מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: תשע"ד, **מועד ב**

מספר השאלון: **035806, 316**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון: אלגברה

והסתברות 20X2 – 40 נק'

פרק שני: גאומטריה וטריגונומטריה

במישור 20X1 – 20 נק'

פרק שלישי: חשבון דיפרנציאלי

ואינטגרלי 20X2 – 40 נק'

סה"כ – 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

دولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: 2014، **الموعد "ب"**

رقم النّموذج: **035806، 316**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

5 وحدات تعليميّة – النّموذج الأوّل

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ثلاث ساعات ونصف.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدرجات:
في هذا النّموذج ثلاثة فصول.
الفصل الأوّل: الجبر
والاحتمال 20X2 – 40 درجة
الفصل الثّاني: الهندسة وحساب المثلّثات في المستوى 20X1 – 20 درجة
الفصل الثّالث: حساب التّفاضل والتّكامل 20X2 – 40 درجة
المجموع – 100 درجة

ج. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:

1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدّفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

خرج العدّاء I والعدّاء II في نفس اللحظة من نفس المكان. ركض العدّاءان بسرعة ثابتة وبنفس الاتّجاه.

سرعة العدّاء I كانت 6 كم/الساعة، وسرعة العدّاء II كانت 7.5 كم/الساعة.

بعد مرور 20 دقيقة منذ لحظة خروج العدّاءَيْن، خرج العدّاء III من نفس المكان وبنفس الاتّجاه، وركض بسرعة ثابتة.

التقى العدّاء III في طريقه مع العدّاء I، وبعد ساعة من لقائه هذا التقى مع العدّاء II.

جد كم ساعة مرّت منذ لحظة خروج العدّاء III وحتّى التقائه مع العدّاء II.

إجابة السؤال 1

نرمز: t – عدد الساعات التي قطعوها منذ لحظة خروج العدّاء III وحتّى لقائه مع العدّاء II

v – سرعة العدّاء III

	السرعة (كم / الساعة)	الزمن (ساعات)	المسافة (كم)
العدّاء I حتّى اللقاء مع العدّاء III	6	$t+\frac{20}{60}-1$	$6(t+\frac{20}{60}-1)$
العدّاء II حتّى اللقاء مع العدّاء III	7.5	$t+\frac{20}{60}$	$7.5(t+\frac{20}{60})$
العدّاء III بين اللقاء مع العدّاء I والعدّاء II	v	1	$v\cdot 1$

زمن العدّاء III حتّى اللقاء مع العدّاء II يحقّق: $\text{I.}\quad t=\frac{7.5(t+\frac{20}{60})}{v}$

زمن العدّاء III بين اللقاء مع العدّاء I والعدّاء II يحقّق: $1=\frac{7.5(t+\frac{20}{60})-6(t+\frac{20}{60}-1)}{v}$

$$\Downarrow$$

$$v=1.5t+6.5$$

نعوّض $v=1.5t+6.5$ في المعادلة I، وينتج: $1.5t^2-t-2.5=0$

$$\Downarrow$$

لذلك: $t>0$، $t=\frac{5}{3}$ ساعات

/ يتبع في صفحة 3 /

السؤال 2

معطاة متوالية حسابيّة: $a_1 , a_2 , a_3 , ...$

ثلاثة الحدود المتتالية في المتوالية، a_n , a_{n+1} , a_{n+2} ، تحقّق:

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$$

أ. جد الحدّ a_n .

ب. أخذوا قسمًا من حدود المتوالية المعطاة وبنوا متوالية حسابيّة جديدة:

$$a_5 , a_9 , a_{13} , ... , a_{4k+1}$$

مجموع كلّ الحدود في المتوالية الجديدة هو 450.

الحدّ الأوّل في المتوالية المعطاة في مقدّمة السؤال هو $a_1 = -21$.

جد قيمة k .

إجابة السؤال 2

أ. حسب المعطى: $a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$

$$\Downarrow$$

$$(a_{n+2} - a_n) \cdot (a_{n+2} + a_n) = 216$$

$$\Downarrow$$

نعوّض $a_{n+2} - a_n = 2d$ وَ $a_{n+2} = a_n + 2d$ ، وينتج: $2d(2a_n + 2d) = 216$

$$\Downarrow$$

I. $d(a_n + d) = 54$

حسب المعطى: $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$

$$\Downarrow$$

$$a_n + a_n + d + a_n + 2d = 54$$

$$\Downarrow$$

II. $a_n + d = 18$

من I وَ II ينتج: $d = 3$ ، $a_n = 15$

/ يتبع في صفحة 4 /

تكملة إجابة السؤال 2.

ب. فرق المتوالية الجديدة هو: $a_9 - a_5 = a_1 + 8d - (a_1 + 4d) = 4d$

وجدنا أنّ $d = 3$ ، لذلك فرق المتوالية الجديدة هو: 12

k يشير إلى عدد الحدود N في المتوالية الجديدة، لأنّ: $4k + 1 = 5 + 4(N - 1) \Rightarrow k = N$

لذلك مجموع k الحدود في المتوالية الجديدة يحقّق: $450 = \frac{k}{2}(2 \cdot a_5 + 12(k - 1))$

الحدّ الخامس في المتوالية المعطاة هو: $a_5 = -21 + 3(5 - 1) = -9$

من هنا: $450 = \frac{k}{2}(-2 \cdot 9 + 12(k - 1))$

$\Downarrow$

$k = 10$

/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 3

في مدينة كبيرة، يختار كلّ واحد من طلّاب صفوف الثواني عشر في سنة معيّنة أحد مسارين للرحلة السنويّة: المسار "أ" أو المسار "ب".

وُجد أنّ: 75% من الطلّاب الذين اختاروا المسار "أ" هم بنات.

10% من البنات اخترن المسار "ب".

40% من الطلّاب هم بنات.

أ. نختار بشكل عشوائيّ طالبًا من طلّاب الثواني عشر (ابنًا/بنتًا).
ما هو الاحتمال بأن يكون قد اختار المسار "أ"؟

ب. عندما نختار بشكل عشوائيّ طالبًا من طلّاب الثواني عشر (ابنًا/بنتًا)، هل الحدث "الطالب هو بنت" والحدث "الطالب (ابن/بنت) اختار المسار "أ"" هما حدثان مستقلّان؟ علّل.

جـ. اختاروا بشكل عشوائيّ، عددًا من البنات من بين الطلّاب.
وُجد أنّ الاحتمال بأن تكون واحدة منهنّ على الأقلّ قد اختارت المسار "أ" هو 0.99.
(اختيارات البنات للمسارين هي اختيارات مستقلّة.)
كم بنتًا اختيرت؟

إجابة السؤال 3

أ. نرمز: A — مجموعة البنات
B — مجموعة الذين يختارون المسار "أ"

حسب المعطى: $P(A)=0.4$ $\quad P(\overline{B}/A)=0.1$ ، $\quad P(A/B)=0.75$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$P(A\cap \overline{B})=0.1\cdot 0.4=0.04 \qquad P(A\cap B)=0.75\,P(B)$$

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})$$

$$\Downarrow$$

$$0.4=0.75P(B)+0.04$$

$$\Downarrow$$

$$P(B)=0.48$$

ب. حاصل ضرب الاحتمال بأن يحدث الحدث "الطالب هو بنت"
في الاحتمال بأن يحدث الحدث "الطالب اختار المسار "أ"" هو: $P(A)\cdot P(B)=0.4\times 0.48$

الاحتمال بأن يحدث الحدث "الطالب هو بنت وكذلك اختار المسار "أ"" هو: $P(A\cap B)=0.75\,P(B)=0.75\times 0.48$

من هنا: $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$

$\Downarrow$

الحدثان يتعلّق أحدهما بالآخر

/يتبع في صفحة 6/

تكملة إجابة السؤال 3.

جـ. الاحتمال بأن تختار بنت المسار "أ"، هو:

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.75\times 0.48}{0.4}=0.9$$

الاحتمال بأن تكون واحدة على الأقلّ من n بنات قد اختارت المسار "أ" هو:

$$P\left(\begin{matrix}\text{واحدة}\\ \text{على الأقلّ}\end{matrix}\right)=1-P_n(0)$$

$$\Downarrow$$

نعوّض $P_n(0)=(1-0.9)^n$ ، وينتج:

$$0.99=1-0.1^n$$

$$\Downarrow$$

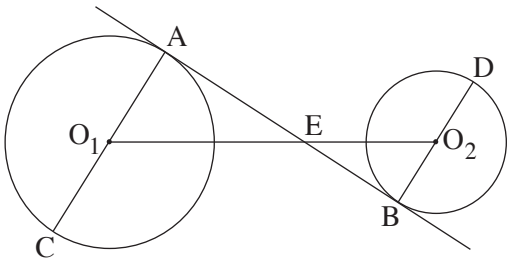
$$0.1^n=0.01$$

$$\Downarrow$$

$$n=2$$

/ يتبع في صفحة 7 /

السؤال 4



AC هو قطر في دائرة مركزها O_1 .

BD هو قطر في دائرة مركزها O_2 .

معطى مستقيم يمسّ الدائرتين O_1 وَ O_2 في النقطتين A وَ B بالتلاؤم.

المماسّ يقطع قطعة المركزين O_1O_2 في النقطة E (انظر الرسم).

معطى أنّ: نصف قطر الدائرة O_1 هو 30 سم

نصف قطر الدائرة O_2 هو 20 سم

طول قطعة المركزين O_1O_2 هو 90 سم

أ. (1) جد النسبة $\frac{O_1E}{O_1C}$. علّل.

(2) برهن أنّ $\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$.

ب. برهن أنّ النقطة E تقع على المستقيم CD .

إجابة السؤال 4

أ. (1) $\sphericalangle O_1AE = \sphericalangle O_2BE = 90^o$ المماسّ للدائرة يعامد نصف القطر

$\sphericalangle O_1EA = \sphericalangle O_2EB$ الزاويتان المتقابلتان بالرأس متساويتان

من هنا: $\triangle O_1AE \sim \triangle O_2BE$ حسب ز.ز

$$\Downarrow$$

$$\frac{O_1E}{O_1A} = \frac{O_2E}{O_2B} = \frac{O_1O_2 - O_1E}{O_2B}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{O_1E}{30} = \frac{90 - O_1E}{20}$$

$$\Downarrow$$

$$O_1E = 54$$

$$\frac{O_1E}{O_1C} = \frac{54}{30} = 1.8$$

/ يتبع في صفحة 8 /

تكملة إجابة السؤال 4.

$$\frac{O_2E}{O_2D}=\frac{O_1O_2-O_1E}{O_2D} \qquad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{O_2E}{O_2D}=\frac{90-54}{20}=1.8$$

من هنا: $\frac{O_2E}{O_2D}=\frac{O_1E}{O_1C}$

وجدنا أنّ $\sphericalangle O_1AE=\sphericalangle O_2BE$، لذلك: $AC \parallel DB$ إذا كانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين فإنّ المستقيمين متوازيان

$$\Downarrow$$

$\sphericalangle CO_1E=\sphericalangle DO_2E$ الزاويتان المتبادلتان بين مستقيمين متوازيين متساويتان

من هنا: $\triangle EO_1C\sim\triangle EO_2D$ حسب ض.ز.ض

ب. ينتج من التشابه: $\sphericalangle O_1EC=\sphericalangle O_2ED=\beta$

وجدنا في البند الفرعيّ "أ (1)": $\sphericalangle O_1EA=\sphericalangle O_2EB=\alpha$

النقطة E على المستقيم O_1O_2، لذلك: $\sphericalangle AED=180^o-(\beta+\alpha)$

$$\sphericalangle CED=\beta+\alpha+\sphericalangle AED$$

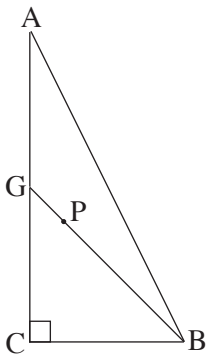
$$\sphericalangle CED=\beta+\alpha+180^o-(\beta+\alpha)=180^o$$

$$\Downarrow$$

النقطة E على المستقيم CD

/ يتبع في صفحة 9 /

السؤال 5



في المثلّث القائم الزاوية ACB ($\sphericalangle ACB = 90^o$)

النقطة G هي منتصف الضلع القائم AC .

النقطة P تقع على GB بحيث $BG = 4 \cdot PG$ (انظر الرسم).

نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث CGB هو R .

معطى أنّ: $GC = BC$.

أ. عبّر بدلالة R عن نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث ACB .

ب. عبّر بدلالة R عن بُعد النقطة P عن مركز الدائرة التي تحصر المثلّث ACB .

إجابة السؤال 5

أ. $BG = 2R$ زاوية محيطيّة مقدارها 90^o تستند إلى قطر الدائرة

من هنا في المثلّث BCG القائم الزاوية

حسب نظريّة فيثاغورس يتحقّق: $(2R)^2 = BC^2 + GC^2$

$\Downarrow$

حسب المعطى $GC = BC$ ، لذلك: $GC = \sqrt{2}\,R$

$\Downarrow$

G منتصف CA ، لذلك: $CA = 2\sqrt{2}\,R$

في المثلّث القائم الزاوية ACB

حسب نظريّة فيثاغورس يتحقّق: $AB^2 = BC^2 + CA^2$

$\Downarrow$

$AB^2 = (\sqrt{2}\,R)^2 + (2\sqrt{2}\,R)^2$

$\Downarrow$

$AB = \sqrt{10}\,R$

AB هو قطر الدائرة التي تحصر $\triangle ACB$ زاوية محيطيّة مقدارها 90^o تستند إلى قطر الدائرة

$\Downarrow$

نصف قطر الدائرة التي تحصر $\triangle ACB = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}R$

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة السؤال 5.

ب. في المثلّث القائم الزاوية ACB يتحقّق: $\frac{CA}{CB} = tg(\sphericalangle ABC)$

$$\Downarrow$$

$$2 = tg(\sphericalangle ABC)$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle ABC = 63.435^o$$

$$\Downarrow$$

$\sphericalangle CGB = \sphericalangle CBG = 45^o$ ،لذلك: $\sphericalangle PBA = 63.435^o - 45^o = 18.435^o$

من المعطى $BG = 4PG$ ينتج: $BP = \frac{3}{4}BG = \frac{3}{4} \cdot 2R = \frac{3}{2}R$

نرمز بِـ O إلى مركز الدائرة التي تحصر المثلّث ACB ،

وينتج أنّه حسب نظريّة الكوسينوس في المثلّث POB يتحقّق: $PO^2 = BO^2 + BP^2 - 2 \cdot BO \cdot BP \cdot \cos \sphericalangle PBA$

$$\Downarrow$$

$$PO^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}R\right)^2 + \left(\frac{3}{2}R\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}R \cdot \frac{3}{2}R \cdot \cos 18.435^o$$

$$\Downarrow$$

$PO > 0$ ، لذلك: $PO = 0.5R$

/ يتبع في صفحة 11 /

السؤال 6

معطاة الدالّتان: $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$

$g(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$

أ. (1) للدالّتين نفس مجال التعريف.

جد مجال التعريف.

(2) جد نقاط تقاطع كلّ واحدة من الدالّتين $f(x)$ وَ $g(x)$ مع المحورين.

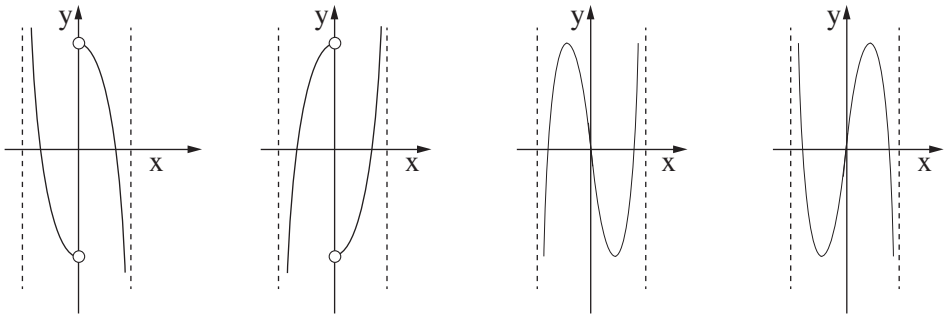
ب. جد إحداثيّات النقاط القصوى المطلقة لكلّ واحدة من الدالّتين، وحدّد نوع هذه النقاط.

جـ. حسب البندين "أ" وَ "ب"، ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$،

وارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $g(x)$.

د. أمامك أربعة رسوم بيانيّة، I-IV .

أيّ رسم بيانيّ يصف دالّة المشتقّة $g'(x)$؟ علّل.



I II III IV

إجابة السؤال 6

أ. (1) يجب أن يتحقّق: $8 - x^2 \geq 0$

$\Downarrow$

مجال تعريف $f(x)$ وَ $g(x)$: $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$

(2) $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ x = \pm 2\sqrt{2}$

$g(x) = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ x = \pm 2\sqrt{2}$

نقاط التقاطع مع المحورين

لِـ $f(x)$ وَلِـ $g(x)$: $(0,0)\ ,\ (2\sqrt{2},0)\ ,\ (-2\sqrt{2},0)$

/ يتبع في صفحة 12 /

تكملة إجابة السؤال 6.

ب.

$$f'(x) = \sqrt{8-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}} = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$g'(x) = \frac{16x-4x^3}{2\sqrt{8x^2-x^4}} = \frac{8x-2x^3}{\sqrt{8x^2-x^4}}$$

بالنسبة لِـ f(x) نقاط "محتملة" كنقاط قصوى: $8-2x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$

بالنسبة لِـ g(x) نقاط "محتملة" كنقاط قصوى: $8x-2x^3=0 \Rightarrow x=\pm 2\ ,\ x=0$

x	$-2\sqrt{2}$		-2		0		2		$2\sqrt{2}$
f(x)	0	↘	-4	↗	0	↗	4	↘	0
g(x)	0	↗	4	↘	0	↗	4	↘	0

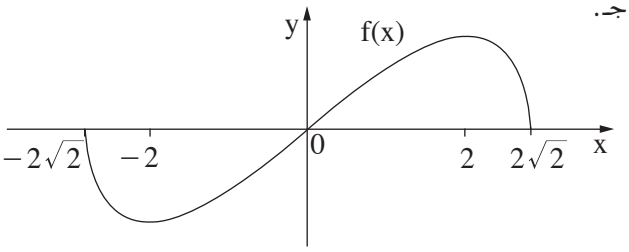
نهاية عظمى مطلقة لِـ f(x): $(2\ ,\ 4)$

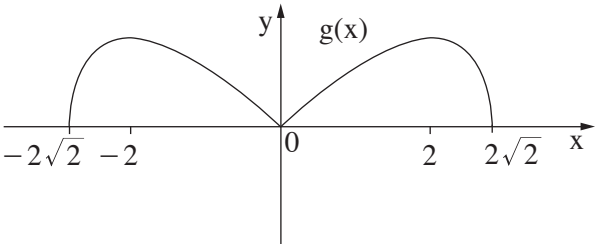
نهاية صغرى مطلقة لِـ f(x): $(-2\ ,\ -4)$

نهاية عظمى مطلقة لِـ g(x): $(2\ ,\ 4)\quad (-2\ ,\ 4)$

نهاية صغرى مطلقة لِـ g(x): $(-2\sqrt{2}\ ,\ 0)\quad (0\ ,\ 0)\quad (2\sqrt{2}\ ,\ 0)$

جـ.





د. $g'(x)$ غير معرّفة بالنسبة لِـ $x=0$

$\Downarrow$

الرسم البيانيّ III والرسم البيانيّ IV غير ملائمين

$g(x)$ تصاعديّة بالنسبة لِـ $-2\sqrt{2} < x < -2\ ,\ 0 < x < 2$

$g(x)$ تنازليّة بالنسبة لِـ $-2 < x < 0\ ,\ 2 < x < 2\sqrt{2}$

لذلك: $g'(x)$ موجبة بالنسبة لِـ $-2\sqrt{2} < x < -2\ ,\ 0 < x < 2$

$g'(x)$ سالبة بالنسبة لِـ $-2 < x < 0\ ,\ 2 < x < 2\sqrt{2}$

من هنا: الرسم البيانيّ I هو الصحيح

/ يتبع في صفحة 13 /

السؤال 7

معطاة الدالّة $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}$.

أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

(2) جد خطوط التقارب الموازية للمحورين للدالّة $f(x)$.

(3) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين.

(4) جد إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة $f(x)$، وحدّد نوع هذه النقاط.

ب. حسب البند "أ" فقط، ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

جـ. حسب الرسم البيانيّ التقريبيّ للدالّة $f(x)$ الذي رسمتَه فقط، جد المجال الذي يتحقّق فيه:

دالّة المشتقّة $f'(x)$ سالبة ودالّة المشتقّة الثانية $f''(x)$ موجبة.

علّل.

إجابة السؤال 7

أ. (1) $f(x)$ معرّفة بالنسبة لِـ: $x^2-1\neq 0$

$\Downarrow$

مجال تعريف $f(x)$: $x\neq \pm 1$

(2) خطّا التقارب لِـ $f(x)$

الموازيان للمحورين: $x=\pm 1$, $y=1$

(3) نقطة التقاطع مع المحور y : $x=0 \Rightarrow f(0)=-4 \Rightarrow (0,-4)$

نقطة التقاطع مع المحور x : $f(x)=0 \Rightarrow (x-2)=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$

(4) $$f'(x)=\frac{2(x-2)(x^2-1)-(x-2)^2(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$\Downarrow$

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(2x-1)}{(x^2-1)^2}$$

الإحداثيّات x للنقاط "المحتملة" كنقاط قصوى: $f'(x)=0 \Rightarrow x=2 \ , \ x=\frac{1}{2}$

مشتقّة بسط دالّة المشتقّة $f'(x)$ هي: $2(4x-5)$

إشارة المشتقّة الثانية $f''(x)$ تتحدّد حسب إشارة مشتقّة بسط $f'(x)$

$\Downarrow$

لأنّ قاسم $f'(x)$ موجب لكلّ x ، لذلك: $f''(2)$ إشارة $=2(4\cdot 2-5)>0$

$f''(\frac{1}{2})$ إشارة $=2(4\cdot\frac{1}{2}-5)<0$

$\Downarrow$

لِـ $f(x)$ نهاية صغرى في $x=2$ ونهاية عظمى في $x=\frac{1}{2}$

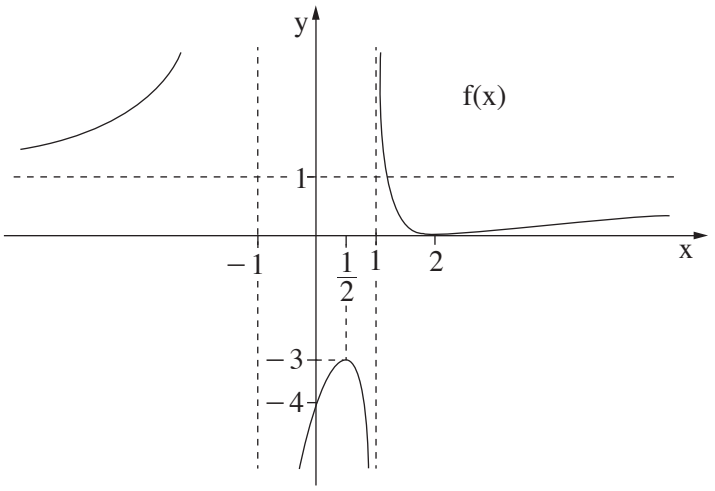
$\Downarrow$

النقطتان القصويان لِـ $f(x)$ هما: نهاية صغرى في $(2,0)$ ، نهاية عظمى في $\left(\frac{1}{2},-3\right)$

/ يتبع في صفحة 14 /

تكملة إجابة السؤال 7.

ب.



جـ. $f'(x) < 0$ بالنسبة لِـ: $1 < x < 2$, $\frac{1}{2} < x < 1$ لأنّ f(x) تنازليّة في هذا المجال

$\Downarrow$

في المجال $1 < x < 2$, $\frac{1}{2} < x < 2$

f(x) مقعّرة باتجاه الأعلى $\cup$ بالنسبة لِـ: $1 < x < 2$

$\Downarrow$

في المجال $\frac{1}{2} < x < 1$, $1 < x < 2$

$f''(x) > 0$ بالنسبة لِـ: $1 < x < 2$

من هنا $f'(x) < 0$ وَ $f''(x) > 0$ بالنسبة لِـ: $1 < x < 2$

/ يتبع في صفحة 15 /

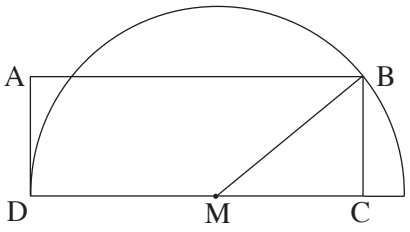
السؤال 8

معطى المستطيل ABCD.

الضلع DC موضوع على قطر نصف الدائرة التي نصف قطرها R ومركزها M، بحيث $DC \geq R$.

الضلع AD يمسّ نصف الدائرة في النقطة D،

والرأس B يقع على محيط الدائرة (انظر الرسم).



نرمز: $\sphericalangle BMC = x$

$S(x)$ – مساحة المستطيل ABCD

أ. جد ماذا يجب أن يكون x، حتّى تكون مساحة المستطيل $S(x)$ أكبر ما يمكن.

ب. عبّر بدلالة R عن المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $S(x)$ والمحور x في المجال $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

إجابة السؤال 8

أ. في المثلّث القائم الزاوية MBC يتحقّق: $MC = R\cos x$ ، $BC = R\sin x$

مساحة المستطيل ABCD هي: $S(x) = BC \cdot (R + MC)$

$$\Downarrow$$

$$S(x) = R\sin x\,(R + R\cos x)$$

$$\Downarrow$$

نستعمل المتطابقة $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$، وينتج: $S(x) = R^2\sin x + \frac{R^2}{2}\sin(2x)$

$$\Downarrow$$

$$S'(x) = R^2\cos x + \frac{R^2}{2}\cdot 2\cos(2x) = R^2(\cos x + \cos(2x))$$

$$S'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x + \cos 2x = 0$$

$$\Downarrow$$

نستعمل المتطابقة $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$، وينتج: $\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$$\Downarrow$$

نستعمل المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$، وينتج: $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$\Downarrow$$

x زاوية حادّة في المثلّث، لذلك $\cos x \neq -1$، لذلك: $\cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}$

/ يتبع في صفحة 16 /

تكملة إجابة السؤال 8.

فحص نهاية عظمى:

$$S''(x) = R^2(-2\sin(2x) - \sin x)$$

$$\Downarrow$$

$$S''\left(\frac{\pi}{3}\right) = R^2\left(-2\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = R^2\left(-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$S''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$$

$$\Downarrow$$

لِـ $S(x)$ نهاية عظمى في $x = \frac{\pi}{3}$

ب. قيَم $S(x)$ ليست سالبة في المجال $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2(\sin x + \frac{1}{2}\sin(2x))\,dx = R^2[-\cos x - \frac{1}{4}\cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = R^2\left(-\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cos(2\cdot\frac{\pi}{2}) + \cos 0 + \frac{1}{4}\cos 0\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = \frac{3}{2}R^2$$

حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.