אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'1- תש"פ 25.09.19
תלמידי תיכון + פיתרון

1. נתון מלבן בגודל 25×12. מחלקים אותו לשני מלבנים דומים, **אך לא חופפים**. כמה אחוזים משטח המלבן המקורי ממלא המלבן הקטן מבין השניים?

פתרון. הקו שמפריד בין שני המלבנים הוא ישר. לכן אפשר לחלק אותו למלבנים $12\times a$ ומלבן $12\times b$, כאשר $a+b=25$, או למלבן $25\times a$ ומלבן $25\times b$ כאשר $a+b=12$. בכל מקרה, אם המלבנים דומים, אז $a\neq b$, ולכן הדרך היחידה שהמלבנים יהיו דומים זה ש- $\frac{12}{b}=\frac{a}{12}$ במקרה הראשון, או $\frac{25}{b}=\frac{a}{25}$ במקרה השני.

כלומר $\sqrt{ab}$ הוא אורך הצלע של המלבן המקורי, כאשר $a+b$ הוא אורך הצלע האחר. לכן המקרה השני נפסל: לא יתכן שסכום המספרים הוא 12 והממוצע ההנדסי הוא 25. לכן סכום המספרים הוא 25 והממוצע הוא 12.

מכאן קל לנחש כי a,b הם 9 ו-16.

אפשר להבין את זה גם ממשפט וייטא ללא ניחוש: אם $ab=12^2$ ובנוסף $a+b=25$ אז a ו-b מקיימים משוואה ריבועית $x^2-25x+12^2=0$ ומכאן קל למצוא את שניהם כפתרונות של משוואה ריבועית.

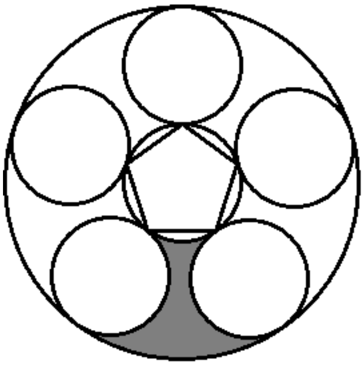
מכאן קל לחשב כי המלבן הקטן הוא $36\%=\frac{36}{100}=\frac{9}{25}$ מהשטח.

2. מצאו את כמות המספרים בין 1 ל-10^{12} (כולל) שהם ריבוע של מספר שלם אבל לא חזקה שלישית של מספר שלם.

פתרון. אם מספר בין 1 ל-10^{12} הוא n^2, אז n הוא בין 1 ל-10^6. אז יש 10^6 ריבועים, וצריך להוריד את כל החזקות השלישיות. אם ריבוע הוא גם חזקה שלישית אז הוא גם חזקה שישית. אבל אם מספר בין 1 ל-10^{12} הוא k^6, אז k הוא בין 1 ל-10^2.

ובכן, צריכים להוריד מ 10^6 את 10^2 מספרים, ומתקבל $10^6-10^2=999900$.

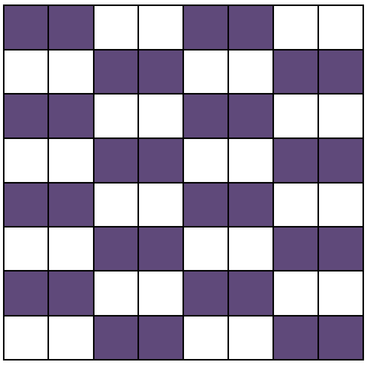
3. נתון מחומש משוכלל שחסום במעגל. נתונים 5 מעגלים נוספים ששווים בגודלם למעגל זה ומשיקים לו – כל אחד מהם משיק בקודקוד אחר של המחומש (ראו ציור). בנוסף, כל חמשת



המעגלים משיקים מבפנים למעגל גדול. ידוע ששטח המעגל הגדול שווה ל-900. מצאו את גודל השטח המושחר בציור.

פתרון. נתבונן בטבעת הנוצרת בין המעגל הקטן במרכז למעגל הגדול.בתוך הטבעת 5 מעגלים באותו גודל כמו המעגל הפנימי. ניתן לצייר מעגל נוסף באותו גודל כמו המעגלים הקטנים, כך שיהיה נגדי לאחד המעגלים שכבר נמצאים בתוך הטבעת. אז נראה שהקוטר של המעגל הקטן קטן פי 3 מהקוטר של המעגל הגדול. לכן השטח של העיגול הקטן הוא בדיוק תשיעית מהשטח של העיגול הגדול. לכן 5 צורות כמו השטח המושחר זה כמו השטח של העיגול הגדול פחות 6 תשיעיות שלו, כלומר 3 תשיעיות מהעיגול הגדול. העיגול הגדול הוא 900, לכן 3 תשיעיות ממנו זה 300. החלק המושחר זה חמישית מזה שזה 60.

4. מניחים N אבני דומינו על גבי לוח 8×8, כך שכל אחת מהן תופסת בדיוק 2 משבצות. אסור שלשתי אבני דומינו יהיה קטע גבול משותף (אבל מותר שיהיה להן קודקוד משותף), ואסור שתעלינה זו על זו (כלומר, אסור להניח שתי אבנים על אותה המשבצת). מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של N?



פתרון. בציור דוגמה עם 16 דומינו. נוכיח שאי-אפשר יותר. ניתן לחלק את הלוח 8×8 ל-16 ריבועים 2×2, וקל לראות שבכל ריבוע 2×2 יש לפחות 2 משבצות פנויות. אכן, אם בריבוע כזה נמצא דומינו אז בסמוך אליו נוצרים 2 משבצות ריקות בתוך הריבוע 2×2 הזה.

בכל מקרה, יש לכל היותר 32 משבצות (שתי משבצות בכל אחד מהריבועים 2×2) שאמורות להכיל את הדומינו האלה, וזה אומר לכל היותר 16 דומינו.

5. חשבו את

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}}}{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{997}+\sqrt{1000}}-\sqrt{111}+\frac{\sqrt{2}}{3}}.$$

פתרון. נשים לב כי $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=1$.

כמו כן $\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)=3$. מכאן

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}}}{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{997}+\sqrt{1000}}-\sqrt{111}+\frac{\sqrt{2}}{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{1000}-\sqrt{999}}{\frac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{3}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{3}+\ldots+\frac{\sqrt{1000}-\sqrt{997}}{3}-\frac{\sqrt{999}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}}=3$$

(הרי כל שורש של מספר זוגי מ-2 עד 1000 מופיע במונה ובמכנה עם סימן חיובי, וכל שורש של מספר אי-זוגי מ-1 עד 999 מופיע במונה ובמכנה אם סימן שלילי.)

6. אלכס עובר על המספרים מ-100 עד 500, ולכל אחד מהם הוא בודק אם הוא מתחלק ב-2, 3, 5, 7, ו-11. אם המספר מתחלק באחד מהם, אלכס מכריז שהמספר לא ראשוני, ואחרת הוא מכריז שהמספר "כנראה-ראשוני". ידוע שיש 70 מספרים ראשוניים בין 100 ל-500. כמה מספרים "כנראה-ראשוניים" אלכס מצא?

פתרון. מצד אחד, אלכס יציין את ה-70 המספרים שהם באמת ראשוניים; מצד שני, הוא יציין את כל המספרים שהם "כנראה-ראשוניים" אבל לא באמת ראשוניים. מספר כזה יהיה מכפלה של שניים או יותר ראשוניים שהם מעל 11, כלומר 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 וכו'. נשים לב כי 41 זה כבר גורם גדול מדי, כי הגורם הנוסף הוא לפחות 13, והרי $13\cdot 41=410+123>50$. אבל 37 עוד יכול להיות גורם של מספר "כנראה-ראשוני", הרי $37\cdot 13=370+111=481$.

לכן יש 7 אפשרויות של $p\cdot 13$, כאשר p הוא ברשימה של 7 המספרים שרשמנו.

בנוסף יש גם 4 מספרים "כנראה-ראשוניים" מהסוג $p\cdot 17$, כאשר p הוא 17, 19, 23 או 29, הרי $17\cdot 29=17\cdot(30-1)=510-17<500$. כמובן כל כפולה יותר גדולה של 17 כבר מחוץ לתחום, אפילו $17\cdot 30$ גדול מדי.

בנוסף גם יש עוד שתי אפשרויות 19^2, $19\cdot 23$, הרי $19\cdot 23<20\cdot 25=500$.

אבל $19\cdot 29=(20-1)(30-1)=600-50+1>500$.

אם כל הגורמים גדולים מ-19, אז המכפלה היא לפחות

$$23^2=400+2\cdot 20\cdot 3+9=400+120+9>500$$

וזה גדול מדי.

ובכן, בנוסף ל-70 מספרים ראשוניים יש $7+4+2=13$ מספרים "כנראה-ראשוניים" שאינם ראשוניים, ובסה"כ יש 83 כנראה ראשוניים.

7. בחפיסה יש 52 קלפים בארבעה צבעים שונים – 13 מכל צבע. רביעיית קלפים תיקרא סֶט אם ארבעתם באותו צבע, או אם ארבעתם בצבעים שונים. חילקו את החפיסה בין מספר שחקנים (לא בהכרח שווה בשווה), כך שאף שחקן לא יכול להרכיב סט מבין הקלפים שלו. מהי כמות השחקנים הקטנה ביותר עבורה זה אפשרי?

פתרון. כל אחד מבין השחקנים חייב שיהיה צבע שחסר לו. לכן אם יש 6 שחקנים בלבד, אז יש צבע שחסר לשני שחקנים בו-זמנית. כל אחד מ-4 השחקנים האחרים יכול לקבל רק 3 קלפים בצבע זה, לכן ביחד יש להם רק 12 קלפים, ולכן לא כל הקלפים חולקו: הרי בצבע הזה יש 13 קלפים.

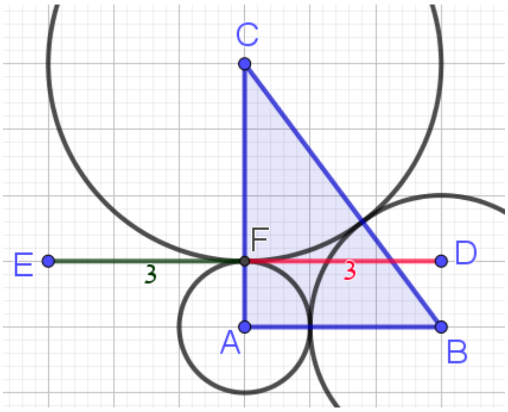
לכן 6 שחקנים לא מספיק, ובטח גם פחות שחקנים לא מספיק.

אבל אם יש 7 שחקנים, אפשר לחלק את הקלפים בהתאם לטבלה (כל שורה מסמנת צבע מסוים, המספר שרשום בכל משבצת הוא של השחקן שאמור לקבל את הקלף):

6	5	5	5	3	3	3	2	2	2	1	1	1
7	5	5	5	4	4	4	2	2	2	1	1	1
7	5	5	5	4	4	4	3	3	3	1	1	1
7	6	6	6	4	4	4	3	3	3	2	2	2

8. נתונים מעגלים ברדיוסים 1,2,3 המשיקים זה לזה; אף אחד מהמעגלים לא נמצא בתוך אף מעגל אחר. נתונה נקודה X כך שאורך המשיק ממנה למעגל שרדיוסו 1 שווה ל-3, ואורך המשיק ממנה למעגל שרדיוסו 3 גם שווה ל-3. אורך המשיק מ-X למעגל שרדיוסו 2 הוא M. חשבו את $\mathbf{M^2}$.

פתרון. המרחקים בין מרכזי 3 המעגלים הם הסכומים של הרדיוסים: $2+3$, $1+3$, $1+2$, כלומר $3,4,5$. המשולש שצלעותיו $3,4,5$ הוא משולש ישר זווית בגלל משפט פיתגורס. לכן ניתן לצייר את התמונה על דף משבצות, כאשר הצלע באורך 3 אופקית והצלע באורך 4 אנכית.



נסמן ב-A‏, B‏, C את מרכזי המעגלים שרדיוסיהם 1, 2, 3 בהתאמה. נמשיך את המשיק הפנימי המשותף של המעגלים עם מרכזים A ו-C לשני הכיוונים למרחק 3 מנקודת ההשקה. בצד אחד נקבל נקודה D שהיא בתוך המעגל שרדיוסו 2, ולכן היא לא רלוונטית; בצד האחר נקבל נקודה E שנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו B.
המרחק מ-B ל-E בציר ה-x הוא 6 ובציר ה-y הוא 1, לכן לפי משפט פיתגורס המרחק הוא $BE^2=6^2+1=37$.

המשיק מ-E למעגל שמרכזו B באורך M, הקטע BE ורדיוס המעגל שהוא שווה ל-2 יוצרים משולש ישר זווית, לכן לפי משפט פיתגורס $M^2+2^2=37$, כלומר $M^2=33$.

9. הסדרה a_n מקיימת $a_{mn+m+n}=a_m+a_n$ לכל m,n טבעיים, כך שמתקיים

$$a_1=1,\quad a_{24}=24,\quad a_{100}=100$$

חשבו את a_{2019}.

פתרון. נגדיר סדרה $b_m=a_{m-1}$, או במילים אחרות $b_{m+1}=a_m$.

$$b_{(m+1)(n+1)}=b_{mn+m+n+1}=b_{m+1}+b_{n+1}$$

הנתונים בסימונים אלה הם: $b_2=1,\ \ b_{25}=24,\ \ b_{101}=100$.

לכן $b_5+b_5=b_{25}=24$, כלומר $b_5=12$. אז

$$a_{2019}=b_{2020}=b_{10}+b_{202}=b_5+b_2+b_2+b_{101}=12+1+1+100=114$$

10. במרחב, קובייה $10\times10\times10$ מחולקת ל-1000 קוביות $1\times1\times1$. רוצים להעביר ישר במרחב כך שכמות הקוביות הקטנות שהוא עובר בחלקן הפנימי תהיה גדולה ככל האפשר. מהי הכמות המרבית שניתן להשיג?

פתרון. הקוביה מופרדת לחלקים באמצעות 9 מישורים בכיוון אחד, 9 מישורים בכיוון שני, ו-9 מישורים בכיוון שלישי. כל מישור כזה יכול לחתוך ישר לכל היותר פעם אחת. לכן יכולים להיות לכל היותר 27 נקודות בהם הישר עובר מצד אחד של מישור לצד האחר שלו, לכן הישר יכול לעבור לכל היותר ב-28 קוביות קטנות.

אם ישר חותך את שני המישורים באותה נקודה, זה אומר שהישר חותר את ישר החיתוך של שני המישורים. במקרה זה ניתן להזיז את הישר בקצת כך שהוא יחתוך את כל המישורים בנקודות שונות.

ישר שמחבר שתי פינות נגדיות של הקוביה חותך את כל 27 המישורים המפרידים בדרך, אבל הוא חותך כל פעם 3 מישורים בו-זמנית, ואם נזיז אותו קצת אז נקבל את הישר הרצוי.

נבחר מערכת צירים כך שהראשית היא קודקוד הקוביה, והצירים הם 3 המקצועות מהקודקוד. הישר של כל הנקודות מהסוג $\left(t,t+0.01,t+0.02\right)$ יחתוך את כל המישורים המפרידים בנקודות שונות, כי לא יתכן ששתי קואורדינאטות שונות שלמות עבור אותו הערך של t. לכן הישר אכן יחתוך 28 משבצות שונות, וזה המקסימום האפשרי.

תשובות:

1. 36 **%**	**2.** 999900
3. 60	**4.** 16
5. 3	**6.** 83
7. 7	**8.** 33
9. 114	**10.** 28