

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים – $33\frac{1}{3} \times 2$ – $66\frac{2}{3}$ נקודות

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות – $33\frac{1}{3} \times 1$ – $33\frac{1}{3}$ נקודות

סה"כ – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, ב כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשיגים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

- א. מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי של הנקודות, שהמרחק של כל אחת מהן מהישר $-5x + 12y + 13 = 0$, הוא 3.
- ב. מהי משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים בשתי נקודות למקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א?
- ג. האם ציר ה- y יכול להשיק בנקודה $(0,0)$ לאחד המעגלים שבסעיף ב? נמק.

תשובה לשאלה 1

- א. מרחק נקודה (x, y) מהישר $-5x + 12y + 13 = 0$ מקיים:
- $$\left| \frac{-5x + 12y + 13}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \right| = 3$$
- $$\Downarrow$$
- $$\frac{-5x + 12y + 13}{13} = 3 \quad \text{או} \quad \frac{5x - 12y - 13}{13} = 3$$
- $$\Downarrow$$
- $$5x - 12y + 26 = 0 \quad \text{ו} \quad 5x - 12y - 52 = 0$$
- המקום הגאומטרי הוא שני ישרים מקבילים שמשוואותיהם:

- ב. המעגלים משיקים לשני הישרים
- $$\Downarrow$$
- מרחק מרכזי המעגלים מכל ישר הוא 3
- $$\Downarrow$$
- מרכזי המעגלים מונחים על הישר הנתון בסעיף א
- $$\Downarrow$$
- $$-5x + 12y + 13 = 0$$
- משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים:

המשך תשובה לשאלה 1.

ג. אם ציר ה- y משיק למעגל בנקודה $(0, 0)$

אז מרכז המעגל מונח על ציר ה- x במרחק R מציר ה- y ,

ולכן שיעורי המרכז יהיו: $(\pm R, 0)$

רדיוס המעגל הוא $R = 3$, לכן שיעורי המרכז יהיו: $(3, 0)$ או $(-3, 0)$

כדי לבדוק אם המרכזים $(3, 0)$ ו- $(-3, 0)$

נמצאים על המקום הגאומטרי שמצאנו בסעיף ב,

נציב את שיעורי המרכזים במשוואת המקום הגאומטרי, ונקבל: $-5 \cdot 3 + 12 \cdot 0 + 13 \neq 0$, $-5 \cdot (-3) + 12 \cdot 0 + 13 \neq 0$

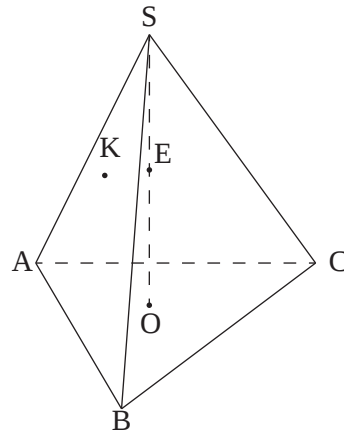
↓

ציר ה- y לא יכול להשיק

לאחד המעגלים בנקודה $(0, 0)$

/המשך בעמוד 4/

שאלה 2



נתונה פירמידה ישרה $SABC$, שבסיסה ABC

הוא משולש שווה-צלעות.

גובה הפירמידה הוא SO .

נקודה E היא אמצע SO (ראה ציור).

נקודה F מקיימת: $\vec{SF} = t\vec{SC}$.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{OS} = \underline{w}$.

נקודה K מקיימת: $\vec{SK} = \frac{1}{9}\underline{u} - \frac{2}{9}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$.

מצא את הערך של t , אם ידוע שהנקודות F , K ו- E נמצאות על ישר אחד.

תשובה לשאלה 2

F על המקצוע SC ,

ועל פי חיבור וקטורים נקבל:

$$\text{I. } \vec{KE} = -\vec{ES} - \vec{SK}, \quad \text{II. } \vec{KF} = \vec{SF} - \vec{SK}$$

על פי הנתון:

$$\vec{ES} = \frac{1}{2}\underline{w}, \quad \vec{SK} = \frac{1}{9}\underline{u} - \frac{2}{9}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$$

נציב $\vec{ES}$ ו- $\vec{SK}$ ב-I, ונקבל:

$$\vec{KE} = -\frac{1}{9}\underline{u} + \frac{2}{9}\underline{v} + \frac{1}{6}\underline{w}$$

על פי חיבור וקטורים:

$$\text{III. } \vec{SC} = -\vec{CO} - \vec{OS}$$

$\vec{CO}$ מונח על התיכון CD במשולש שווה-צלעות

כאשר O מפגש התיכונים ו- D אמצע הצלע AB , לכן:

$$\vec{CO} = \frac{2}{3}\vec{CD}$$

$\vec{CD}$ תיכון במשולש ABC , לכן:

$$\text{IV. } \vec{CD} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB}$$

על פי חיבור וקטורים:

$$\vec{CB} = \underline{u} - \underline{v}$$

נציב $\vec{CB}$ ו- $\vec{CA}$ ב-IV, ונקבל:

$$\vec{CD} = -\frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}(\underline{u} - \underline{v}) = \frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v}$$

↓

$$\vec{CO} = \frac{1}{3}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v}$$

מצאנו $\vec{CO} = \frac{2}{3}\vec{CD}$, לכן:

המשך תשובה לשאלה 2.

נציב $\vec{CO}$ ו- $\vec{OS}$ ב- III, ונקבל:

$$\vec{SC} = -\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} - \underline{w}$$

↓

$$\vec{SF} = -\frac{t}{3}\underline{u} + \frac{2t}{3}\underline{v} - t\underline{w}$$

לפי הנתון $\vec{SF} = t\vec{SC}$, לכן:

$$\vec{KF} = -\left(\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\right)\underline{u} + \left(\frac{2t}{3} + \frac{2}{9}\right)\underline{v} + \left(\frac{2}{3} - t\right)\underline{w}$$

נציב $\vec{SF}$ ו- $\vec{SK}$ ב- II, ונקבל:

$$\vec{KF} = s\vec{KE}$$

מאחר ש- K, F ו- E על ישר אחד, אז צריך להתקיים:

↓

$$\vec{KF} = -\frac{s}{9}\underline{u} + \frac{2s}{9}\underline{v} + \frac{s}{6}\underline{w}$$

על פי יחידות ההצגה של $\vec{KF}$ נקבל:

$$(1) \quad -\frac{s}{9} = -\left(\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\right)$$

$$(2) \quad \frac{2}{9}s = \frac{2t}{3} + \frac{2}{9}$$

$$(3) \quad \frac{s}{6} = \frac{2}{3} - t$$

משוואה (1) שקולה למשוואה (2),

ומהמשוואות (2) ו- (3) מקבלים:

$$t = \frac{1}{3}$$

שאלה 3

א. סרטט במישור גאוס סקיצה של המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z

$$\text{המקיימים: } |z + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3} \text{ . נמק.}$$

ב. המקום הגאומטרי שבסעיף א נפגש עם ציר ה- x בנקודה z_1 .

נתונה הנקודה $M(-3, \sqrt{3})$. נסמן ב- O את ראשית הצירים.

המספר המרוכב z_2 נמצא על המקום הגאומטרי שבסעיף א

כך שהמרחק $z_1 M z_2 O$ הוא דלתון.

מצא את הזווית החדה של הדלתון.

ג. (1) מצא את הארגומנט של z_2 .

(2) מבין המספרים המרוכבים z שבסעיף א, מהו המספר שיש לו הארגומנט הגדול ביותר?

מהו ארגומנט זה?

תשובה לשאלה 3

$$\text{א. נציב } z = x + iy \text{ במשוואת המקום הגאומטרי: } |x + iy + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$|x + 3 + (y - \sqrt{3})i| = \sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$$

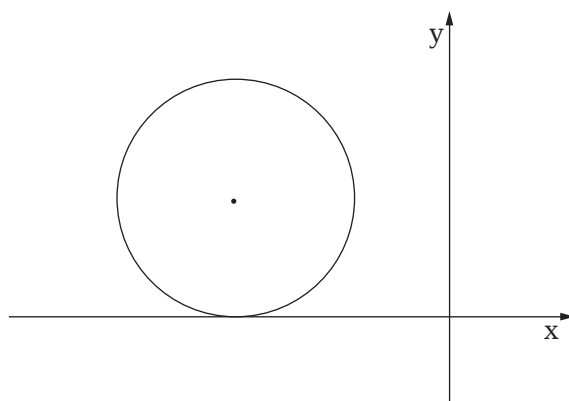
$$\Downarrow$$

$$(x + 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$$

$$\Downarrow$$

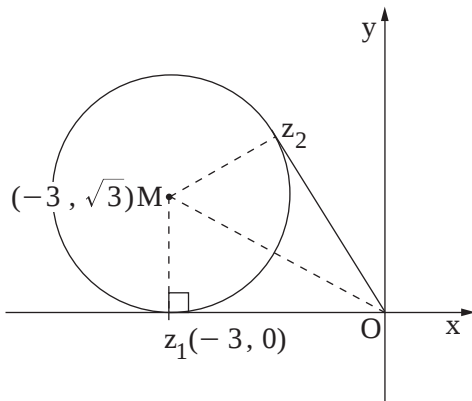
המקום הגאומטרי הוא מעגל שרדיוסו $\sqrt{3}$ ומרכזו $(-3, \sqrt{3})$

$$\Downarrow$$



המשך תשובה לשאלה 3.

ב. מצאנו בסעיף א כי $M(-3, \sqrt{3})$ מרכז המעגל. Oz_1 משיק למעגל (ראה ציור).



$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg} \angle MOz_1 = \frac{Mz_1}{|z_1 O|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\angle MOz_1 = 30^\circ$$

$$\angle z_1 O z_2 = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ \quad \text{בדלתון } z_1 M z_2 O \text{ מתקיים:}$$

$$\angle z_1 O z_2 = 60^\circ \quad \text{ג. (1) מצאנו:}$$

$$\Downarrow$$

$$\arg(z_2) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad \text{ברביע השני, לכן:}$$

(2) הארגומנט של כל נקודה על המעגל

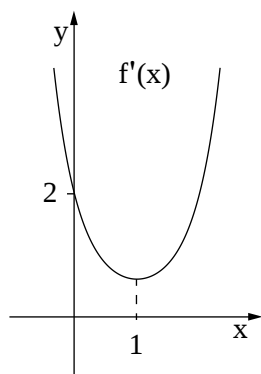
הוא בין 120° ל- 180° , לכן: לנקודה שבה המעגל משיק לציר ה- x יש הארגומנט הגדול ביותר, שהוא 180°

$$\Downarrow$$

למספר $(-3, 0)$ יש הארגומנט הגדול ביותר

שאלה 4

בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת לכל x .



א. על פי הגרף של $f'(x)$

מצא תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$

וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x . נמק.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בחלקו השלילי.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון גם: $f(x) = (x - a)e^{0.5x^2 - x}$, a הוא פרמטר.

היעזר בנתונים בגרף של $f'(x)$, וחשב את השטח המוגבל

על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים.

תשובה לשאלה 4

א. על פי הגרף נקבל:

x	$x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

$f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ עבור: $x < 1$

$f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור: $x > 1$

ב. על פי הגרף: $f'(x) > 0$ לכל x

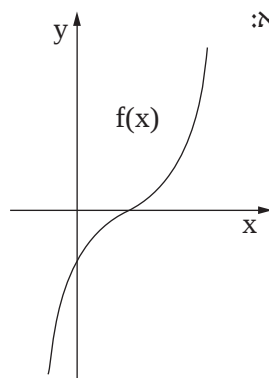
$\Downarrow$

$f(x)$ מוגדרת לכל x , לכן: $f(x)$ עולה לכל x

$\Downarrow$

$f(x)$ חותכת את ציר ה- y בחלקו השלילי,

ועל פי תחומי קעירות סקיצה אפשרית של $f(x)$ היא:



המשך תשובה לשאלה 4

$$f'(x) = e^{0.5x^2 - x} + (x - a)e^{0.5x^2 - x}(x - 1) \quad \text{ג.}$$

$$f'(0) = 2 \quad \text{לפי הגרף של } f'(x):$$

$$\Downarrow$$

$$2 = e^0 + e^0(-a)(-1) \quad \text{נציב } (0, 2) \text{ ב- } f'(x), \text{ ונקבל:}$$

$$\Downarrow$$

$$a = 1$$

$$\text{נציב } a = 1 \text{ בפונקציה } f(x)$$

ונמצא את נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$S = - \int_0^1 [(x - 1)e^{0.5x^2 - x}] dx$$

$$\Downarrow$$

$$S = - [e^{0.5x^2 - x}]_0^1 = -e^{0.5 - 1} + e^0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

לפי הסקיצה של $f(x)$, השטח המבוקש מתחת לציר ה- x , לכן:

הנגזרת של $0.5x^2 - x$ היא $x - 1$, לכן:

שאלה 5

נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4(x^2 + 4x + c)$, c הוא פרמטר.

נתון כי לפונקציה יש אסימפטוטה שמשוואתה $x = -2$.

א. (1) מצא את ערך הפרמטר c .

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(4) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. (1) נתונה הפונקציה $g(x) = -|f(x)|$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) עבור אילו ערכים של k יש למשוואה $g(x) = k$ שני פתרונות בלבד?

תשובה לשאלה 5

א. (1) לפונקציה אסימפטוטה $x = -2$

$\Downarrow$

כאשר הערך של x מתקרב ל- -2 הביטוי בתוך הלוגריתם מתקרב ל- 0

$\Downarrow$

$$(-2)^2 - 4 \cdot 2 + c = 0$$

$\Downarrow$

$$c = 4$$

(2) $f(x)$ מוגדרת עבור: $x^2 + 4x + 4 > 0$

$\Downarrow$

$$x \neq -2$$

$\Downarrow$

$f(x)$ מוגדרת לכל x שונה מ- -2

$$f'(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{1}{\ln 4} \quad (3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

אבל $f(x)$ ו- $f'(x)$ אינן מוגדרות ב- $x = -2$

x	-3	-2	-1	נבדוק את הסימן של $f'(x)$ בסביבות הנקודה $x = -2$:
$f'(x)$	$-$		$+$	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	

$f(x)$ יורדת עבור: $x < -2$

$f(x)$ עולה עבור: $x > -2$

המשך תשובה לשאלה 5

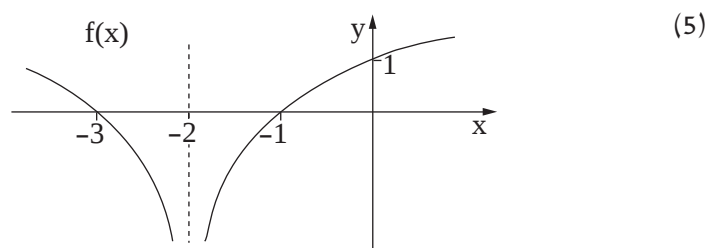
$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 1 \quad (4)$$

$$\Downarrow$$

$$x = -1, x = -3$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

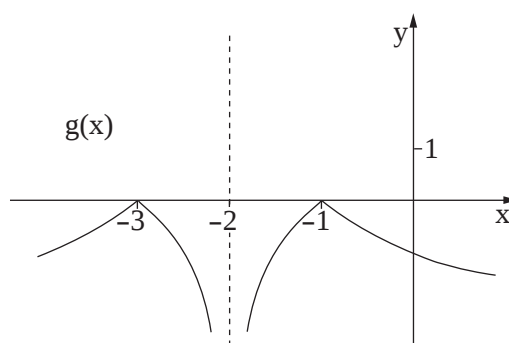
מכאן נקודות החיתוך

של $f(x)$ עם הצירים הן: $(-1, 0)$ $(-3, 0)$ $(0, 1)$ 

ב. (1) בתחומים שבהם $f(x)$ שלילית, הערך המוחלט $|f(x)|$ חיובי, ושם $g(x)$ שלילית ומתלכדת עם $f(x)$.

בתחומים שבהם $f(x)$ חיובית, $g(x)$ שלילית ושווה בערכה המוחלט ל- $f(x)$,

כלומר סימטרית ל- $f(x)$ ביחס לציר ה- x , לכן הסרטוט של $g(x)$ הוא:



(2) לפי הגרף הישר $y = k$ חותך את $g(x)$ בשתי נקודות בלבד רק עבור: $k = 0$