מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: קיץ תשע"ד

מספר השאלון: **313 ,035803**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

3 יחידות לימוד — שאלון שלישי

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שש שאלות בנושאים:
אלגברה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.
עליך לענות על ארבע שאלות —
4 × 25 = 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
1. **כתוב את כל החישובים והתשובות בגוף השאלון.**
2. לטיוטה יש להשתמש בדפים שבגוף השאלון (כולל הדפים שבסופו) או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.
3. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה!

دولة إسرائيل
وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان صيف 2014

رقم النّموذج: **035803 ، 313**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

3 وحدات تعليميّة – النّموذج الثّالث

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعتان.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدرجات:
في هذا النّموذج ستّة أسئلة في الموضوعين:
الجبر، حساب التفاضل والتكامل.
عليك الإجابة عن أربعة أسئلة –
4 × 25 = 100 درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:
1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:
1. **اكتب جميع الحسابات والإجابات في نموذج الامتحان.**
2. لكتابة مسوّدة يجب استعمال الصفحات التي في نموذج الامتحان (بما في ذلك الصفحات التي في نهايته) أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين. استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
3. فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبوضوح وبترتيب. عدم التفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

يعرض تاجر للبيع نوعين مختلفين للعبة معيّنة، النوع "أ" والنوع "ب".
سعر اللعبة من النوع "أ" كان أكبر بـ 20 شيقل من سعر اللعبة من النوع "ب".
رفع التاجر سعر اللعبة من النوع "أ" بـ 10 شيقل، ورفع سعر اللعبة من النوع "ب" بـ 3 شيقل.
بعد ارتفاع سعرهما، كان سعر اللعبة من النوع "ب" 55% من سعر اللعبة من النوع "أ".

أ. جد سعر اللعبة من النوع "أ" وسعر اللعبة من النوع "ب" قبل ارتفاع سعرهما.

ب. ما هي النسبة المئويّة التي ارتفع بها سعر اللعبة من النوع "ب"؟

إجابة السؤال 1

نرمز بـ x إلى سعر اللعبة من النوع "ب".

سعر اللعبة من النوع "أ" هو: $x+20$ شيقل

سعر اللعبة من النوع "أ" بعد رفع السعر هو: $x+30$ شيقل

سعر اللعبة من النوع "ب" بعد رفع السعر هو: $x+3$ شيقل

بعد رفع السعرين سعر اللعبة من النوع "ب"
كان 55% من سعر اللعبة من النوع "أ"،
لذلك يتحقّق:

$$x+3=0.55(x+30)$$

$$\Downarrow$$

$$0.45x=13.5$$

$$\Downarrow$$

$$x=30 \text{ شيقل}$$

أ. سعر اللعبة من النوع "ب" هو: 30 شيقل
سعر اللعبة من النوع "أ" هو: 50 شيقل

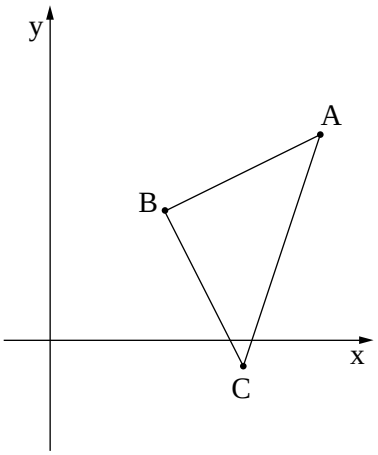
ب. سعر اللعبة من النوع "ب" ارتفع بـ $\frac{3}{30}\cdot 100=10\%$

/ يتبع في صفحة 3 /

السؤال 2

معطى المثلّث ABC .

ضلعا المثلّث AB وَ BC موضوعان على المستقيمين $y=\frac{1}{2}x+2$ وَ $y=-2x+17$ (انظر الرسم) .



أ. جد إحداثيّات النقطة B .

ب. الإحداثيّ x للنقطة A هو 12 .
جد الإحداثيّ y للنقطة A .

جـ. معطى أنّ إحداثيّات النقطة C هي $C(9,-1)$.
برهن أنّ المثلّث ABC هو مثلّث قائم الزاوية ومتساوي الساقين.

د. احسب مساحة المثلّث ABC .

إجابة السؤال 2

أ. النقطة B هي نقطة تقاطُع المستقيمين AB وَ BC،
لذلك إحداثيّات النقطة B تنتج من حلّ هيئة المعادلات:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+2 \\ y=-2x+17 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$x=6 \quad , \quad y=5$$

إحداثيّات النقطة B هي: $B(6,5)$

ب. النقطة A على المستقيم AB .
حسب الرسم، المستقيم AB هو مستقيم تصاعديّ.
لذلك معادلة المستقيم AB هي معادلة المستقيم الذي ميله موجب.
معادلة المستقيم AB هي: $y=\frac{1}{2}x+2$
معطى أنّ الإحداثيّ x للنقطة A هو 12،
لذلك يتحقّق: $y=\frac{1}{2}\cdot 12+2$
$$\Downarrow$$
الإحداثيّ y للنقطة A هو: $y=8$
إحداثيّات النقطة A هي: $A(12,8)$

/ يتبع في صفحة 4 /

تكملة إجابة السؤال 2.

جـ. إحداثيّات النقاط A وَ B وَ C هي: $A(12,8)$, $B(6,5)$, $C(9,-1)$

حساب أطوال أضلاع المثلّث:

طول الضلع AB هو: $AB=\sqrt{(12-6)^2+(8-5)^2}=\sqrt{45}$

طول الضلع AC هو: $AC=\sqrt{(12-9)^2+(8-(-1))^2}=\sqrt{90}$

طول الضلع BC هو: $BC=\sqrt{(6-9)^2+(5-(-1))^2}=\sqrt{45}$

$\Downarrow$

$AB=BC=\sqrt{45}$

$\Downarrow$

المثلّث ABC هو مثلّث متساوي الساقين

نبيّن أنّ المثلّث ABC هو قائم الزاوية أيضًا

الطريقة I

حاصل ضرب ميلَي المستقيمين AB وَ BC هو -1

$\frac{1}{2}\cdot(-2)=(-1)$

$\Downarrow$

الاستنتاج: المستقيمان AB وَ AC متعامدان،
لذلك المثلّث ABC هو مثلّث قائم الزاوية.

الطريقة II

أطوال أضلاع المثلّث تحقّق: $AC^2=AB^2+BC^2$

$90=45+45$

$\Downarrow$

أطوال أضلاع المثلّث ABC تحقّق
نظريّة فيثاغورس، لذلك المثلّث ABC هو مثلّث قائم الزاوية.

د. حساب مساحة المثلّث القائم الزاوية ABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{45}\cdot\sqrt{45}=22.5$

$\Downarrow$

مساحة المثلّث ABC هي: $S_{\Delta ABC}=22.5$

/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 3

معطاة دائرة معادلتها $x^2 + (y-5)^2 = R^2$ ومركزها M .

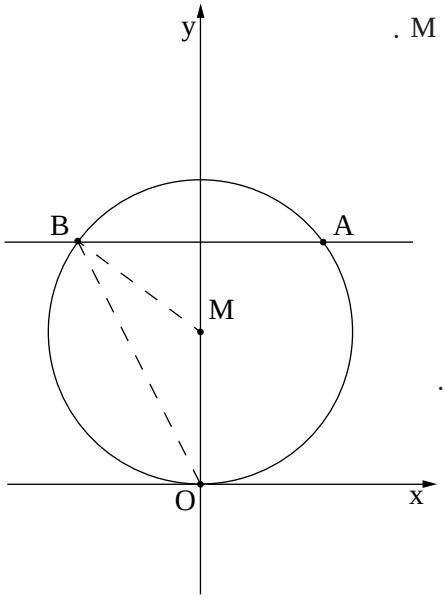
النقطة $A(4\ ,\ 8)$ تقع على محيط الدائرة.

أ. جد R ، واكتب معادلة الدائرة.

مرّروا عبر النقطة A مستقيمًا يوازي المحور x .

هذا المستقيم يقطع الدائرة في نقطة إضافيّة B

(انظر الرسم).



ب. (1) جد معادلة المستقيم الموازي للمحور x .

(2) جد إحداثيّات النقطة B .

جـ. (1) بيّن بمساعدة الحسابات أنّ الدائرة تمرّ عبر نقطة أصل المحاور – O .

(2) جد محيط المثلّث BMO .

دقّق في إجابتك حتّى رقمين بعد الفاصلة العشريّة.

إجابة السؤال 3

أ. النقطة $A(4\ ,\ 8)$ تقع على محيط الدائرة،

لذلك يتحقّق: $4^2 + (8-5)^2 = R^2$

$$\Downarrow$$

$$R^2 = 25$$

$$\Downarrow$$

معادلة الدائرة هي: $x^2 + (y-5)^2 = 25$

ب. (1) المستقيم الذي يمرّ عبر النقطة A

ويوازي المحور x – ميله 0.

المستقيم يقطع أيضًا المحور y

في النقطة $(8\ ,\ 0)$ ، لذلك معادلته: $y = 8$

/ يتبع في صفحة 6 /

تكملة إجابة السؤال 3.

(2) النقطة B تقع على محيط الدائرة
وكذلك على المستقيم $y = 8$ ، لذلك
يتحقّق:

$$\begin{cases} y = 8 \\ x^2 + (y-5)^2 = 25 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 + (8-5)^2 = 25$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 = 16$$
$$\Downarrow$$
$$x = 4 \quad x, = -4$$

النقطتان اللتان تنتجان من حلّ
هيئة المعادلات هما: $A(4,8)$ وَ $(-4,8)$
إحدى النقطتين اللتين تنتجان هي النقطة A،
لذلك، النقطة الثانية هي النقطة B.
إحداثيّات النقطة B هي: $B(-4,8)$

جـ. (1) لإثبات أنّ الدائرة تمرّ عبر
نقطة أصل المحاور يجب فحص إذا
كانت النقطة $(0,0)$ تحقّق معادلة الدائرة.

$$x^2 + (y-5)^2 = 25$$
$$\Downarrow$$
$$0^2 + (0-5)^2 = 25$$
$$25 = 25$$
$$\Downarrow$$

إحداثيّات نقطة أصل المحاور $(0,0)$ تحقّق
معادلة الدائرة، لذلك الدائرة تمرّ عبر
نقطة أصل المحاور.

(2) محيط المثلّث BMO هو مجموع أطوال ثلاثة
الأضلاع: MO وَ MB وَ BO .
$MB = MO = 5$ هما نصفا قطر في الدائرة،
لذلك، بقي حساب طول الوتر BO فقط.
إحداثيّات النقطتين B وَ O هما: $B(-4,8)$, $O(0,0)$
طول الوتر BO هو: $BO = \sqrt{(-4-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{80}$
محيط المثلّث BMO هو: $MO + MB + BO = 10 + \sqrt{80} \approx 18.94$

/ يتبع في صفحة 7 /

السؤال 4

معطاة الدالّة $f(x) = x + 4 + \frac{4}{x}$.

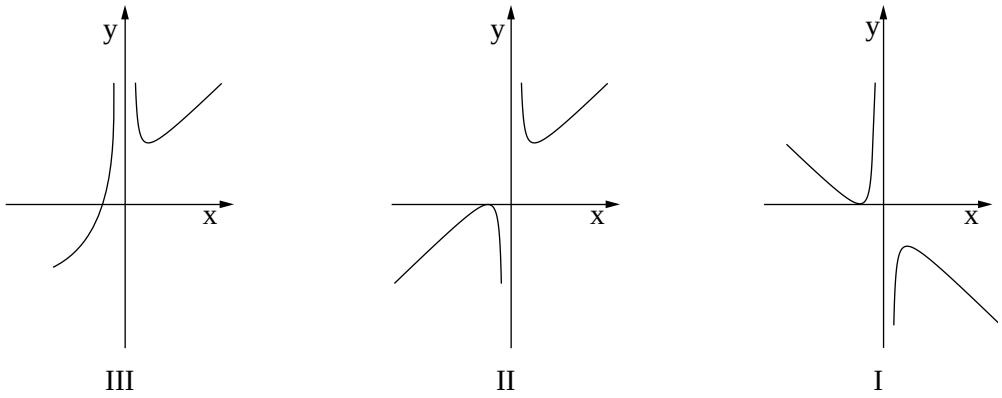
أ. اكتب مجال تعريف الدالّة.

ب جد النقاط القصوى للدالّة، وحدّد نوع هذه النقاط.

جـ. اكتب مجالات تصاعد وتنازل الدالّة.

د. جد نقطة تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحور x .

هـ. حدّد أيّ رسم بيانيّ من الرسوم البيانيّة I-III التي أمامك هو الرسم البيانيّ للدالّة f(x) .
علّل تحديدك.



إجابة السؤال 4

أ. مجال تعريف الدالّة f(x) هو: $x \neq 0$

ب. مشتقّة الدالّة هي: $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

$$f'(x) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 = 4$$
$$\Downarrow$$

النقاط التي تساوي فيها المشتقّة صفرًا: $x = \pm 2$

فحص إشارة المشتقّة f'(x) بين نقاط الصفر:

x	-4	$x = -2$	-1	$x = 0$	1	$x = 2$	4
f'(x)	+	0	−		−	0	+
f(x)	↗ تصاعديّة	نقطة نهاية عظمى	↘ تنازليّة		↘ تنازليّة	نقطة نهاية صغرى	↗ تصاعديّة

النقطتان القصويان للدالّة f(x) هما: نقطة نهاية صغرى: $(2\ ,\ 8)$ نقطة نهاية عظمى: $(-2\ ,\ 0)$

/ يتبع في صفحة 8 /

تكملة إجابة السؤال 4.

جـ. مجالات تصاعد الدالّة هي: $x < -2 \quad , \quad x > 2$

مجالات تنازل الدالّة هي: $-2 < x < 0 \quad , \quad 0 < x < 2$

د. في نقطة تقاطُع الدالّة
مع المحور x ، الإحداثيّ y
للنقطة هو 0 .
لذلك يتحقّق: $f(x) = x + 4 + \frac{4}{x} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = -2$$

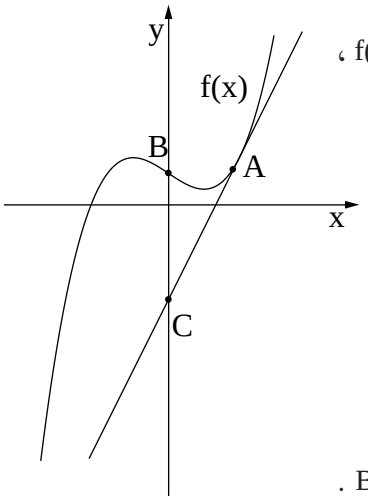
نقطة تقاطُع الدالّة مع
المحور x هي: $(-2 , 0)$

هـ. الرسم البيانيّ II هو الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$.
للدالّة $f(x)$ نقطتان قصويان إحداهما نقطة نهاية صغرى والأخرى نقطة نهاية عظمى.
نقطة النهاية الصغرى $(2 , 8)$ تقع في الربع الأوّل، ونقطة النهاية العظمى هي $(0 , 2-)$.
لذلك الرسم البيانيّ II هو الرسم البيانيّ لِـ $f(x)$.

/ يتبع في صفحة 9 /

السؤال 5

مشتقّة الدالّة $f(x)$ هي $f'(x)=12x^2-3$.



أ. جد الإحداثيّات x للنقاط على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ ، التي ميل المماسّ فيها هو 9 .

يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ ، والمستقيم $y=9x-6$ الذي يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة في النقطة A التي في الربع الأوّل.

ب. (1) جد الإحداثيّ y للنقطة A .

(2) جد الدالّة $f(x)$.

جـ. الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ يقطع المحور y في النقطة B .

المستقيم الذي يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في النقطة A ، يقطع المحور y في النقطة C .

جد طول القطعة BC .

إجابة السؤال 5

أ. ميل المماسّ للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ هو 9 ، لذلك يتحقّق:

$$f'(x)=9$$
$$12x^2-3=9$$
$$\Downarrow$$
$$x^2=1$$
$$\Downarrow$$
$$x=\pm 1$$

الإحداثيّ x للنقاط التي فيها ميل المماسّ يساوي 9 هو:

ب. (1) معطى أنّ $y=9x-6$ يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$.

وجدنا في البند "أ" نقطتين ميل المماسّ فيهما يساوي 9 .

حسب الرسم، النقطة A تقع في الربع الأوّل، لذلك الإحداثيّ x لهذه النقطة هو موجب.

نعوّض $x=1$ في معادلة المماسّ: $y=9\cdot 1-6=3$

$$\Downarrow$$

الإحداثيّ y للنقطة A هو: $y=3$

إحداثيّات النقطة A هي: $A(1\ ,\ 3)$

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة السؤال 5.

(2) الدالّة $f(x)$ هي دالّة أصليّة
لدالّة المشتقّة $f'(x)$ ،
لذلك يتحقّق:

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (12x^2-3)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)=4x^3-3x+C$$

نعوّض إحداثيّات النقطة A في الدالّة $f(x)$: $f(1)=3$

$$f(1)=4\cdot 1^3-3\cdot 1+C=3$$

$$\Downarrow$$

$$C=2$$

الدالّة $f(x)$ هي: $f(x)=4x^3-3x+2$

جـ. B هي نقطة تقاطُع الرسم البيانيّ
للدالّة $f(x)$ مع المحور y $f(0)=2$

$$\Downarrow$$

إحداثيّات النقطة B هي: $B(0\,,\,2)$

C هي نقطة تقاطُع المماسّ
مع المحور y ، لذلك يتحقّق: $y=9\cdot 0-6$

$$\Downarrow$$

إحداثيّات النقطة C هي: $C(0\,,\,-6)$

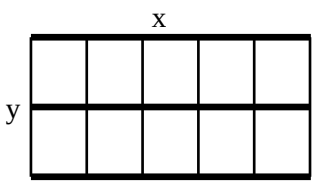
$$\Downarrow$$

لذلك طول القطعة BC هو: $BC=2-(-6)=8$

/ يتبع في صفحة 11 /

السؤال 6

يعرض الرسم الذي أمامك شبكة شكلها مستطيل.



الشبكة مصنوعة من 3 قضبان طويلة طول كلّ واحد منها هو x ، ومن 6 قضبان قصيرة طول كلّ واحد منها هو y .

معطى أنّ: $x \cdot y = 18$.

أ. (1) عبّر عن y بدلالة x.

(2) عبّر بدلالة x عن مجموع أطوال كلّ القضبان المصنوعة منها الشبكة.

ب. ماذا يجب أن يكون x ، حتّى يكون مجموع أطوال كلّ القضبان المصنوعة منها الشبكة أصغر ما يمكن؟

إجابة السؤال 6

أ. (1) معطى أنّ: $x \cdot y = 18$

$$\Downarrow$$

يجب التعبير عن y بدلالة x: $y = \frac{18}{x}$

(2) مجموع أطوال كلّ القضبان المصنوعة منها الشبكة هو: $3x + 6 \cdot \frac{18}{x}$

$$\Downarrow$$

$$3x + \frac{108}{x}$$

ب. نعرّف $f(x)$: دالّة مجموع أطوال كلّ القضبان المصنوعة منها الشبكة.

$f(x)$ هي: $f(x) = 3x + \frac{108}{x}$, $x > 0$

مشتقّة الدالّة $f(x)$ هي: $f'(x) = 3 - \frac{108}{x^2}$

$$f'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = 36$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pm 6$$

نقطة قصوى داخليّة هي: $x > 0 \Rightarrow \quad x = 6$

/ يتبع في صفحة 12 /

تكملة إجابة السؤال 6.

فحص نوع النقطة القصوى
حسب إشارة المشتقّة الأولى $f'(x)$:

x	3	6	10
f'(x)	–	0	+
	↘	نقطة نهاية صغرى	↗

الإحداثيّ x ، الذي بالنسبة له مجموع أطوال
كلّ القضبان المصنوعة منها الشبكة
هو أصغر ما يمكن:

⇓

$x = 6$ نهاية صغرى

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך.
حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.