

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משר הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16 \frac{2}{3} \times 2$	—	$33 \frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה				
		במישור	—	$16 \frac{2}{3} \times 2$	—	$33 \frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16 \frac{2}{3} \times 2$	—	$33 \frac{1}{3}$ נקודות
		סה"כ	—			100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
- (2) שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
- חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשיגים.
- שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

שאלה 1

ראובן ושמעון חופרים יחד תעלה אחת ב־ 12 שעות.
אם ראובן חופר לבד $\frac{1}{3}$ מהתעלה, ולאחר שהוא מסיים את חלקו שמעון חופר לבד את יתר התעלה, החפירה מסתיימת כעבור $23\frac{1}{3}$ שעות.
כמה תעלות שלמות לכל היותר יחפור ראובן לבד בפחות מ־ 100 שעות? התעלות זהות לתעלה הנתונה.
הספקי העבודה של שמעון ושל ראובן אינם משתנים.

תשובה לשאלה 1

א.

זמן העבודה (שעות)	קצב העבודה ($\frac{1}{\text{שעה}}$)	סה"כ עבודה
ראובן	$\frac{x}{3}$	$\frac{1}{3}$
שמעון	$\frac{2y}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{I. } 12y + 12x = xy$$

$$\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} = 23\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{II. } x = 70 - 2y$$

$$y^2 - 41y + 420 = 0 \quad \text{מ־ I ו־ II מקבלים:}$$

$\Downarrow$

$$y = 20 \text{ שעות} \quad \text{או} \quad y = 21 \text{ שעות} \quad \text{הזמן ששמעון חופר לבד תעלה אחת:}$$

$\Downarrow$

$$x = 30 \text{ שעות} \quad \text{או} \quad x = 28 \text{ שעות} \quad \text{הזמן שראובן חופר לבד תעלה אחת:}$$

$\Downarrow$

$$\frac{100}{28} = 3.57 \quad \text{או} \quad \frac{100}{30} = 3.33 \quad \text{בפחות מ־ 100 שעות מספר התעלות שראובן יחפור קטן מ:}$$

$\Downarrow$

$$3 \text{ תעלות} \quad \text{מספר התעלות השלמות שראובן יחפור לכל היותר בפחות מ־ 100 שעות:}$$

שאלה 2

נתונה סדרה a_n : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ונתונה סדרת הסכומים S_n : $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$

S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

ב. נתון כי $|b| < 1$.

I. $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, \dots$: II. a_n שתי סדרות הנדסיות, I ו-II:

II. $a_1, -a_3, a_5, -a_7, \dots$

T הוא הסכום של אינסוף איברי הסדרה I,

M הוא הסכום של אינסוף איברי הסדרה II.

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

תשובה לשאלה 2

א. עבור $n > 1$: $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

$\Downarrow$

$$a_{n+1} = b \cdot S_n + 3 - (b \cdot S_{n-1} + 3)$$

$\Downarrow$

$$a_{n+1} = b(S_n - S_{n-1}) = b \cdot a_n$$

$\Downarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = b \quad \text{המנה עבור } n > 1 \text{ היא:}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{S_2 - S_1}{S_1} = \frac{bS_1 + 3 - S_1}{S_1} = \frac{b \cdot 3 + 3 - 3}{3} = b \quad \text{נבדוק אם גם עבור } n = 1 \text{ המנה היא } b:$$

המנה היא מספר קבוע b , לכן הסדרה a_n היא הנדסית.

המשך תשובה לשאלה 2.

ב. מנת הסדרה I היא:

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 \cdot b^6}{a_1 \cdot b^2} = b^4$$

מנת הסדרה II היא:

$$\frac{-a_3}{a_1} = \frac{-a_1 b^2}{a_1} = -b^2$$

$$0 < b^4 < 1, \text{ לכן}$$

הסכום של הסדרה I הוא:

$$T = \frac{a_3}{1 - b^4} = \frac{a_1 \cdot b^2}{1 - b^4}$$

$$-1 < -b^2 < 0, \text{ לכן}$$

הסכום של הסדרה II הוא:

$$M = \frac{a_1}{1 + b^2}$$

מכאן:

$$\frac{M}{T} = \frac{a_1}{1 + b^2} \cdot \frac{1 - b^4}{a_1 \cdot b^2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{M}{T} = \frac{1 - b^2}{b^2}$$

לאחר צמצום ב- a_1 וב- $1 + b^2$ מקבלים:

שאלה 3

מבין כל תלמידי י"ב בעיר מסוימת מאתרים תלמידים שיתאימו לקורס ייחודי. הקורס מתאים לתלמידים שיש להם יכולת טכנית. הבחנות מאבחנות 80% מבין התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית, ומאבחנות 10% מבין התלמידים שאין להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית. מבין התלמידים שאובחנו כבעלי יכולת טכנית, אחוז התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית גדול פי 4 מאחוז התלמידים (בקבוצה זו) שאין להם יכולת זו. א. מהי ההסתברות שלתלמיד י"ב בעיר זו אכן יש יכולת טכנית? ב. באותה עיר כל אלה שאובחנו כבעלי יכולת טכנית השתתפו בקורס, ורק הם. בעיר יש 600 תלמידי י"ב. מבין המשתתפים בקורס לכמה תלמידים אין יכולת טכנית?

תשובה לשאלה 3

א. נסמן: A — קבוצת התלמידים בעלי יכולת טכנית
B — קבוצת התלמידים שאובחנו כבעלי יכולת טכנית

$$P(B/\bar{A}) = 0.1, \quad P(B/A) = 0.8 \quad \text{לפי הנתון:}$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\text{II. } P(B \cap \bar{A}) = 0.1 \cdot P(\bar{A}) = 0.1(1 - P(A)), \quad \text{I. } P(B \cap A) = 0.8P(A)$$

$$P(A/B) = 4P(\bar{A}/B) \quad \text{לפי הנתון:}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{III. } \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$

$$0.8P(A) = 4 \cdot 0.1(1 - P(A)) \quad \text{מ- I, II ו- III מקבלים:}$$

$$\Downarrow$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

המשך תשובה לשאלה 3.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0.8P(A) + 0.1(1 - P(A)) \quad \text{ב.}$$

$$\Downarrow$$

$$P(B) = \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

לכן מבין המשתתפים בקורס
ההסתברות שלתלמיד אין יכולת
טכנית היא:

$$600 \times P(B)$$

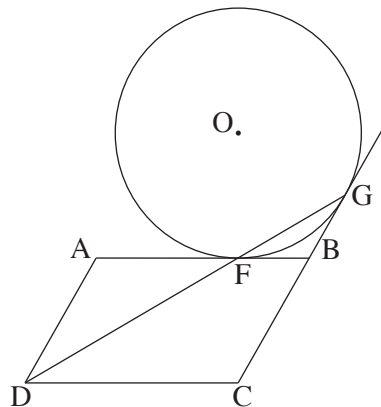
מספר התלמידים בקורס הוא:

$$600 \cdot P(B) \cdot P(\bar{A}/B) = 600 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = 40$$

מספר התלמידים בקורס
שאינן להם יכולת טכנית הוא:

/המשך בעמוד 7/

שאלה 4



נתונה מקבילית ABCD.

הצלע AB משיקה למעגל שמרכזו O בנקודה F.

המשך הצלע CB משיק למעגל בנקודה G.

(ראה ציור).

נתון: $AF = AD$.

א. הוכח כי הנקודה F נמצאת על הישר DG.

ב. נתון גם: $BO = BC$, $FC \perp DC$.

(1) הוכח כי $OF = FC$.

(2) הוכח כי $FB = \frac{1}{2}BO$.

תשובה לשאלה 4

א. נתון: ABCD – מקבילית

BF ו-BG משיקים למעגל

$AF = AD$

צ"ל: $\angle AFD + \angle AFG = 180^\circ$

שני משיקים למעגל, היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.

במשולש מול צלעות שוות יש זוויות שוות.

סכום זוויות במשולש הוא 180° .

כי הן זוג זוויות מתחלפות בין מקבילים.

במשולש מול צלעות שוות יש זוויות שוות.

$FB = BG$

$\Downarrow$

$\angle FGB = \angle GFB = \alpha$

$\Downarrow$

$\angle FBG = 180^\circ - 2\alpha$

$\angle FBG = \angle A$

$\angle AFD = \angle ADF$

$\Downarrow$

$\angle AFD = \frac{180^\circ - \angle A}{2}$

$\Downarrow$

$\angle AFD = \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\alpha)}{2} = \alpha$

הוכחה:

במשולש FBG מתקיים:

מצאנו $\angle GFB = \alpha$,

F על הצלע AB.

$\angle AFG = 180^\circ - \angle GFB = 180^\circ - \alpha$

לכן:

$\angle AFD + \angle AFG = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$

המשך תשובה לשאלה 4.

ב. (1)

משיק למעגל מאונך לרדיוס $\angle OFB = 90^\circ$

לפי הנתון:

$$\angle DCF = 90^\circ$$

$\Downarrow$

זוויות מתחלפות בין מקבילים שוות זו לזו $\angle BFC = \angle DCF = 90^\circ$

$\Downarrow$

$$\angle BFC + \angle OFB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\Downarrow$

F על הישר OC

$\Downarrow$

BF גובה במשולש שווה-שוקיים OBC, $OF = FC$
לכן BF גם תיכון לצלע OC.

זוויות צמודות משלימות ל- 180° $\angle FBC = 180^\circ - \angle FBG = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$ (2)

$\Downarrow$

I. $\angle FBO = \angle FBC = 2\alpha$ BF גובה במשולש שווה-שוקיים OBC,

לכן BF גם חוצה-זווית $\angle OBC$

II. $\angle FBO = \angle GBO = \frac{1}{2} \angle FBG = 90^\circ - \alpha$ קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה שממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

מ- I ו- II מקבלים: $90^\circ - \alpha = 2\alpha$

$\Downarrow$

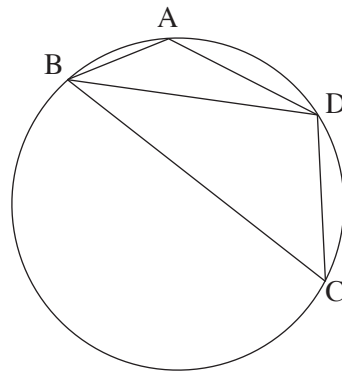
$$\alpha = 30^\circ$$

סכום זוויות במשולש הוא 180° $\angle FOB = 90^\circ - \angle FBO = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$

$\Downarrow$

אם במשולש ישר זווית יש זווית חדה של 30° , $FB = \frac{1}{2}BO$
הניצב מול זווית זו שווה לחצי היתר.

שאלה 5



מרובע ABCD חסום במעגל.

המיתר BD חוצה את הזווית ABC (ראה ציור).

נתון: $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$,

$\angle ADC = 120^\circ$.

א. (1) מצא את גודל הזווית ABD.

(2) מצא את אורך המיתר BD.

ב. נקודה K נמצאת על המיתר BD

כך ש- $\triangle ABK \sim \triangle DBA$ בהתאמה.

מצא את שטח המשולש ABK.

תשובה לשאלה 5

$$\text{א. (1)} \quad \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \quad \text{במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות הוא } 180^\circ$$

$\Downarrow$

$$\angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2} \angle ABC = \angle ABD = 30^\circ \quad \text{לפי הנתון BD חוצה } \angle ABC$$

$$\text{(2)} \quad AD = DC = a \quad \text{במעגל לזוויות היקפיות שוות יש מיתרים שווים}$$

$$a^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos \angle ABD \quad \text{לפי משפט הקוסינוסים במשולש ABD :}$$

$\Downarrow$

$$\text{I.} \quad a^2 = 3 + BD^2 - 2\sqrt{3} \cdot BD \cos 30^\circ$$

$$a^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cos \angle DBC \quad \text{לפי משפט הקוסינוסים במשולש CBD :}$$

$\Downarrow$

$$\text{II.} \quad a^2 = 9 \cdot 3 + BD^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot BD \cos 30^\circ$$

$$0 = 24 - 6 \cdot BD \quad \text{מהחסרת I מ-II מקבלים:}$$

$\Downarrow$

$$BD = 4$$

המשך תשובה לשאלה 5.

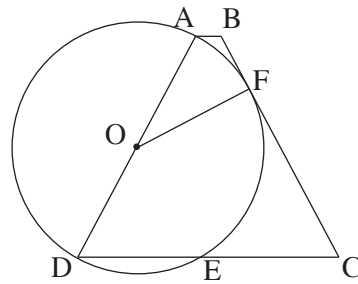
ב. $\frac{S_{\Delta DBA}}{S_{\Delta ABK}} = \frac{BD^2}{AB^2} = \frac{4^2}{3}$
 במשולשים דומים יחס השטחים שווה
 לריבוע יחס הדמיון

$$S_{\Delta DBA} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin \angle ABD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$S_{\Delta ABK} = \frac{3}{4^2} \cdot S_{\Delta DBA} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

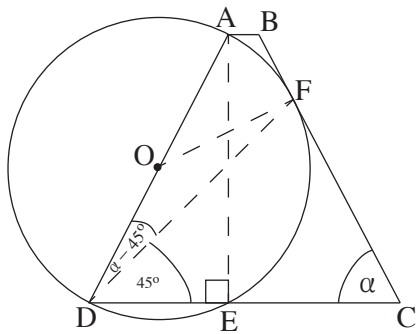
/המשך בעמוד 11/

שאלה 6



- נתון טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AD = BC$).
 השוק AD היא קוטר במעגל שמרכזו O .
 השוק BC משיקה למעגל בנקודה F .
 המעגל חותך את הבסיס DC בנקודה E (ראה ציור).
 נתון: $\angle BCD = \alpha$.
 א. הבע באמצעות α את גודל הזווית FOD .
 ב. (1) הבע באמצעות α את גודל הזווית ODF .
 (2) הבע באמצעות α את היחס $\frac{DE}{DC}$.

תשובה לשאלה 6



- א. $\angle OFC = 90^\circ$ משיק מאונך לרדיוס
 $\angle ODC = \angle FCD = \alpha$ בטרפז שווה-שוקיים
 זוויות הבסיס שוות
 $\angle FOD = 360^\circ - (90^\circ + 2\alpha)$ סכום זוויות במרובע
 $\Downarrow$ הוא 360°
 $\angle FOD = 270^\circ - 2\alpha$

המשך תשובה לשאלה 6.

$$\text{רדיוסים במעגל} \quad OD = OF \quad \text{ב. (1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות} \quad \angle ODF = \angle OFD$$

$$\Downarrow$$

$$\angle ODF = \frac{180^\circ - \angle FOD}{2} = \alpha - 45^\circ$$

$$\text{זווית היקפית הנשענת על קוטר} \quad \angle AED = 90^\circ \quad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{I. } DE = AD \cos \alpha = 2R \cos \alpha \quad \text{במשולש ADE מתקיים:}$$

$$\angle FDC = \angle ODC - \angle ODF = \alpha - (\alpha - 45^\circ) = 45^\circ$$

לפי משפט הסינוסים

$$\frac{DC}{\sin(180^\circ - (45^\circ + \alpha))} = \frac{DF}{\sin \alpha}$$

במשולש DFC:

$$\Downarrow$$

$$\text{II. } DC = \frac{DF \sin(45^\circ + \alpha)}{\sin \alpha}$$

במשולש שווה-שוקיים DOF

$$\frac{1}{2} \frac{DF}{R} = \cos(\alpha - 45^\circ)$$

מתקיים:

$$\Downarrow$$

$$\text{III. } DF = 2R \cos(\alpha - 45^\circ)$$

מהצבת III ב-II

$$\text{IV. } DC = \frac{2R \cos(\alpha - 45^\circ) \sin(45^\circ + \alpha)}{\sin \alpha}$$

מקבלים:

$$\frac{DE}{DC} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos(\alpha - 45^\circ) \sin(45^\circ + \alpha)}$$

מ-I ו-IV מקבלים:

שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \cos \frac{x}{2}$ בתחום $2\pi \leq x \leq 5\pi$.

א. (1) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה) בתחום הנתון.

(2) הראה כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חיובית בתחום הנתון.

(3) רק על פי התשובות לתת-סעיפים (1) ו-(2), סרטט סקיצה של

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

(4) כמה פתרונות יש למשוואה $f'(x) = 40$ בתחום הנתון? נמק.

ב. (1) רשום את הערך המקסימלי של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון.

(2) האם השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$

ועל ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון, שווה לערך של

האינטגרל המסוים $\int_{2\pi}^{5\pi} (f'(x) - f''(x)) dx$? נמק.

תשובה לשאלה 7

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \quad \text{א. (1) דרך I}$$

$\Downarrow$

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$$

$\Downarrow$

$$f''(x) \neq 0 \quad \text{כי } \cos \frac{x}{2} \neq -8$$

$\Downarrow$

אין נקודות קיצון פנימיות ל- $f'(x)$

$$f''(4\pi) = 1\frac{3}{4} > 0 \quad \text{נציב למשל } x = 4\pi \text{ ונקבל:}$$

$\Downarrow$

$$f''(x) > 0 \text{ לכל } x \text{ בתחום הנתון}$$

$\Downarrow$

$$f'(x) \text{ עולה לכל } x \text{ בתחום הנתון}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} \quad \text{דרך II}$$

$\Downarrow$

$$\text{מאחר ש- } -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{נקבל: } f''(x) > 0 \text{ לכל } x \text{ בתחום הנתון}$$

המשך תשובה לשאלה 7.

(2) $f'(x)$ עולה לכל x בתחום הנתון

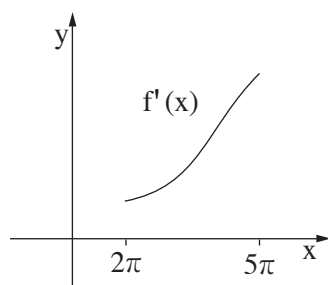
$\Downarrow$

הערך המינימלי של $f'(x)$: $f'(2\pi) = 4\pi + \frac{1}{2} \sin \pi = 4\pi$

$\Downarrow$

$f'(x) > 0$ לכל x בתחום הנתון

(3) לפי תת-סעיפים א(1) ו-א(2) $f'(x)$ חיובית ועולה (לא נדרש לבדוק נקודות פיתול):



(4) $f'(x)$ עולה לכל x בתחום הנתון

$\Downarrow$

הערך המקסימלי של $f'(x)$: $f'(5\pi) = 10\pi + \frac{1}{2} \sin 2.5\pi = 31.9$

$\Downarrow$

הישר $y = 40$ אינו חותך את $f'(x)$

$\Downarrow$

אין פתרון למשוואה $f'(x) = 40$

המשך תשובה לשאלה 7.

ב. (1) מצאנו: $f'(x) = 2 + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$

הערך המקסימלי של $\cos \frac{x}{2}$ הוא 1, לכן הערך המקסימלי של $f'(x)$ הוא: $2\frac{1}{4}$

(2) מצאנו בתת-סעיף א(2) כי בתחום הנתון הערך המינימלי של $f'(x)$ הוא: 4π

בתחום הנתון הערך המקסימלי של $f'(x)$ קטן מהערך המינימלי של $f'(x)$ לכן בתחום הנתון: $f'(x) > f''(x)$

⇓

הגרף של $f'(x)$ מעל לגרף של $f''(x)$

⇓

השטח שווה לערך של האינטגרל

שאלה 8

- נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x , ונתונה הפונקציה $g(x)$.
- נתון: $g(x) = k + 2x$, $\int_0^1 g(x) dx = 0$. k הוא פרמטר.
- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.
- ב. נתון גם כי בתחום $x \geq 0$ מתקיים: $f(x) \geq g(x)$, $f'(x) > 0$, $f(0) = k$. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של הפונקציה $g(x)$ וסקיצה של הפונקציה $f(x)$ בתחום $x \geq 0$. נמק.
- ג. בתחום $x \geq 0$ איזה שטח גדול יותר: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ והצירים או השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = 1$? נמק.
- ד. נתון גם: $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + f(0)$, a הוא פרמטר, הגרף של $g(x)$ משיק לגרף של $f(x)$ בנקודה הנמצאת בתחום $x \geq 0$. מצא את הפונקציה $f(x)$.

תשובה לשאלה 8

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (k + 2x) dx = [k \cdot x + x^2]_0^1 = k \cdot 1 + 1$$

$\Downarrow$

$$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$$

$\Downarrow$

$$g(x) = -1 + 2x$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow g(0) = -1$$

נקודות חיתוך

$$(0, -1), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

עם הצירים:

המשך תשובה לשאלה 8.

ב. נתון בתחום $x \geq 0$: $f'(x) > 0$, $g(x)$ היא קו ישר

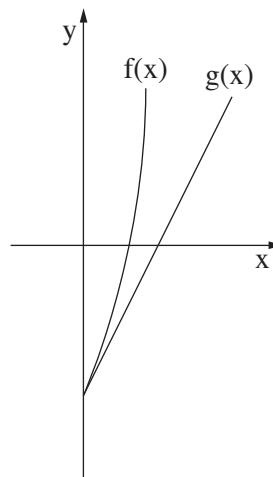
$\Downarrow$

$f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$

נתון גם: $f(0) = g(0) = -1$, ומצאנו $f(x) \geq g(x)$

לכן: הגרף של $f(x)$ ממש מעל לגרף של $g(x)$ לכל x שונה מ-0

מכאן בתחום $x \geq 0$:



ג. I. שטח המשולש, הנוצר על ידי הישרים $g(x)$ ו- $x = 1$

ועל ידי ציר ה- x , שווה לשטח המשולש הנוצר על ידי הישר $g(x)$ והצירים (ראה ציור).

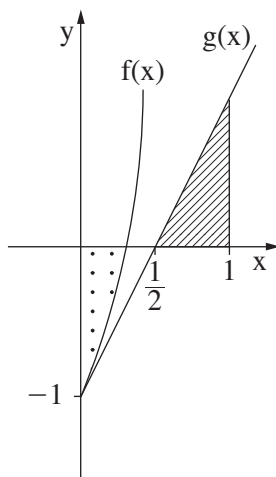
II. השטח המנוקד בציור קטן משטח המשולש הנוצר על ידי

$g(x)$ והצירים, כי $f(x)$ מעל $g(x)$ מלבד ב- $x = 0$.

לכן על פי I ו-II בתחום $x \geq 0$:

השטח המוגבל על ידי $f(x)$ והצירים (השטח המנוקד) קטן

משטח המוגבל על ידי $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי $x = 1$ (השטח המקווקו בציור).



המשך תשובה לשאלה 8.

ד. מגזירת $f(x)$ נקבל: III. $f'(x) = 3x^2 + 6x + a$

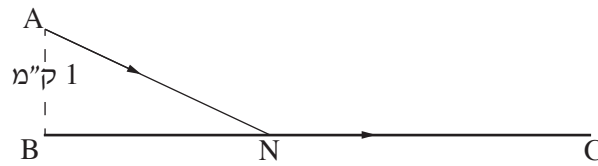
IV. $f'(0) = 2$ $g(x)$ משיק ל- $f(x)$ ב- $x = 0$, לכן:

מ- III ו- IV מקבלים: $a = 2$

לכן מקבלים: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

/המשך בעמוד 19/

שאלה 9



דני יצא מנקודה A, הנמצאת בשדה

במרחק 1 ק"מ מהכביש BC.

הוא הלך בשדה בקו אלכסוני

במהירות קבועה v ,

והגיע לכביש BC בנקודה כלשהי N (ראה ציור).

דני הלך בכביש במהירות הגדולה פי $\frac{13}{12}$ מהמהירות שבה הלך בשדה, והגיע

לנקודה C בכביש.

המרחק בין B ל-C הוא 6 ק"מ.

מהו אורך המסלול ANC אם ידוע שדני עבר אותו בזמן המינימלי?

תשובה לשאלה 9

$$BN = x$$

א. נסמן למשל:

$\Downarrow$

$$AN = \sqrt{1+x^2}, \quad NC = 6-x$$

$\Downarrow$

$$t(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{v} + \frac{6-x}{\frac{13}{12} \cdot v}$$

הזמן שדני עובר את המסלול ANC:

$\Downarrow$

$$t'(x) = \frac{1}{v} \left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{12}{13} \right)$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow 13x = 12\sqrt{1+x^2}$$

$\Downarrow$

$$13^2 x^2 = 12^2 (1+x^2)$$

$\Downarrow$

$$(x > 0) \quad x = \frac{12}{5} = 2.4$$

$$t'(1) = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{12}{13} \right) < 0$$

בדיקת מינימום:

$$t'(3) = \frac{1}{v} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{12}{13} \right) > 0$$

$$AN + NC = \sqrt{1+x^2} + 6-x$$

אורך המסלול ANC המינימלי:

$\Downarrow$

$$AN + NC = \sqrt{1+2.4^2} + 6 - 2.4 = 6.2 \text{ ק"מ}$$