חשיפה לנבחרות ישראל במדעים – נבחרת מדעי המחשב

נושא השיעור: רקורסיה

משך זמן השיעור: כחצי שעה

חומרי עזר: טוש ולוח

מטרות השיעור:

1. היכרות עם חשיבה רקורסיבית לפתרון בעיות.
2. תרגול קומבינטוריקה בסיסית.

מהלך השיעור:

1. **פתיחה:**

האולימפיאדה במדעי המחשב מתקיימת פעם בשנה, בכל שנה במדינה מארחת אחרת, והיא התחרות היוקרתית ביותר לנוער במדעי המחשב. מטרת האולימפיאדה היא לעודד עניין ואתגר במדעי המחשב ולכנס ביחד את טובי הכישרונות הצעירים מכל העולם להתנסות מדעית וחוויה תרבותית. כל משלחת, המייצגת את מדינתה, מורכבת מעד ארבעה תלמידים. האולימפיאדה מחולקת לשני ימי תחרות, אשר בכל אחד מהם תחרות תכנותית באורך 5 שעות. ביום תחרות, המשתתפים מקבלים 3 חידות אלגוריתמיות אשר פתרון להן דורש חשיבה יצירתית ומחוץ לקופסה וידע במדעי המחשב.
בנוסף לאולימפיאדה הבינלאומית ישראל משתתפת גם באולימפיאדה האירופאית לבנות, באולימפיאדה האסייתית במדעי המחשב ולעתים בתחרויות מקדימות נוספות, כאשר לכל אחת מהתחרויות הנ"ל נבחרת משלחת של 4-6 תלמידים.

נבחרת מדעי המחשב מונה כ-50 תלמידים הנבחרים לאחר 3 שלבי מיון. הנבחרת מתאמנת באוניברסיטת בר אילן, ובמהלך האימונים התלמידים רוכשים כלים לפתרון בעיות, וידע מתקדם באלגוריתמים ובמבני נתונים. הרמה בנבחרת גבוהה מאוד ובנוסף לשיפור החשיבה ויכולת פתרון הבעיות היא גם משפרת את היכולת להציב מטרות שאפתניות ולהגיע אליהן.

בוגרי הנבחרת משתבצים בתפקידים בכירים בצבא ומבוקשים באוניברסיטאות השונות ובתעשייה. בוגרי הנבחרת באופן כללי מספרים שלמדו תחומים רבים בתוכנית, נהנו בסימולציות מהשאלות היצירתיות והכירו חברים איתם הם בקשר עד היום. הם גם מבוקשים באקדמיה, בתעשייה ועוד.

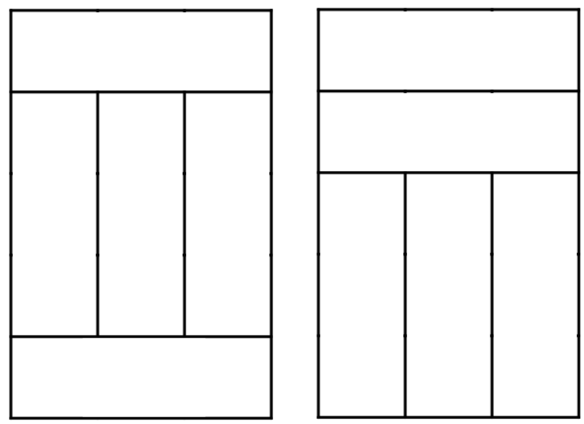
.2 ישנן מספר טכניות בסיסיות וכיווני חשיבה לפתרון בעיות אלגוריתמיות. לרוב בעיות מורכבות ידרשו שילוב של מספר מרכיבים, ועליה על הבחנות מתמטיות יצירתיות, כך שאת רוב הבעיות לא ניתן לפתור רק באמצעות הטכניקות, אך למרות זאת הן עוזרות לנו להרחיב את כיווני החשיבה ושימושיות מאוד.

אחת הטכניקות הבסיסיות הללו היא רקורסיה, שהיא פתרון בעיות באמצעות מופעים קטנים או פשוטים יותר שלה. זהו אחד מכיווני החשיבה שניתן למצוא גם פעמים רבות בשלבי המיון. נדגים את הטכניקה הזו באמצעות השאלות לדוגמה בחלק הבא.

.3 שאלות לדוגמה:

.1

בכמה דרכים ניתן לרצף קיר בגודל 20x3 מטרים בלבנים בגודל 3x1 מטרים? 2 דרכים יחשבו שונות, אם קיים מקום כלשהו בלוח שמכוסה על ידי לבנה שהמיקום שלה שונה ב-2 הדרכים. דוגמה ללוח 5x3 שמרוצף על ידי מרצפות של 1x3 ב-2 דרכים שונות (כמובן שאפשר ביותר דרכים):



.2

נתון שעון עגול בו קיימים 12 המספרים 1 עד 12, ונתונים 4 צבעים. כמה דרכים שונות ישנן לצבוע את המספרים כך שכל שני מספרים סמוכים יהיו צבועים בצבעים שונים, ומספרים נגדיים במעגל (למשל, 5 ו-11, או 2 ו-8) יהיו צבועים באותו הצבע? שתי דרכי צביעה נחשבות שונות זו מזו אם לפחות אחד מן המספרים צבוע בכל אחת מהן בצבע אחר. שימו לב: השעון עגול, ולכן אי אפשר לצבוע באותו הצבע את המספרים 1 ו-12.

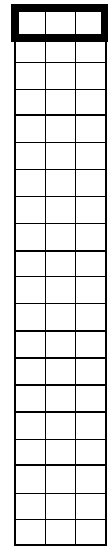
.4 הסבר מפורט למהלך הפתרון

שאלה 1:

נסתכל על המשבצת הימנית עליונה. יש 2 אופציות לריצוף שלה – באופן אנכי ובאופן אופקי. כמובן ש-2 אופציות האלו מכסות את כל האופציות וגם זרות, ולכן אם נחשב בכמה דרכים אפשר לרצף את כל הקיר כך שהמרצפת הימנית עליונה מכוסה על ידי מרצפת אופקית, ובכמה דרכים אפשר לרצף את כל הקיר כך שהמשבצת הימנית עליונה מכוסה על ידי מרצפת אנכית, סכום המספרים האלו הוא התשובה לשאלה.

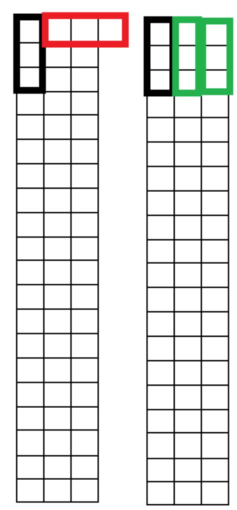
- נסתכל על המקרה בו המשבצת הימנית עליונה מרוצפת על ידי מרצפת אופקית. במקרה זה, מספר הדרכים לרצף את שאר הלוח זה מספר הדרכים לרצף קיר בגודל 3x19 במרצפות של

3x1:



זו בדיוק הבעיה ששאלנו לגבי קיר בגודל 3x20, אבל לקיר קצר במטר אחד.

- כעת נסתכל על המקרה בו המשבצת הימנית עליונה מרוצפת על ידי מרצפת אנכית. במקרה זה, אין מקום למשבצת האמצעית עליונה להיות עם מרצפת אופקית, לכן גם היא מרוצפת על ידי מרצפת אנכית, וכך גם השמאלית עליונה!



זה משאיר אותנו עם קיר בגודל 3x17.

כלומר – קיבלנו שמספר הדרכים לרצף קיר בגודל 20x3 במרצפות של 3x1 הוא הסכום של מספר הדרכים לרצף לוח 19x3 במרצפות כאלו, ושל מספר הדרכים לרצף לוח 17x3 במרצפות כאלו.

עד כאן לא היה שום דבר מיוחד לגבי המספר 20.
אם ננסה עכשיו לחשב עבור קיר בגודל 19x3, זה יהיה הסכום של הפתרון עבור 18x3 ועבור 16x3, עבור 18x3 הסכום של הפתרונות ל-17x3 ול-15x3, וכו'...

לעקרון הזה, שניתן לפתור בעיה באמצעות גרסאות קטנות יותר שלה, קוראים רקורסיה.

בדוגמה למעלה רואים שיש גדלים שנגיע אליהם כמה פעמים, אבל בסופו של דבר יש רק 20 גדלים אפשריים שרלוונטיים לנו, וברגע שפתרנו את הבעיה לכל גודל עד למספר מסוים, אפשר לפתור עבור מספר זה.

במילים אחרות – אפשר להכליל את ההבחנות שלנו לגבי קיר בגודל 20 כדי לקבל נוסחה – נסמן ב-f(n) את מספר הדרכים לרצף קיר בגודל nx3 במרצפות של 1x3, ונקבל f(n)=f(n-1)+f(n-3), כל עוד אורך הקיר מספיק גדול למרצפות אנכיות, כלומר $n \geq 3$.
כיצד ניתן לפתור כך את השאלה?
אפשר לפתור לכל אורך קיר מ-1 עד 20, עבור $n < 3$ נפתור ידנית, ועבור $n \geq 3$ נפתור באמצעות הנוסחה.
F(1)=f(2)=1, f(3)=2, f(4)=f(4-1)+f(4-3)=f(3)+f(1)=3, f(5)=f(4)+f(2)=4, f(6)=f(5)+f(3)=6…

שאלה 2:
בכל צביעה, בחירת הצבעים עבור המספרים 1-6 מקבעת בהכרח את הצבעים עבור 7-12. כמו כן, המספר 1 והמספר 12 צריכים להיות צבועים בצבעים שונים, ומכיוון ש-12 בצבע של 6, 1 ו-6 צריכים להיות צבועים בצבעים שונים.
נקרא לצביעה של שורה ב-4 צבעים בה כל זוג צבעים סמוכים שונים זה מזה צביעה תקינה.
אז מספר הצביעות של השעון הוא מספר הצביעות התקינות באורך 6 בהן המספרים 1 עד 6 בצבע שונה.
אם לא היה התנאי ש-1 עד 6 צריכים להיות צבועים בצבעים שונים, היו לנו4x3x3x3x3x3 צביעות תקינות שלהם (4 צבעים אפשריים למספר 1, ואחריו לכל מספר 3 אפשרויות – כל צבע חוץ מהצבע של המספר הקודם) --- 972 צביעות.
את מספר הצביעות התקינות בהן 1 ו-6 צבועים באותו הצבע (הצביעות שלא מתאימות לשאלה) יש להחסיר ממספר זה על מנת לקבל את התשובה. בעצם, הבעיה עכשיו היא למצוא את מספר הצביעות התקינות בהן 1 ו-6 צבועים באותו הצבע. אם נצליח לפצח בעיה זו נוכל להפחית את המספר הזה מ-972 ואז להגיע לפתרון של השאלה המקורית.
נשים לב שאם 1 ו-6 צבועים בצביעה תקינה כלשהי באותו הצבע, אז המספרים 1 ו-5 בהכרח יהיו בצבעים שונים, והצביעה של 1 עד 5 היא צביעה תקינה.
או במילים אחרות, מספר הצביעות התקינות באורך 6 בהן 1 ו-6 צבועים באותו הצבע, הוא מספר הצביעות התקינות באורך 5 בהן 1 ו-5 צבועים בצבעים שונים!
חזרנו לאותה הבעיה עבור גודל 5, כלומר קיבלנו נוסחה רקורסיבית:
באופן כללי, אם נסמן ב-f(n) את מספר הצביעות התקינות באורך n בהן 1 ו-n בצבע שונה. אז:
- יש $4 \times 3^{n-1}$ צביעות תקינות באורך n בסה"כ.
- מתוכן, מספר הצביעות שבהן 1 ו-n באותו הצבע, הוא כמו מספר הצביעות התקינות של המספרים 1 עד $n-1$ שבהן 1 ו-$n-1$ לא באותו הצבע, כלומר $f(n-1)$. לכן:

$$f(n) = 4 \times 3^{n-1} - f(n-1)$$

אנחנו התבקשנו לחשב את f(6) בבעיה.

$$f(2) = 4 \times 3 = 12, f(3) = 4 \times 3^2 - f(2) = 24, f(4) = 4 \times 3^3 - f(3) = 84,$$
$$f(5) = 4 \times 3^4 - f(4) = 240, f(6) = 4 \times 3^5 - f(5) = 732$$

לכן 732 היא התשובה!

5. הצעות להרחבה:
חשיבה רקורסיבית היא רק כלי אחד מיני רבים לפתרון בעיות, לבעיות נוספות מומלץ להיכנס

לאתר שלנו: https://www.israelioi.com/
דוגמאות לשאלות משלבי א' ו-ב' ניתן לראות כאן:
https://www.israelioi.com/%D7%91%D7%97%D7%9F-%D7%90%D7%AA-%D7%A2%D7%A6%D7%9E%D7%9A.

בהצלחה!