF הוא שליש, וסכום המשולשים הכחולים הוא $\frac{2}{3}$; סכום המשולשים הכחולים הוא 180, והמשולש הוורוד DEF הוא חצי מזה כלומר 90.

פתרון שני. בכל אחד מהמשולשים BED ,FEC ,DAF נעביר תיכון ליתר. כל תיכון כזה מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח (בציור: ירוק וכחול). המשולשים הירוקים יחד עם המשולש DEF יוצרים משושה משוכלל. נחבר את מרכז המשושה לקודקודים D, E ,F. אז המשולש הוורוד מתפרק ל-3 משולשים שחופפים למשולשים הירוקים.

ובכן, השטח הכחול שווה לשטח הירוק ושווה לשטח הוורוד. מראש היה נתון שמשולש שמורכב ממשולש ירוק ומשולש כחול בציור האחרון זה 60, לכן כל משולש ירוק הוא 30, והשטח הוורוד זה סכום של כאלה אז זה 90.

5. יש 5 נורות אדומות, 5 נורות ירוקות ו-5 נורות כחולות (שבהתחלה כולן כבויות). במהלך אחד אפשר לבצע בדיוק אחת מבין הפעולות הבאות:

- להדליק נורה אדומה.
- לכבות שתי נורות אדומות ולהדליק נורה ירוקה.
- לכבות שתי נורות ירוקות ולהדליק נורה כחולה.

מה הוא המספר המינימלי של מהלכים שיש לבצע על מנת להדליק את כל הנורות?

פתרון. ניתן לכל נורה דלוקה משקל בהתאם לצבע:

משקל 1 לנורה אדומה.

משקל 3 לנורה ירוקה.

משקל 7 לנורה כחולה.

בכל מהלך המשקל עולה ב-1.

בהתחלה אף נורה לא דלוקה והמשקל הכולל 0, בסוף דולקות 5 נורות מכל צבע והמשקל הכולל הוא $5\cdot(1+3+7)=5\cdot 11=55$ ולכן צריכים לעשות 55 מהלכים.

6. חשבו את $8\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+4\cdot\frac{\sqrt[4]{3}-1}{\sqrt[4]{3}+1}+2\cdot\frac{\sqrt[8]{3}-1}{\sqrt[8]{3}+1}+\frac{\sqrt[16]{3}-1}{\sqrt[16]{3}+1}+\frac{\sqrt[16]{3}+1}{\sqrt[16]{3}-1}$.

פתרון. נשים לב כי $\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-1}{a+1}=\frac{(a+1)^2+(a-1)^2}{(a-1)(a+1)}=\frac{2a^2+2}{a^2-1}=2\cdot\frac{a^2+1}{a^2-1}$.

מהנוסחה נסיק כי

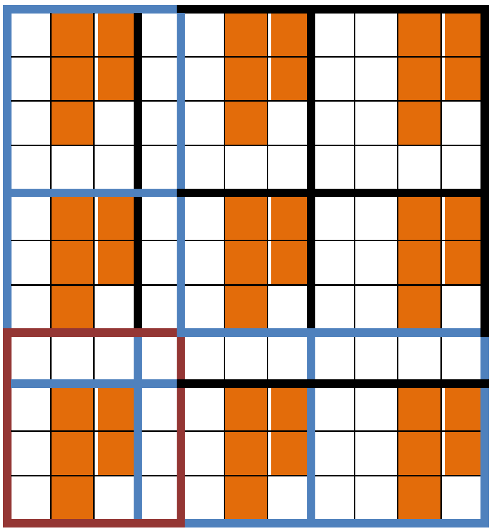
$$\frac{\sqrt[16]{3}+1}{\sqrt[16]{3}-1}+\frac{\sqrt[16]{3}-1}{\sqrt[16]{3}+1}+2\cdot\frac{\sqrt[8]{3}-1}{\sqrt[8]{3}+1}+4\cdot\frac{\sqrt[4]{3}-1}{\sqrt[4]{3}+1}+8\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt[8]{3}+1}{\sqrt[8]{3}-1}+2\cdot\frac{\sqrt[8]{3}-1}{\sqrt[8]{3}+1}+4\cdot\frac{\sqrt[4]{3}-1}{\sqrt[4]{3}+1}+8\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=$$

$$=4\cdot\frac{\sqrt[4]{3}+1}{\sqrt[4]{3}-1}+4\cdot\frac{\sqrt[4]{3}-1}{\sqrt[4]{3}+1}+8\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=8\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+8\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=$$

$$=16\cdot\frac{3+1}{3-1}=16\cdot 2=32$$

7. בלוח משבצות בגודל 11×11 מסמנים מספר משבצות, כך שבכל ריבוע בגודל 4×4 תהיינה בדיוק 5 משבצות מסומנות.

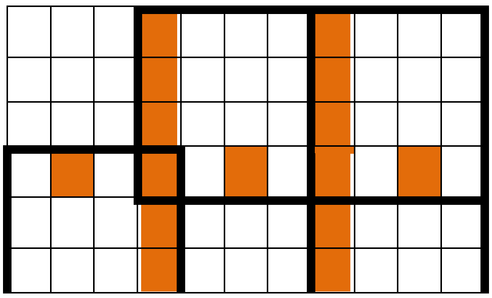


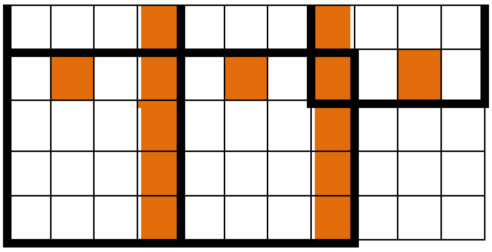
א. מהי הכמות המקסימלית האפשרית של המשבצות המסומנות?

ב. מהי הכמות המינימלית האפשרית של המשבצות המסומנות?

פתרון. נתחיל מסעיף ב' כי הוא יותר קל.

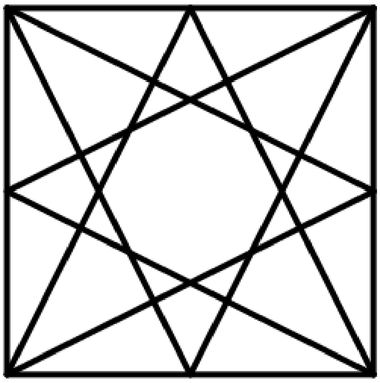
ב. בציור יש דוגמה שבה יש 45 נקודות מסומנות, וכל ריבוע 4×4 מכיל בדיוק 5 נקודות מסומנות. נוכיח שאי-אפשר יותר. נכסה את הלוח על ידי 9 ריבועים 4×4: בשלושה ריבועים ניקח עמודות 1 עד 4, בשלושה ריבועים עמודות 5 עד 8, ובשלושה אחרונים עמודות 8 עד 11; מספרי השורות יהיו גם 1 עד 4, או 5 עד 8, או 8 עד 11 (נשלב כל אפשרות לשורות עם כל אפשרות לעמודות). אז 9 הריבועים מכסים את הלוח לגמרי, ולכן הלוח כולל לכל היותר $9\cdot 5=45$ משבצות מסומנות (וגם זה רק בתנאי שאין משבצות מסומנות שמשותפות לשני ריבועים שנחתכים).





א. בציור רואים דוגמה של 28 משבצות. נוכיח שאי-אפשר פחות. בציור מסומנים גם 6 ריבועים של 4×4; מתוכם יש רק 2 משבצות שמשותפות לשני ריבועים, וכל משבצת אחרת נמצאת רק בריבוע אחד. אם נספור את כל המשבצות המסומנות של 6 הריבועים, נקבל $5\cdot6=30$ משבצות מסומנות, ויכול להיות ששתי משבצות נספרו פעמיים אבל לא יותר, כלומר זה באמת 28 משבצות שונות שבהכרח מסומנות.

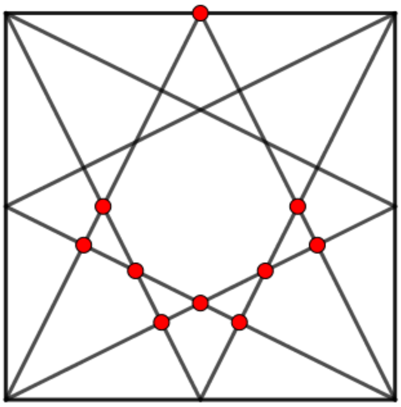
8. כמה משולשים יש בציור?



פתרון. בציור יש 12 קווים: 4 צלעות של ריבוע ו-8 קטעים משופעים. כל קטע משופע פוגש כל קטע משופע אחר חוץ מקטע אחד שמקביל לו. אף 3 קווים משופעים לא נפגשים בנקודה אחת, לכן כל 3 קטעים משופעים שאף שניים מהם לא מקבילים יוצרים משולש.

נגיד ששני קטעים הם באותו הכיוון אם הם מקבילים. הקטעים המשופעים הם ב-4 כיוונים, אם נדלג על אחד מהכיוונים ובכל כיוון נבחר אחד מבין 2 הקטעים שיש, נקבל $4\cdot2^3=32$ משולשים שבנויים מהקטעים המשופעים ולא מערבים את צלעות הריבוע.

אם נרצה לערב שתי צלעות של הריבוע, אלה חייבות להיות שתי צלעות שנוגעות באותה פינה ולא שתי צלעות מקבילות. לריבוע יש 4 פינות, ואחרי שנבחר פינה של ריבוע יש שני קטעים משופעים שפוגשים את שתי הצלעות, לכן במקרה זה מקבלים 8 אפשרויות.



נשאר לספור משולשים בהם צלע אחת מגיעה מצלע של ריבוע. נניח שזו הצלע התחתונה ובסוף נכפיל ב-4. צריך להוסיף שני קטעים משופעים שחותכים את הצלע התחתונה בשתי נקודות שונות, וגם נחתכים בציור. זה כמו לספור צמתים בתוך הריבוע שמהם יש שני שבילים שמובילים עד למטה. בציור יש בדיוק 10 כאלה (מסומנים באדום), לכן סה"כ יש 40 משולשים מסוג זה.

ובכן, יש $32+8+40=80$ משולשים בציור.

9. המספרים x,y,z מקיימים: $xy+4z=yz+4x=zx+4y=12$.

נסמן $s=x+y+z$.

א. מהו ה-s הקטן ביותר האפשרי?
ב. מהו ה-s הגדול ביותר האפשרי?

פתרון. אם $xy+4z=yz+4x$ אז $y(x-z)=4(x-z)$.

מכאן יש שתי אפשרויות או $x=z$ או שאפשר לחלק ב-$x-z$ ואז $y=4$.

באופן דומה או ש-$x=y$ או ש-$z=4$, ובדומה גם $y=z$ או ש-$x=4$.

אם כל 3 המספרים x,y,z שווים זה לזה אז $x^2+4x=12$ ואז $0=(x+6)(x-2)$
מקבלים שני פתרונות: $x=y=z=2$ ובנוסף $x=y=z=-6$.

אם לא כל המספרים שווים, אז אחד מהם שונה מ-4, ושני האחרים שווים זה לזה.

נניח כי $x=y$, ונניח כי $x\neq z$ כי מקרה שכולם שווים כבר נבדק; אז כמו שראינו כבר קודם $y=4$ וגם $x=4$. מהמשוואה $xy+4z=12$ נסיק כי $4+z=3$ לכן $z=-1$.
קל לבדוק שבמקרה זה כל המשוואות הנתונות מתקיימות.

ובכן, מצאנו את כל הפתרונות למשוואה: פתרון אחד הוא $(2,2,2)$, פתרון שני הוא $(-6,-6,-6)$ וסוג נוסף שמכיל 3 פתרונות זה $(4,4,-1)$ בסדר כלשהו.

במקרה הראשון $s=6$, במקרה השני $s=-18$, ובמקרה השלישי $s=7$.

10. מצאו את המחלק הראשוני הגדול ביותר

א. של 111^2+1.

ב. של 421^2+1.

פתרון. נשים לב כי

$$\left(a^2+a+1\right)^2+1=a^4+2a^3+3a^2+2a+1+1=$$
$$=a^4+2a^3+2a^2+a^2+2a+2=\left(a^2+2a+2\right)\left(a^2+1\right)$$

א. נציב $a=10$ בנוסחה ונקבל: $111^2+1=122\cdot101=2\cdot61\cdot101$.

אבל 101 הוא מספר ראשוני, הרי הוא לא מתחלק ב-2, 3, 5, 7 (והוא לא יכול להיות מכפלה של ראשוניים גדולים יותר כי הוא קטן ממש מ-11^2).

ב. נציב $a=20$ בנוסחה ונקבל: $421^2+1=442\cdot401=2\cdot221\cdot401$.

נשים לב כי $10\cdot7\cdot5+3\cdot17=350+51=401$. רק אחד מבין שני המחוברים מתחלק ב-2, כנ"ל עבור 3, 5, ו-7, לכן המספר לא מתחלק ב-2, 3, 5, 7, 17.

בנוסף $10\cdot13\cdot3+11=390+11=401$; רק מחובר אחד מתחלק ב-11, ורק אחד מתחלק ב-13, לכן 401 לא מתחלק לא ב-11 ולא ב-13.

לו 401 היה מתפרק לגורמים, היה לו מחלק ראשונה שקטן מ-20, והאפשרות היחידה שנותרה זה 19, אבל $10\cdot7\cdot6=420=19+401$ וזה לא מתחלק ב-19. לכן 401 ראשוני.

תשובות

1. $\underline{80}$	**2.** $\underline{99}$
3. $\underline{250000}$	**4.** $\underline{90}$
5. $\underline{55}$	**6.** $\underline{32}$
7. **א.** $\underline{28}$ (הכי קטן) **ב.** $\underline{45}$ (הכי גדול)	**8.** $\underline{80}$
9. **א.** $\underline{-18}$ (הכי קטן) **ב.** $\underline{7}$ (הכי גדול)	**10.** **א.** $\underline{101}$ **ב.** $\underline{401}$