מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: קיץ תשע"ד, 2014
מספר השאלון: 035806, 316

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	20×1	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	20×2	—	40 נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

שאלה 1

משאית יצאה מעיר A , וכעבור 6 שעות מרגע יציאתה הגיעה לעיר B .

זמן מה אחרי יציאת המשאית יצאה מכונית מעיר A ,

והגיעה לעיר B 2 שעות לפני המשאית.

המשאית והמכונית נפגשו כעבור שעה מרגע היציאה של המכונית.

המהירויות של המשאית ושל המכונית היו קבועות.

מצא כמה שעות אחרי רגע היציאה של המשאית יצאה המכונית (מצא את שני הפתרונות).

תשובה לשאלה 1

נסמן: x — הזמן מרגע היציאה של המשאית עד רגע היציאה של המכונית

S — הדרך בין A ל־ B

	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)	מהירות (קמ"ש)
משאית	6	S	$\frac{S}{6}$
מכונית	$6 - x - 2$	S	$\frac{S}{4-x}$
עד הפגישה			
משאית	$1 + x$	$\frac{S}{6} \cdot (1+x)$	$\frac{S}{6}$
מכונית	1	$\frac{S}{4-x} \cdot 1$	$\frac{S}{4-x}$

הדרך שעברה המשאית עד הפגישה

שווה לדרך שעברה המכונית עד הפגישה, לכן:

$$\frac{S}{6}(1+x) = \frac{S}{4-x}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

x = 1 שעה , x = 2 שעות

/המשך בעמוד 3/

שאלה 2

בסדרה חשבונית יש $3n$ איברים.

סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.

א. הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0.

ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0.

סכום כל איברי הסדרה הוא 726.

מצא את הפרש הסדרה.

תשובה לשאלה 2

א. סכום n האיברים האחרונים הוא: $S_{n\text{ אחרונים}} = \frac{n}{2}(2a_{2n+1} + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (5n-1)d)$

סכום n האיברים הקודמים הוא: $S_{n\text{ קודמים}} = \frac{n}{2}(2a_{n+1} + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)$

לפי הנתון:

$$S_{n\text{ אחרונים}} = 2 \cdot S_{n\text{ קודמים}}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{n}{2}(2a_1 + (5n-1)d) = 2 \cdot \frac{n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)$$
$$\Downarrow$$
$$2a_1 = -d(n-1)$$

סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

נציב $2a_1 = -d(n-1)$ ב־ S_n,

ונקבל: $S_n = \frac{n}{2}(-d(n-1) + d(n-1)) = 0$

ב. לפי הנתון:

$$a_5 + a_7 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\text{I.} \quad 2a_1 + 10d = 0$$

מצאנו בסעיף א: $\text{II.} \quad 2a_1 = -d(n-1)$

$d \neq 0$, לכן מ־ I ו־ II נקבל: $n = 11$

$$\Downarrow$$

מספר האיברים בסדרה הוא: $3n = 33$

נציב בסכום האיברים $3n = 33$

ו־ $2a_1 = -10d$ ונקבל: $726 = \frac{33}{2}[-10d + d(33-1)]$

$$\Downarrow$$
$$d = 2$$

/המשך בעמוד 4/

שאלה 3

אבא ודני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים.

המנצח בסיבוב מקבל נקודה אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו, כל אחד מקבל חצי נקודה.

נתון: ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1 ,

ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2 ,

ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7 .

הסיבובים אינם תלויים זה בזה.

א. מהי ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים <u>יותר</u> מנקודה אחת?

ב. מהי ההסתברות שדני יצבור בשני הסיבובים <u>לפחות</u> נקודה אחת?

ג. ידוע כי דני צבר בשני הסיבובים <u>לפחות</u> נקודה אחת.

מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?

ד. אבא ודני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתיח. (בכל משחק שני סיבובים.)

מהי ההסתברות שדני יצבור <u>לפחות</u> נקודה אחת 2 פעמים בדיוק?

תשובה לשאלה 3

א. ההסתברות שאבא יצבור יותר מנקודה אחת היא:

$$P\begin{pmatrix}\text{אבא}\\ \text{יותר מ- 1}\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\text{אבא} & \\ \text{מנצח}\ , & \text{תיקו}\end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} & \text{אבא}\\ \text{תיקו}\ , & \text{מנצח}\end{pmatrix} + P\begin{pmatrix}\text{אבא} & \text{אבא}\\ \text{מנצח}\ , & \text{מנצח}\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$P\begin{pmatrix}\text{אבא}\\ \text{יותר מ- 1}\end{pmatrix} = 0.2 \times 0.7 + 0.7 \times 0.2 + 0.2 \times 0.2 = 0.32$$

ב. ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת היא:

$$P\begin{pmatrix}\text{דני}\\ \text{לפחות 1}\end{pmatrix} = 1 - P\begin{pmatrix}\text{דני} & \text{דני}\\ \text{מפסיד}\ , & \text{מפסיד}\end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} & \text{דני}\\ \text{תיקו}\ , & \text{מפסיד}\end{pmatrix} - P\begin{pmatrix}\text{דני} & \\ \text{מפסיד}\ , & \text{תיקו}\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$P\begin{pmatrix}\text{דני}\\ \text{לפחות 1}\end{pmatrix} = 1 - 0.2 \times 0.2 - 0.7 \times 0.2 - 0.2 \times 0.7 = 0.68$$

ג. ההסתברות, שבאחד הסיבובים יהיה תיקו ובאחר דני ינצח, אם ידוע שצבר לפחות נקודה אחת, היא הסתברות מותנית:

$$P\left(\begin{matrix}\text{אחד תיקו}\\ \text{ובאחר דני מנצח}\end{matrix} \Big/ \begin{matrix}\text{דני}\\ \text{לפחות 1}\end{matrix}\right) = \frac{P\left(\begin{matrix}\text{אחד תיקו}\\ \text{ובאחר דני מנצח}\end{matrix} \cap \begin{matrix}\text{דני}\\ \text{לפחות 1}\end{matrix}\right)}{P\begin{pmatrix}\text{דני}\\ \text{לפחות 1}\end{pmatrix}}$$

$$\Downarrow$$

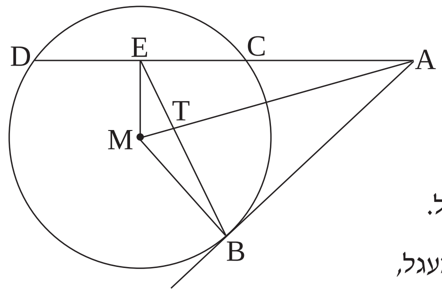
$$P\left(\begin{matrix}\text{אחד תיקו}\\ \text{ובאחר דני מנצח}\end{matrix} \Big/ \begin{matrix}\text{דני}\\ \text{לפחות 1}\end{matrix}\right) = \frac{0.7 \times 0.1 + 0.1 \times 0.7}{0.68} = \frac{7}{34}$$

ד. מצאנו כי ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת במשחק היא 0.68 , לכן ההסתברות המבוקשת היא:

$$P = P_4(2) = \frac{4!}{2!2!} 0.68^2 \times 0.32^2 = 0.284$$

/המשך בעמוד 5/

שאלה 4



מנקודה A יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה B ,

ויוצא ישר אחר החותך את המעגל בנקודות C ו־ D .

הנקודה E היא אמצע המיתר DC .

הנקודה M היא מרכז המעגל (ראה ציור).

א. הוכח כי המרובע AEMB הוא בר חסימה בְּמעגל.

ב. אלכסוני המרובע AEMB , שהוא בר חסימה בְּמעגל, נפגשים בנקודה T .

נתון כי הנקודה T היא מפגש התיכונים במשולש BDC .

הוכח כי $TB^2 = 2MT \cdot TA$.

ג. נתון: $TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ס"מ , $MT = 1$ ס"מ .

מצא את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AEMB .

תשובה לשאלה 4

א. $\sphericalangle MEA = 90^o$ קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר

$\sphericalangle MBA = 90^o$ משיק למעגל מאונך לרדיוס

מכאן: $\sphericalangle MEA + \sphericalangle MBA = 180^o$

$\Downarrow$

מרובע AEMB בר חסימה במעגל — סכום זוויות נגדיות שווה ל־ 180^o

ב. $TB = 2TE$ נקודת המפגש של התיכונים במשולש מחלקת את התיכון ביחס 2:1

$TB \cdot TE = MT \cdot TA$ המיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר האחר

נציב $TE = \frac{TB}{2}$ במכפלת המיתרים, ונקבל:

$$TB \cdot \frac{TB}{2} = MT \cdot TA$$

$$\Downarrow$$

$$TB^2 = 2MT \cdot TA$$

/המשך בעמוד 6/

המשך תשובה לשאלה 4.

ג. מצאנו בסעיף ב: $TB = 2TE$

$\Downarrow$

$TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$, לכן: $TB^2 = 10$

נציב נתונים במשוואה שהוכחנו
בסעיף ב, ונקבל: $10 = 2 \cdot 1 \cdot TA$

$\Downarrow$

$TA = 5$

$AM = MT + TA = 1 + 5 = 6$

AM קוטר — כי הזווית ההיקפית הנשענת על AM היא 90^o

$\Downarrow$

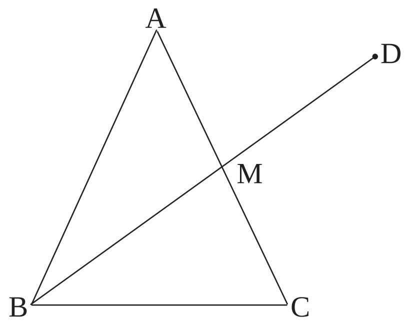
רדיוס $= \frac{AM}{2}$

$\Downarrow$

רדיוס = 3 ס"מ

/המשך בעמוד 7/

שאלה 5



במשולש שווה־שוקיים ABC ($AB = AC$),

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC = 50^\circ$.

א. חשב את גודל הזווית הקהה AMB .

ממשיכים את BM עד הנקודה D .

נתון גם:

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ.

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

ב. חשב את זוויות המשולש AMD .

תשובה לשאלה 5

א. נסמן: $\sphericalangle AMB = \alpha$, $AB = AC = b$

$\sphericalangle BAC = 50^\circ$, לכן: $\sphericalangle ABM = 180^\circ - 50^\circ - \alpha = 130^\circ - \alpha$

BM תיכון, לכן: $AM = \frac{1}{2}b$

לפי משפט הסינוסים במשולש ABM מתקיים: $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}b}{\sin(130^\circ - \alpha)}$

$\Downarrow$

$\sin\alpha = 2(\sin 130^\circ \cos\alpha - \sin\alpha \cos 130^\circ)$

$\Downarrow$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin 130^\circ}{1 + 2\cos 130^\circ}$

$\Downarrow$

$\text{tg}\,\alpha = -5.36$

$\Downarrow$

$90^\circ < \alpha < 180^\circ$, לכן: $\alpha = 100.56^\circ$

/המשך בעמוד 8/

המשך תשובה לשאלה 5.

ב. בסעיף א מצאנו: $\sphericalangle ABM = 130^\circ - \alpha$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle ABM = 29.44^\circ$$

לפי משפט הסינוסים
במשולש ABD מתקיים: $\frac{b}{\sin \sphericalangle ADB} = 2 \times 14$ I.

לפי משפט הסינוסים
במשולש ABC מתקיים: $\frac{b}{\sin 65^\circ} = 2 \cdot 10$ II.

מ־ I ו־ II נקבל: $\sin \sphericalangle ADB = \frac{20 \sin 65^\circ}{28}$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle ADB = 40.34^\circ$$

$$\sphericalangle AMD = 180^\circ - \alpha = 79.44^\circ$$

$\sphericalangle MAD = \alpha - \sphericalangle ADB = 60.22^\circ$ זווית חיצונית למשולש היא סכום זוויות המשולש שאינן צמודות לה

/המשך בעמוד 9/

שאלה 6

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = 2\sin^2 x$, $g(x) = \sin(2x)$, בתחום $0 \le x \le \pi$.

א. בתחום הנתון מצא:

(1) את שיעורי ה־ x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

(2) את נקודות החיתוך של כל אחת משתי הפונקציות עם ציר ה־ x .

ב. (1) נתונה הפונקציה $h(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$.

הראה כי $h'(x) = f(x)$.

(2) בתחום $0 \le x \le \pi$ מצא את השטח הכלוא בין הגרפים

של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

תשובה לשאלה 6

א. (1) בנקודת החיתוך של שתי הפונקציות מתקיים:

$$2\sin^2 x = \sin(2x)$$
$$\Downarrow$$
$$2\sin^2 x = 2\sin x \cos x$$
$$\Downarrow$$
$$2\sin x(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad , \quad \sin x - \cos x = 0$$
$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$
$$\qquad tgx = 1$$
$$\qquad \Downarrow$$

שיעורי ה־ x של נקודות החיתוך בין הגרפים: $x = 0 \ , \ x = \pi \qquad x = \frac{\pi}{4}$

(2)

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = \pi k \Rightarrow x = 0 \ , \ x = \pi$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2x = \pi k \Rightarrow x = 0 \ , \ x = \frac{\pi}{2} \ , \ x = \pi$$

נקודות החיתוך עם הצירים של $f(x)$: $(0, 0) \ , \ (\pi, 0)$

נקודות החיתוך עם הצירים של $g(x)$: $(0, 0) \ , \ (\frac{\pi}{2}, 0) \ , \ (\pi, 0)$

/המשך בעמוד 10/

המשך תשובה לשאלה 6.

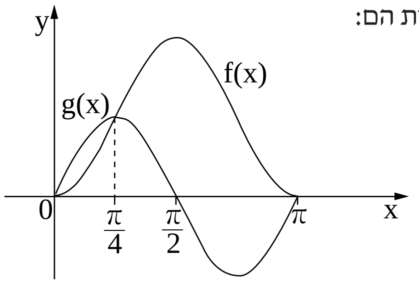
ב. (1) $h(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 2x$$
$$\Downarrow$$
$$h'(x) = 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)$$
$$\Downarrow$$
$$h'(x) = 2\sin^2 x$$
$$\Downarrow$$
$$h'(x) = f(x)$$

(2) $f(x) \geq 0$, $g(x)$ היא פונקציית סינוס,

ולפי נקודות החיתוך של הפונקציות,

נקבל כי הגרפים של הפונקציות הם:



לכן השטח המבוקש הוא:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (f(x) - g(x))\,dx$$
$$\Downarrow$$
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - h'(x))\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (h'(x) - g(x))\,dx$$
$$\Downarrow$$
$$S = [-\frac{1}{2}\cos(2x) - h(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [h(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$
$$\Downarrow$$
$$S = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} - h\left(\frac{\pi}{4}\right) - (-\frac{1}{2}\cos 0 - h(0)) + h(\pi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi) - \left(h\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$S = 2 + \frac{\pi}{2}$$

/המשך בעמוד 11/

שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax^2+9}$. a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) הראה כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) הבע באמצעות a את האסימפטוטות האופקיות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x
ועל ידי הישר $x=-4$, שווה ל־ 2 .
בלי לחשב את הערך של a , חשב את הערך המספרי של $f(-4)$
ואת הערך המספרי של $f(4)$.

תשובה לשאלה 7

א. (1)

$$a>0 \quad , \quad x^2 \geqslant 0 \quad , \quad 9>0$$

$$\Downarrow$$

$ax^2+9>0$ לכל x

$$\Downarrow$$

$f(x)$ מוגדרת לכל x

(2)

$$f'(x)=\frac{2ax}{2\sqrt{ax^2+9}}=\frac{ax}{\sqrt{ax^2+9}}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x)=\frac{a\sqrt{ax^2+9}-\dfrac{ax\cdot 2ax}{2\sqrt{ax^2+9}}}{ax^2+9}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x)=\frac{9a}{(ax^2+9)\sqrt{ax^2+9}}$$

$$\Downarrow$$

מאחר ש־ $a>0$ ו־ $ax^2+9>0$, נקבל: $f''(x)>0$ לכל x

$$\Downarrow$$

אין נקודות פיתול ל־ $f(x)$

/המשך בעמוד 12/

המשך תשובה לשאלה 7.

ב. (1) $ax^2 + 9 > 0$ לכל x

$\Downarrow$

$f'(x)$ מוגדרת לכל x

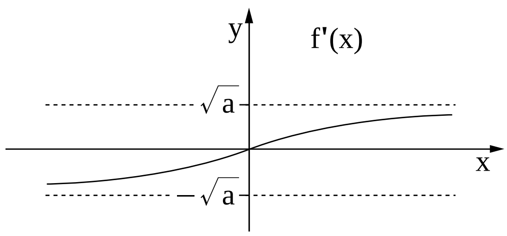
(2) אסימפטוטות של $f'(x)$: $y = \sqrt{a}$, $y = -\sqrt{a}$

(3) מצאנו בסעיף א(2): $f''(x) > 0$ לכל x

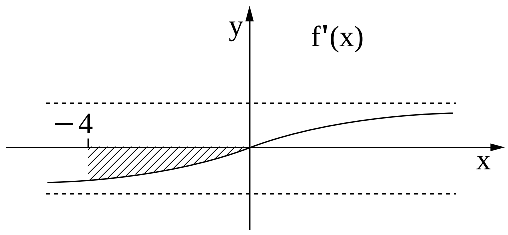
$\Downarrow$

$f'(x)$ עולה לכל x

(4) $f'(0) = 0$, לכן:



ג. השטח ששווה ל־ 2 הוא מתחת לציר ה־ x כמתואר בציור:



$\Downarrow$

$$2 = -\int_{-4}^{0} f'(x)\,dx = -\,[f(x)]_{-4}^{0}$$

$\Downarrow$

$2 = -\,f(0) + f(-4)$

$\Downarrow$

$f(0) = 3$, לכן: $2 = -\,3 + f(-4)$

$\Downarrow$

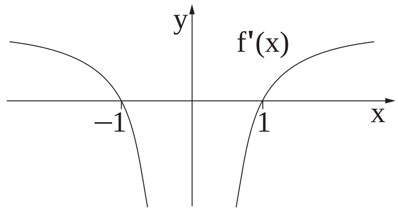
$f(-4) = 5$

$\Downarrow$

מאחר ש־ $f(x) = f(-x)$, נקבל: $f(4) = 5$

/המשך בעמוד 13/

שאלה 8



בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

האסימפטוטה היחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $x = 0$.

נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = 2$

ופתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = -2$.

א. רק על פי נתוני השאלה,

סרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתון גם כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא: $f'(x) = \frac{ax^2 - b}{ax^2}$,

a ו־ b הם פרמטרים שונים מ־ 0 .

מצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

תשובה לשאלה 8

א. על פי הגרף:

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	↗		↘	↘		↗

$\Downarrow$

ל־ $f(x)$ מקסימום ב־ $x = -1$ ומינימום ב־ $x = 1$

$x = 0$ היא האסימפטוטה היחידה של $f(x)$

ואין אסימפטוטות אופקיות, והישרים $y = \pm 2$

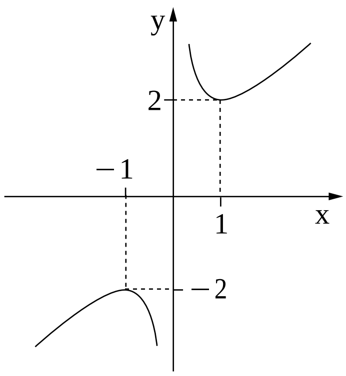
חותכים את $f(x)$ בנקודה אחת, לכן:

$\Downarrow$

$y = 2$ משיק ל־ $f(x)$ בנקודת המינימום

$y = -2$ משיק ל־ $f(x)$ בנקודת המקסימום

מכאן גרף הפונקציה הוא:



/המשך בעמוד 14/

המשך תשובה לשאלה 8.

ב. לפי הגרף: $f'(1) = 0$

נציב נקודה $(1\ ,\ 0)$ ב־ $f'(x)$ ונקבל: $f'(1) = \frac{a-b}{a} = 0$

$$\Downarrow$$

$$a = b$$

נציב $a = b$ ב־ $f'(x)$ ונקבל: $f'(x) = \frac{ax^2 - a}{ax^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \int\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx = x + \frac{1}{x} + C$$

מצאנו בסעיף א כי שיעורי

נקודת המינימום הם $(1, 2)$.

נציב $(1, 2)$ ב־ $f(x)$ ונקבל: $2 = 1 + 1 + C$

$$\Downarrow$$

$$C = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$