

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך — $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. שני שליחים, אייל וברק, יצאו בשעה 8:00 זה לקראת זה כדי למסור חבילה. אייל יצא מעיר A וברק יצא מעיר B. לאחר שאייל עבר $\frac{1}{6}$ מן הדרך לכיוון עיר B, הוא גילה כי שכח את החבילה בעיר A. הוא חזר לעיר A, אסף את החבילה, ומייד יצא שוב לכיוון עיר B. אייל נסע כל הזמן במהירות קבועה. ברק נסע גם הוא במהירות קבועה, הגבוהה ב- 20% ממהירות הנסיעה של אייל. ברק ואייל נפגשו בנקודה הנמצאת 75 ק"מ מעיר A.
א. מצא את אורך הדרך שבין שתי הערים.
- אייל וברק נסעו בכבישים בין-עירוניים, שמהירות הנסיעה המותרת בהם היא מ"מ 50 עד 110 קמ"ש. גם אייל וגם ברק נסעו במהירות מותרת.
- ב.** (1) האם ייתכן שאייל וברק נפגשו בשעה 9:40 ? נמק.
(2) האם ייתכן שאייל וברק נפגשו בשעה 10:00 ? נמק.

2. a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא q .

נתון: $0 < a_1$, $0 < q < 1$.

b_n היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שהמנה שלה היא r .

נתון: $b_1 = a_6$.

הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n = \frac{a_{n+5}}{b_n}$.

א. הסבר מדוע כל איברי הסדרות a_n , b_n ו- c_n הם חיוביים.

ב. הוכח כי c_n היא סדרה הנדסית, ומצא את c_1 .

ג. (1) הסבר מדוע המנה של הסדרה c_n גדולה מ-0 וקטנה מ-1.

(2) נתון: סכום הסדרה c_n הוא $\frac{6}{5}$, $\frac{b_2}{a_8} = 18$.

מצא את q ואת r .

3. ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיה שיער מתולתל היא x .

ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיו עיניים חומות היא $2x$.

ההסתברות שעניו של ילד שנולד במשפחת לוי יהיו חומות, אם ידוע ששִׁערו מתולתל, קטנה פי 1.5 מן ההסתברות

ששִׁערו לא יהיה מתולתל אם ידוע שעניו חומות.

יונתן הוא אחד הילדים במשפחת לוי.

א. (1) הראה שההסתברות שעניו של יונתן הן חומות ושערו מתולתל היא $\frac{1}{2}x$.

(2) מצא את ההסתברות ששִׁערו של יונתן הוא מתולתל, אם ידוע שעניו חומות.

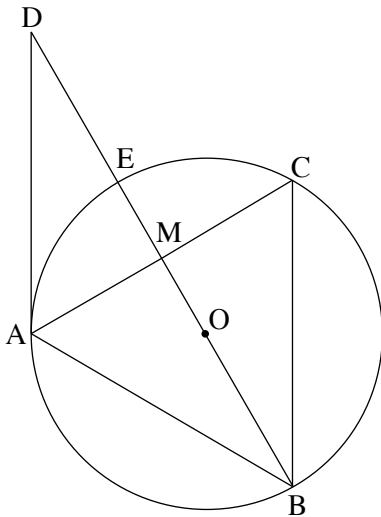
ב. (1) הבע באמצעות x את ההסתברות ששִׁערו של יונתן אינו מתולתל וגם עניו אינו חומות.

(2) נתון: $x = 0.2$.

במשפחת לוי נולדו ארבעה ילדים בדיוק.

מהי ההסתברות שלפחות שלושה מארבעת הילדים במשפחת לוי יש שיער מתולתל ועיניים חומות?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. הישר AD משיק למעגל בנקודה A.

הנקודה B נמצאת על המעגל כך שהקטע BD עובר דרך מרכז המעגל, O,

וחותך את המעגל בנקודה נוספת, E.

הנקודה C נמצאת על המעגל כך ש- $BC \parallel AD$.

הישרים BD ו- AC חותכים זה את זה בנקודה M (ראה ציור).

א. הוכח: $AB = AC$.

נתון: AE חוצה את הזווית MAD.

ב. הוכח: $BM \perp AC$.

ג. הוכח כי אורך הקטע AE שווה לרדיוס המעגל.

ד. הוכח כי ABCD הוא מעוין.

5. ABC הוא משולש קהה זווית ($\angle BAC > 90^\circ$).

נתון: $AB + AC = 4a$ (a הוא פרמטר),

$AB : AC = 3 : 5$,

שטח המשולש ABC הוא $\frac{15\sqrt{3}}{16}a^2$.

א. (1) חשב את גודל הזווית BAC.

(2) חשב את גודלי הזוויות ABC ו- ACB.

במעגל החוסם את המשולש ABC אפשר לחסום מחומש משוכלל ששטחו הוא 100.

ב. חשב את a.

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקציה $f(x) = 6x(x^3 - 1)^3$, המוגדרת לכל x .

ענה על הסעיפים א-ג. אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

- א. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?
- (2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- (4) בעבור אילו ערכים של k הישר $y = k$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$?

ב. נתונה המשוואה $6x(x^3 - 1)^3 = m$. m הוא פרמטר.

הסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$, וקבע בעבור אילו ערכי m למשוואה הנתונה יש בדיוק שני פתרונות חיוביים שונים, ובעבור אילו ערכי m יש לה פתרון אחד שלילי ופתרון אחד חיובי. נמק את תשובותיך.

ג. היעזר בסרטוט וקבע אם קיים $a > 0$ שבעבורו האינטגרל $\int_0^a f(x) dx$ מקבל ערך מינימלי. אם כן, מהו ערכו של a זה? נמק את תשובתך.

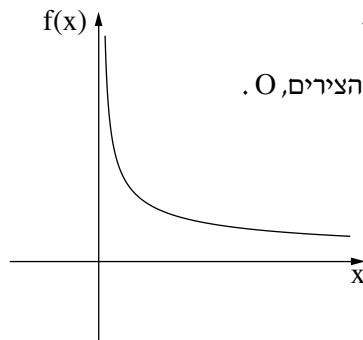
7. נתונה הפונקציה $f(x) = 2 \sin^2 x - 1$, המוגדרת לכל x .

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

- א. (1) הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
 (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{\cos 2x (1 - \sin x)}{\sin x - 1}$.

- ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
 (2) בעבור אילו ערכים של x $f(x) = g(x)$? נמק.
 (3) האם לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטות אנכיות? נמק.
 (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ג. נתונה הפונקציה $h(x) = -f(x) + b$ (b הוא פרמטר), שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 נתון: $\int_{-\pi}^0 h(x) dx = \frac{3\pi}{2}$. מצא את ערכו של הפרמטר b .

8. בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$, שתחום הגדרתה הוא $x > 0$.
- 
- מבין כל הנקודות שעל גרף הפונקציה $f(x)$, הנקודה A היא הקרובה ביותר לראשית הצירים, O .
- א. (1) מצא את שיעורי הנקודה A .
 (2) האם הישר AO מאונך לישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ? נמק.
- נתונה הפונקציה $g(x) = -f(-x)$, המוגדרת בתחום $x < 0$.
- ענה על סעיף ב בעבור התחום $-4 \leq x \leq -1$.

- ב. (1) מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון, מה הם שיעורי הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים?
 (2) מצא את שיעורי הנקודה הרחוקה ביותר מראשית הצירים, מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון.

בהצלחה!