

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משר החינוך: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים — $33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ נקודות

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות — $33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, ב כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשיגים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

- נתונות הנקודות $A(-a, 0)$ ו- $B(a, 0)$, $a > 0$.
 המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה A גדול פי 2 ממרחקן מהנקודה B זהה למקום הגאומטרי של מספרים מרוכבים z המקיימים $|z + b| = 4$.
 a ו- b הם פרמטרים ממשיים.
 א. מצא את הערך של a ואת הערך של b .
 ב. מלבן $TNEF$, שצלעותיו מקבילות לצירים, חסום במקום הגאומטרי המתואר בפתיח.
 שיעורי ה- y של הקדקודים E ו- F קטנים מ- 0.
 המספר המרוכב $z = 2 + iy$ מייצג את הקדקוד T של המלבן.
 הנקודה C נמצאת על ציר ה- x כך ש- $\vec{CN} \cdot \vec{CF} = -16$.
 מצא את השיעורים של הנקודה C .

תשובה לשאלה 1

- א. נסמן ב- $P(x, y)$ נקודה שמרחקה מ- $A(-a, 0)$ גדול פי 2 ממרחקה מ- $B(a, 0)$
 ונרשום על סמך הנתון:

$$(PA)^2 = 4(PB)^2$$

$$\Downarrow$$

$$(x + a)^2 + y^2 = 4(x - a)^2 + 4y^2$$

$$\Downarrow$$
 משוואת המקום הגאומטרי
 מובעת באמצעות a :
 I. $(x - \frac{5}{3}a)^2 + y^2 = \frac{16a^2}{9}$

- נסמן $z = x + iy$ (x ו- y ממשיים) ולפי
 המשוואה הנתונה של המקום הגאומטרי נקבל:

$$|x + iy + b| = 4$$

$$\Downarrow$$
 II. $(x + b)^2 + y^2 = 4^2$

- מאחר שמשוואה I צריכה להיות
 זהה למשוואה II, נקבל:

$$\frac{16a^2}{9} = 4^2, \quad b = -\frac{5}{3}a$$

$$\Downarrow$$

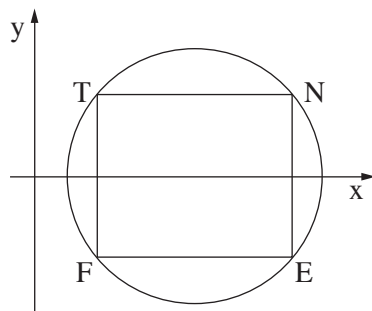
$$(a > 0) \quad a = 3, \quad b = -5$$

המשך תשובה לשאלה 1.

ב. לפי סעיף א משוואת המקום הגאומטרי היא:

$$(x - 5) + y^2 = 16$$

מאחר ששיעורי ה- y של E ו- F הם שליליים, שיעורי ה- y של N ו- T הם חיוביים, כמתואר בציר שלפניך:



$$y = \sqrt{7} \quad T(2, y) \text{ על המעגל, לכן שיעור ה-} y \text{ של } T :$$

↓

$$T(2, \sqrt{7}), N(8, \sqrt{7}), E(8, -\sqrt{7}), F(2, -\sqrt{7}) \quad \text{שיעורי הקדקודים של המלבן:}$$

↓

$$\vec{CN} = (8 - x, \sqrt{7}), \quad \vec{CF} = (2 - x, -\sqrt{7}) \quad \text{נסמן } C(x, 0) \text{ ונקבל:}$$

↓

$$(8 - x, \sqrt{7}) \cdot (2 - x, -\sqrt{7}) = -16 \quad \text{בהסתמך על הנתון } \vec{CN} \cdot \vec{CF} = -16 \text{ נקבל:}$$

↓

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

↓

$$x = 5$$

↓

$$C(5, 0)$$

שאלה 2

הישר ℓ עובר דרך הנקודות $A(0, 0, 1)$ ו- $B(1, 1, 0)$.

הישר מאונך למישור π_1 , וחותך את המישור בנקודה D .

המישור π_1 עובר דרך ראשית הצירים O .

א. מצא את שטח המשולש OAD .

ב. (1) המישור π_2 מכיל את ציר ה- x ומקביל לישר ℓ .

מצא את הזווית בין הישר ℓ ובין ישר החיתוך שבין המישור π_1 למישור π_2 .

(2) מצא את המרחק של הישר ℓ מישור החיתוך שבין המישור π_1 למישור π_2 .

תשובה לשאלה 2

א. הצגה אלגברית של הישר ℓ העובר

דרך $A(0, 0, 1)$ ו- $B(1, 1, 0)$:

$$\ell: \underline{x} = (0, 0, 1) + t(1, 1, -1)$$

$\Downarrow$

$$(1, 1, -1)$$

$\Downarrow$

$$\pi_1: x + y - z = 0$$

$\Downarrow$

$$D(t, t, 1-t)$$

הנקודה D שבמישור π_1 מקיימת:

$$D\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$\Downarrow$

$$|\vec{OD}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

מהצבת $D(t, t, 1-t)$ במשוואת המישור π_1 נקבל:

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

הווקטור $\vec{AD}$ מקיים:

$\Downarrow$

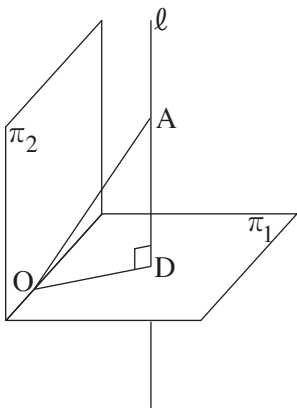
$$|\vec{AD}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} |\vec{AD}| \cdot |\vec{OD}|$$

שטח משולש OAD (ראה ציור):

$\Downarrow$

$$S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$



המשך תשובה לשאלה 2.

ב. (1) דרך I

הישר ℓ מאונך ל- π_1 , לכן:

הישר ℓ מאונך לכל ישר הכלול ב- π_1

$\Downarrow$

ℓ מאונך לישר החיתוך שבין π_1 ל- π_2

דרך II

המשוואה של המישור π_2

המכיל את וקטור הכיוון של ℓ : $(1, 1, -1)$,

את וקטור הכיוון של ציר ה- x : $(1, 0, 0)$

ואת ראשית הצירים, היא:

$$\pi_2: y + z = 0$$

מצאנו כי משוואת המישור π_1 היא:

$$\pi_1: x + y - z = 0$$

לכן ישר החיתוך עם מישור π_1 הוא:

$$u(2, -1, 1)$$

הזווית בין הישר ℓ לישר החיתוך:

$$\cos \alpha = \frac{(2, -1, 1) \cdot (1, 1, -1)}{\sqrt{2^2 + 1 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1 + 1}} = 0$$

$\Downarrow$

$$\alpha = 90^\circ$$

(2) מאחר ש- ℓ מקביל ל- π_2 , המרחק המבוקש הוא המרחק של נקודה על ℓ מהמישור π_2 .

לפי ב(1) משוואת π_2 היא:

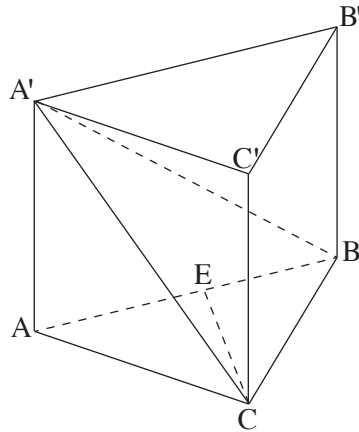
$$\pi_2: y + z = 0$$

$\Downarrow$

$$\frac{|(0, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{1 + 1} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

מרחק $A(0, 0, 1)$ מהמישור π_2 :

שאלה 3



נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$

שבסיסה משולש שווה-צלעות.

הנקודה E נמצאת על המקצוע AB

כך ש- $AE = kAB$ ($0 < k < 1$).

א. נתון כי הזווית בין המישור $A'EC$

למישור ABC היא הזווית $A'EA$.

מצא את הערך של k.

נתון: $AC = 2$, $\angle A'EA = 45^\circ$.

הזווית בין המישור $A'EC$ למישור ABC היא $\angle A'EA$.

ב. חשב את הזווית בין המישור ABC למישור $A'BC$.

נקודה F נמצאת על המישור $A'BC$ (לאו דווקא על BC) כך ש- $\vec{AF}$ מאונך ל- $\vec{BC}$,

ומתקיים: $\vec{A'F} = t\vec{A'C} + m\vec{A'B}$.

ג. סמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{u}$, $\vec{AB} = \underline{v}$, והוכח כי $t = m$.

תשובה לשאלה 3

א. EC הוא ישר החיתוך בין

המישור $A'EC$ למישור ABC,

לכן צריך להתקיים:

$$AE \perp EC, \quad A'E \perp EC$$

$\Downarrow$

EC גובה במשולש שווה-צלעות ABC

$\Downarrow$

EC תיכון במשולש שווה-צלעות ABC

$\Downarrow$

E אמצע AB

$\Downarrow$

$$k = \frac{1}{2}$$

המשך תשובה לשאלה 3.

ב. אם נסמן ב-P את אמצע BC, אז הזווית בין המישור ABC למישור A'BC היא:

$$\angle A'PA$$

$$\text{tg } \angle A'PA = \frac{AA'}{AP} \quad \text{במשולש } A'PA \text{ מתקיים:}$$

$$AP = \sqrt{3} \quad \text{לפי הנתונים במשולש } ABC \text{ מקבלים:}$$

$$\angle AA'E = \angle A'EA = 45^\circ \quad \text{לפי הנתונים במשולש } A'EA \text{ מתקיים:}$$

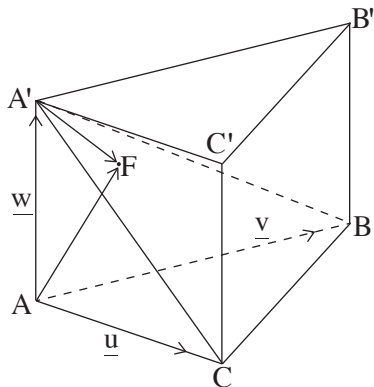
$$\Downarrow$$

$$AA' = AE = \frac{1}{2}AC = 1$$

$$\text{tg } \angle A'PA = \frac{AA'}{AP} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{מכאן:}$$

$$\Downarrow$$

$$\angle A'PA = 30^\circ$$



$$\vec{A'C} = \underline{u} - \underline{w}, \quad \vec{A'B} = \underline{v} - \underline{w} \quad \text{ג. על פי הנתונים מקבלים:}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{A'F} = t(\underline{u} - \underline{w}) + m(\underline{v} - \underline{w})$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{AF} = \underline{w} + \vec{A'F} = t\underline{u} + m\underline{v} - (t + m - 1)\underline{w}$$

$$\vec{BC} = \underline{u} - \underline{v} \quad \text{על פי הנתונים מקבלים:}$$

$$\vec{AF} \cdot \vec{BC} = t|\underline{u}|^2 - m|\underline{v}|^2 - t|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cos 60^\circ + m|\underline{v}| \cdot |\underline{u}| \cos 60^\circ = 0 \quad \text{לכן, } \vec{AF} \perp \vec{BC}$$

$$\Downarrow$$

$$t|\underline{u}|^2 - m|\underline{u}|^2 - \frac{1}{2}t|\underline{u}|^2 + \frac{1}{2}m|\underline{u}|^2 = 0 \quad \text{מאחר ש- } |\underline{u}| = |\underline{v}| \neq 0 \text{ , מקבלים:}$$

$$\Downarrow$$

$$t = m$$

/המשך בעמוד 8/

שאלה 4

א. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{-ax}$, $g(x) = e^{ax}$, $a > 0$.

(1) סמן במערכת צירים את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$

והישר $x = \frac{1}{a}$ ואת השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ והישר $x = -\frac{1}{a}$.

(2) השטחים שסימנת בתת-סעיף א (1) מסתובבים סביב ציר ה- x .

הבע כפונקציה של a את הנפח הכולל של גוף הסיבוב שנוצר, $V(a)$.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $V(a)$.

ב. בתאריך 1/1/2005 הופקד בבנק א' סכום כסף מסוים, ובאותו תאריך הופקד גם בבנק ב' אותו סכום כסף. בכל אחד מהבנקים סכום הכסף שהופקד גדל כל שנה באחוז קבוע.

כעבור 7 שנים היו בבנק א' 12,298 שקלים, ובבנק ב' היו 13,162 שקלים.

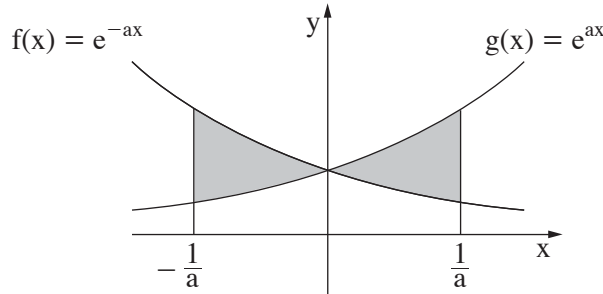
כעבור כמה שנים מהתאריך 1/1/2005 יהיה בבנק ב' סכום כסף הגדול ב- 25% מסכום

הכסף שיהיה בבנק א'?

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

תשובה לשאלה 4

א. (1)



(2) מאחר שהשטח האפור שבציור סימטרי ביחס לציר ה- y ,

הנפח $V(a)$ הוא פעמיים נפח גוף הסיבוב

שבגבולות בין 0 ל- $\frac{1}{a}$:

$$V(a) = 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} e^{2ax} dx - 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} e^{-2ax} dx$$

$\Downarrow$

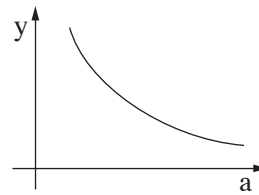
$$V(a) = 2\pi \left[\frac{1}{2a} e^{2ax} + \frac{1}{2a} e^{-2ax} \right]_0^{\frac{1}{a}}$$

$\Downarrow$

$$V(a) = \frac{\pi(e^2 + e^{-2} - 2)}{a}$$

המשך תשובה לשאלה 4.

א. (3) עבור $a > 0$ הגרף הוא:



ב. כעבור 7 שנים סכום הכסף בבנק א': $I. \quad 12,298 = M_0 \cdot q^7$

כעבור 7 שנים סכום הכסף בבנק ב': $II. \quad 13,162 = M_0 \cdot a^7$

$$\frac{12,298}{13,162} = \left(\frac{q}{a}\right)^7 \quad \text{מ- I ו- II מקבלים:}$$

$\Downarrow$

$$\frac{q}{a} = \left(\frac{12,298}{13,162}\right)^{\frac{1}{7}}$$

כעבור x שנים, כאשר סכום הכסף בבנק ב'

יהיה גדול ב- 25% מסכום הכסף בבנק א', יתקיים: $1.25 \cdot M_0 \cdot q^x = M_0 \cdot a^x$

$\Downarrow$

$$III. \quad \left(\frac{q}{a}\right)^x = \frac{1}{1.25}$$

$$\left(\frac{12,298}{13,162}\right)^{\frac{x}{7}} = \frac{1}{1.25}$$

$\Downarrow$

$$x = 7 \cdot \frac{\ln \frac{1}{1.25}}{\ln \frac{12,298}{13,162}} = 23.0 \text{ שנים}$$

מהצבת $\frac{q}{a}$ במשוואה III נקבל:

שאלה 5

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx}{\ln x}$, k הוא פרמטר שונה מ-0.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצא עבור אילו ערכים של k לפונקציה $f(x)$ יש מקסימום.

נתון כי בתחום $x > 1$ הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים $y \leq -2$ ורק אותם.

(2) מצא את הערך של k .

(3) נתון גם כי הישר $x = 1$ הוא האסימפטוטה היחידה של הפונקציה $f(x)$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בכל תחום הגדרתה.

ג. מבין המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x > 1$, מצא את נקודת ההשקה של המשיק

ששיפועו מינימלי.

תשובה לשאלה 5

א. הפונקציה מוגדרת עבור: $x > 0$, $\ln x \neq 0$

$\Downarrow$

תחום ההגדרה: $0 < x < 1$ או $x > 1$

ב. (1) $f(x) = \frac{kx}{\ln x}$

$\Downarrow$

$$f'(x) = \frac{k \ln x - kx \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{k(\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

הסימן של $f'(x)$ בנקודת ההתאפסות של $f'(x)$

ייקבע על פי הסימן של נגזרת המונה של $f'(x)$: $k \cdot \frac{1}{x} =$ נגזרת המונה

$\Downarrow$

מאחר ש- $x > 0$ אז מקבלים: עבור $k < 0$ ל- $f(x)$ יש מקסימום

(2) לפי הנתון הערך המקסימלי של $f(x)$ עבור $x > 1$ הוא: I. $y = -2$

המקסימום של $f(x)$ מתקבל כאשר: $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

הערך של $f(x)$ ב- $x = e$ הוא: II. $f(e) = \frac{k \cdot e}{\ln e}$

מ- I ו- II מקבלים: $-2 = \frac{k \cdot e}{\ln e}$

$\Downarrow$

$$k = -\frac{2}{e}$$

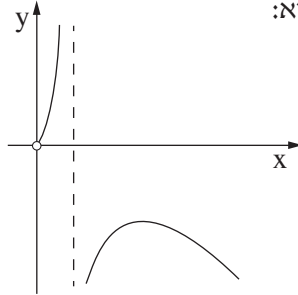
המשך תשובה לשאלה 5.

ב. (3) עבור $x < 1$: $f'(x) > 0$

$\Downarrow$

$f(x)$ עולה עבור $x < 1$

ומצאנו כי יש מקסימום ב- $(e, -2)$ לכן הגרף הוא:



ג. שיפוע המשיק הוא:

$$f'(x) = \frac{2}{e} \cdot \frac{1 - \ln x}{\ln^2 x}$$

$\Downarrow$

$$f''(x) = \frac{2}{e} \cdot \frac{-\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - (1 - \ln x) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x}$$

$\Downarrow$

$$f''(x) = \frac{2}{e} \cdot \frac{\ln x (\ln x - 2)}{x \ln^4 x} = \frac{2}{e} \cdot \frac{\ln x - 2}{x \ln^3 x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \ln x - 2 = 0 \Rightarrow x = e^2$$

$\Downarrow$

$$f(e^2) = -\frac{2}{e} \cdot \frac{e^2}{\ln e^2} = -e$$

נבדוק את סוג הקיצון עבור $x > 1$:

x	e	e^2	e^3
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

לפי הטבלה ל- $f'(x)$ יש מינימום ב- $x = e^2$,

לכן נקודת ההשקה של המשיק ששיפועו מינימלי היא: $(e^2, -e)$