

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים — $33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ נקודות

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות — $33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

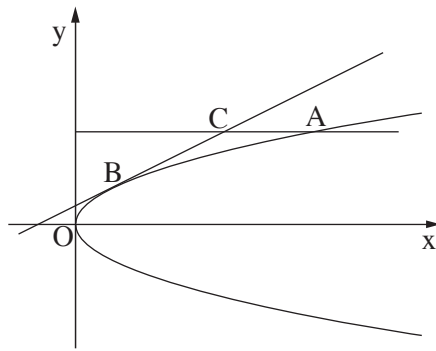
(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשיגים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1



נקודה A נמצאת ברביע הראשון על הפרבולה שמשוואתה $y^2 = 3x$.

ישר המשיק לפרבולה בנקודה B מקביל למיתר OA (ראשית הצירים).
דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה- x.
הישר חותך את המשיק בנקודה C (ראה ציור).
נסמן: x_C — שיעור ה- x של הנקודה C.
 x_A — שיעור ה- x של הנקודה A.

היעזר בעובדה שהנקודה C נמצאת על פרבולה שמשוואתה $y^2 = 4x$,
וענה על הסעיפים א, ב ו ג.

- הבע באמצעות x_C את x_A .
- הבע באמצעות x_C את השיפוע של הישר OA.
- נתון גם כי שטח המשולש BCA הוא 0.5625.
מצא את השיעורים של הנקודה C.

תשובה לשאלה 1

- CA מקביל לציר ה- x, לכן:
 $y_A = y_C$
A על הפרבולה $y^2 = 3x$, לכן:
 $x_A = \frac{y_A^2}{3} = \frac{y_C^2}{3}$
C על הפרבולה $y^2 = 4x$, לכן:
 $y_C^2 = 4x_C$
מ- I ו- II מקבלים:
 $x_A = \frac{4x_C}{3}$

- השיפוע OA מקיים:
 $m_{OA} = \frac{y_A}{x_A}$
 $\Downarrow$
 $m_{OA} = \frac{y_C}{x_A}$
 $\Downarrow$
 $m_{OA} = \frac{3\sqrt{4x_C}}{4x_C} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_C}}$
נציב $x_A = \frac{4x_C}{3}$ ו- $y_C = \sqrt{4x_C}$ (C ברביע הראשון):

המשך תשובה לשאלה 1

ג. משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 3x$ בנקודה B היא:

$$y \cdot y_B = \frac{3}{2}(x + x_B)$$

$$\Downarrow$$

$$m = \frac{3}{2y_B}$$

שיפוע המשיק בנקודה B הוא:

$$m = m_{OA}$$

המשיק בנקודה B מקביל למיתר OA, לכן:

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{2y_B} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_C}}$$

$$\Downarrow$$

$$y_B = \sqrt{x_C}$$

$$0.5625 = \frac{1}{2}(y_C - y_B)(x_A - x_C)$$

שטח המשולש BCA מקיים:

$$\Downarrow$$

$$0.5625 = \frac{1}{2}(\sqrt{4x_C} - \sqrt{x_C})\left(\frac{4}{3}x_C - x_C\right)$$

$$\Downarrow$$

$$0.5625 = \frac{x_C^2}{6\sqrt{x_C}} = \frac{1}{6}x_C^{\frac{3}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$(0.5625 \cdot 6)^{\frac{2}{3}} = x_C$$

$$\Downarrow$$

$$x_C = 2.25$$

$$\Rightarrow C(2.25, 3)$$

$$y_C = \sqrt{4 \cdot 2.25} = 3$$

שאלה 2

במשולש ABC, גובה המשולש לצלע AB הוא CD.

נסמן: $\vec{CA} = \underline{u}$, $\vec{CB} = \underline{v}$, $\vec{AD} = t\vec{AB}$.

נתון: $\cos \angle ACB = \frac{3}{4}$, $|\vec{CA}| = 1$, $|\vec{CB}| = 2$.

א. חשב את הערך של t בעזרת חשבון וקטורים.

ב. סרטט את המשולש ABC ואת הגובה CD כך שהסרטוט יתאים לערך של t

שחישבת בסעיף א.

ג. נקודה E נמצאת על הצלע BC (בין B ל-C).

נתון גם: $\frac{CE}{BE} = \frac{3}{5}$. נסמן: $\vec{CD} = \underline{h}$.

הבע את $\vec{AE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{h}$ בלבד.

תשובה לשאלה 2

א. לפי חיבור וקטורים: $\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD} = \vec{CA} + t\vec{AB}$

$\Downarrow$

$$\vec{CD} = \underline{u} + t(\underline{v} - \underline{u})$$

$\vec{CD} \cdot \vec{AB} = 0$ לכן: $\vec{CD} \perp \vec{AB}$

$\Downarrow$

$$(\underline{u} + t(\underline{v} - \underline{u})) \cdot (\underline{v} - \underline{u}) = 0$$

$\Downarrow$

$$t|\underline{v}|^2 + (1-t) \cdot |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \angle ACB - t|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \angle ACB - (1-t)|\underline{u}|^2 = 0$$

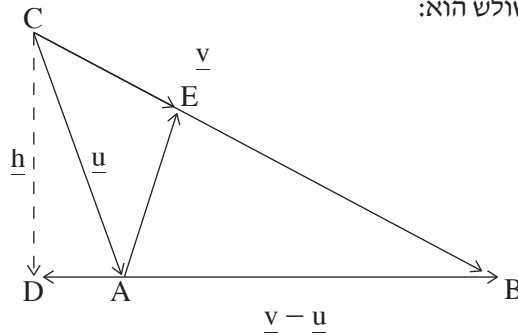
$\Downarrow$

$$t = -\frac{1}{4} \quad \text{נציב } \cos \angle ACB = \frac{3}{4}, |\underline{v}| = 2, |\underline{u}| = 1 \text{ ונקבל:}$$

המשך תשובה לשאלה 2.

ב. מצאנו כי $t = -\frac{1}{4}$, לכן D מחוץ לקטע AB

כך ש- $\vec{AD}$ בכיוון הפוך ל- $\vec{AB}$, לכן המשולש הוא:



$$\vec{CE} = \frac{3}{8}\vec{CB} = \frac{3}{8}\underline{v}$$

ג. לפי הנתון $CE = \frac{3}{5}BE$, לכן:

$$\vec{AE} = \vec{CE} - \vec{CA} = \frac{3}{8}\underline{v} - \underline{u}$$

לפי חיבור וקטורים:

$$\underline{v} = \vec{CD} - \vec{AD} + \vec{AB} = \underline{h} + \frac{1}{4}(\underline{v} - \underline{u}) + \underline{v} - \underline{u} = \underline{h} + \frac{5}{4}\underline{v} - \frac{5}{4}\underline{u}$$

לכן, $\vec{AD} = -\frac{1}{4}(\underline{v} - \underline{u})$

$\Downarrow$

$$\underline{v} = -4\underline{h} + 5\underline{u}$$

$$\vec{AE} = \frac{3}{8}(-4\underline{h} + 5\underline{u}) - \underline{u}$$

נציב את $\underline{v}$ ב- $\vec{AE}$, ונקבל:

$\Downarrow$

$$\vec{AE} = \frac{7}{8}\underline{u} - \frac{3}{2}\underline{h}$$

שאלה 3

- א. פתור את המשוואה: $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$, z הוא מספר מרוכב.
- ב. האם שלושה מן הפתרונות שמצאת בסעיף א נמצאים על המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים w השונים מ-0 ומקיימים: $107^\circ < \arg(w) < 253^\circ$? נמק.

תשובה לשאלה 3

א. נסמן: $\cos \alpha + i \sin \alpha = \text{cis} \alpha$, ונקבל: $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1 = \text{cis}(0^\circ + 360^\circ k)$, k שלם

$\Downarrow$

$$\frac{2z+1}{z-1} = \text{cis}(90^\circ k), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$\Downarrow$

$$\frac{2z_0+1}{z_0-1} = \text{cis}0^\circ = 1, \quad \frac{2z_1+1}{z_1-1} = \text{cis}90^\circ = i, \quad \frac{2z_2+1}{z_2-1} = \text{cis}180^\circ = -1, \quad \frac{2z_3+1}{z_3-1} = \text{cis}270^\circ = -i$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$z_0 = -2, \quad z_1 = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

- ב. הזוויות, שיוצרים המספרים z_3, z_1, z_0 השונים מ-0

$$\text{tg} \alpha_0 = \frac{0}{-2} = 0, \quad \text{tg} \alpha_1 = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{1}{5}} = 3, \quad \text{tg} \alpha_3 = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{1}{5}} = -3$$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , מקיימות:

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

לפי שיעורי ה- x וה- y של המספרים:

z_1 ברביע השלישי, z_3 ברביע השני

$$\arg(z_0) = 180^\circ, \quad \arg(z_1) = 251.56^\circ, \quad \arg(z_3) = 108.43^\circ$$

ר- z_0 נמצא בחלק השלילי של ציר ה- x , לכן:

$\Downarrow$

על המקום הגאומטרי z_0, z_1, z_3

של המספרים המקיימים $107^\circ < \arg(w) < 253^\circ$

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-2(x+3)}{\sqrt{e^{ax}}}$, a הוא פרמטר.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

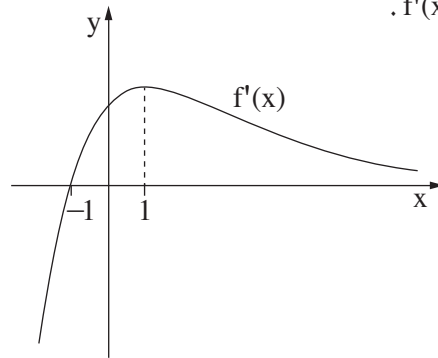
היעזר בנתונים הרשומים בגרף, ומצא:

(1) ערך מספרי עבור שיעור ה- x

וערך מספרי עבור שיעור ה- y

של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

וקבע את סוגה.



(2) ערך מספרי עבור שיעור ה- x וערך מספרי עבור שיעור ה- y של נקודת הפיתול

של הפונקציה $f(x)$.

(3) את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובה לשאלה 4

א. (1) $e^{ax} > 0$ לכל x

$\Downarrow$

$f(x)$ מוגדרת לכל x

(2) $f(x) = 0 \Rightarrow -2(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = -6$

מכאן נקודות החיתוך עם הצירים: $(-3, 0)$, $(0, -6)$

המשך תשובה לשאלה 4.

ב. (1) לפי הנתונים בגרף נקבל:

x	$x < -1$	-1	$x > -1$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

 $\Downarrow$ ל- $f(x)$ מינימום ב- $x = -1$

$$f'(x) = \frac{-2\sqrt{e^{ax}} + 2(x+3) \cdot \frac{ae^{ax}}{2\sqrt{e^{ax}}}}{e^{ax}}$$

$$f'(-1) = 0$$

לפי הנתונים בגרף:

 $\Downarrow$

$$-2 \cdot \sqrt{e^{-a}} + 4 \cdot \frac{ae^{-a}}{2\sqrt{e^{-a}}} = 0$$

 $\Downarrow$

$$a = 1$$

$$f(-1) = -4\sqrt{e}$$

נציב $a = 1$ ו- $x = -1$ ב- $f(x)$, ונקבל:

$$(-1, -4\sqrt{e})$$

שיעורי נקודת המינימום של $f(x)$:

x	$x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

(2) לפי הנתונים בגרף נקבל:

 $\Downarrow$

$$x = 1$$

ל- $f(x)$ פיתול בנקודה שבה:

$$f(1) = -\frac{8}{\sqrt{e}}$$

נציב $x = 1$ בפונקציה ונקבל:

$$\left(1, -\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$$

שיעורי נקודת הפיתול של $f(x)$:

(3) לפי הטבלה שבתת-סעיף ב(2):

$$x < 1$$

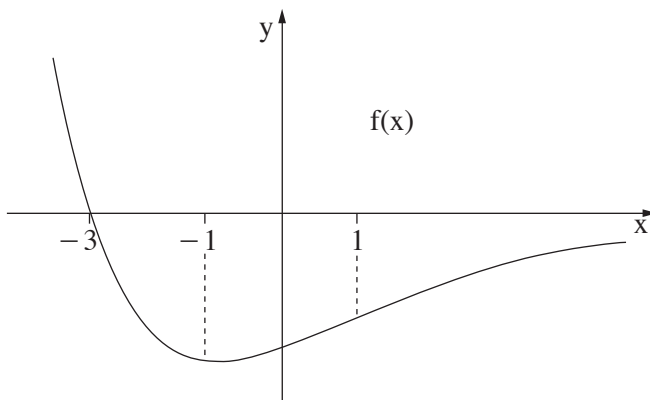
 $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור:

$$x > 1$$

 $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ עבור:

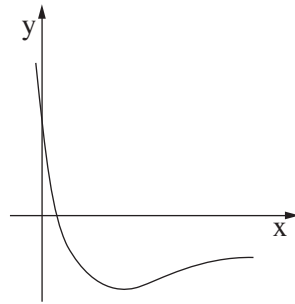
המשך תשובה לשאלה 4.

ג.



/המשך בעמוד 10/

שאלה 5



נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3 - 9\ln(3x + 1)}{3x + 1}$ (ראה ציור).

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

(2) השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{e-1}{3}$ ו- $x = a$, הוא 3.5.

נתון כי $a > \frac{e-1}{3}$.

היעזר בנגזרת של $y = \ln^2(3x + 1)$, ומצא את a .

ג. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד בנקודה שבה $x = \frac{e^{\frac{4}{3}} - 1}{3}$.

מצא עבור אילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ שלילית וגם פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית.

תשובה לשאלה 5

א. עבור המכנה צריך להתקיים: $3x + 1 \neq 0$, עבור $\ln$ צריך להתקיים: $3x + 1 > 0$

$$\downarrow \\ x > -\frac{1}{3}$$

לכן, תחום ההגדרה של $f(x)$:

המשך תשובה לשאלה 5.

ב. (1) נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x : $f(x) = 0 \Rightarrow 3 - 9\ln(3x + 1) = 0$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{e^{\frac{1}{3}} - 1}{3}$$

$$\frac{e^{\frac{1}{3}} - 1}{3} < \frac{e - 1}{3} \quad (2)$$

$\Downarrow$
השטח מתחת לציר ה- x

לכן השטח מקיים: $3.5 = - \int_{\frac{e-1}{3}}^a \left(\frac{3}{3x+1} - \frac{9\ln(3x+1)}{3x+1} \right) dx$

מהנתון מקבלים כי $y' = \frac{6\ln(3x+1)}{3x+1}$, לכן: $3.5 = \left[-\frac{3 \cdot \ln(3x+1)}{3} + \frac{9}{6} \ln^2(3x+1) \right]_{\frac{e-1}{3}}^a$

$$\Downarrow$$

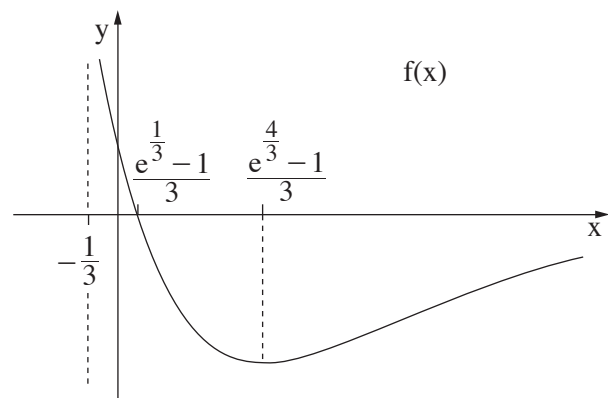
$$1.5 \ln^2(3a+1) - \ln(3a+1) - 4 = 0$$

פתרונות המשוואה הריבועית שהנעלם שלה $\ln(3a+1)$ הם: $\ln(3a+1) = -\frac{4}{3}$, $\ln(3a+1) = 2$

$\Downarrow$ $\Downarrow$
לא בתחום הערכים של a , $a = \frac{e^{-\frac{4}{3}} - 1}{3}$, $a = \frac{e^2 - 1}{3}$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{e^2 - 1}{3}$$



לפי הגרף: $f(x) < 0$ עבור $x > \frac{e^{\frac{1}{3}} - 1}{3}$, $f'(x) < 0$ עבור $-\frac{1}{3} < x < \frac{e^{\frac{4}{3}} - 1}{3}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{e^{\frac{1}{3}} - 1}{3} < x < \frac{e^{\frac{4}{3}} - 1}{3} \text{ עבור } f'(x) < 0 \text{ וגם } f(x) < 0$$