

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

4 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — סדרות, טריגונומטריה במרחב — $33\frac{1}{3} \times 1$ — נקודות $33\frac{1}{3}$

פרק שני — גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פונקציות טריגונומטריות,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

ופונקציות חזקה — $33\frac{1}{3} \times 2$ — נקודות $66\frac{2}{3}$

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החשובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

- ראובן משחק עם חבריו בגולות. כל משתתף מכניס בתורו גולות למשחק. הזוכה בתור שלו, מקבל מספר גולות הגדול פי 6 ממספר הגולות שהכניס באותו תור למשחק. המפסיד בתור שלו, מפסיד את כל הגולות שהכניס באותו תור למשחק (ולא מקבל שום גולה). ראובן הכניס בתור הראשון שלו 3 גולות, והפסיד. הוא המשיך לשחק, ובכל תור הוא הכניס 2 גולות יותר משהכניס בתור הקודם שלו. ראובן שיחק בסך הכול n תורים. בכל תור הוא הפסיד, ורק בתור האחרון הוא זכה. א. הבע באמצעות n את מספר הגולות שראובן קיבל בתור האחרון. בתור האחרון קיבל ראובן מספר גולות הגדול ב-6 ממספר כל הגולות שהכניס למשחק ב- n התורים ששיחק. ב. (1) הבע באמצעות n את מספר כל הגולות שהכניס ראובן למשחק ב- n התורים ששיחק. (2) כמה תורים שיחק ראובן?

תשובה לשאלה 1

א. מספר הגולות שראובן מכניס בכל תור

$$a_1 = 3, \quad d = 2 \quad \text{מהווים סדרה חשבונית שבה:}$$

$\Downarrow$

$$a_n = 3 + 2(n - 1) = 2n + 1 \quad \text{מספר הגולות שראובן הכניס בתור האחרון:}$$

$$6 \cdot a_n = 6(2n + 1) \quad \text{מספר הגולות שראובן קיבל בתור האחרון:}$$

ב. (1) מספר כל הגולות שראובן הכניס למשחק

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \cdot 3 + 2(n - 1)) \quad \text{הוא הסכום של הסדרה החשבונית:}$$

$\Downarrow$

$$S_n = n^2 + 2n$$

(2) בתור האחרון קיבל ראובן מספר גולות

$$S_n + 6 = 6 \cdot a_n \quad \text{הגדול ב-6 ממספר כל הגולות שהכניס למשחק:}$$

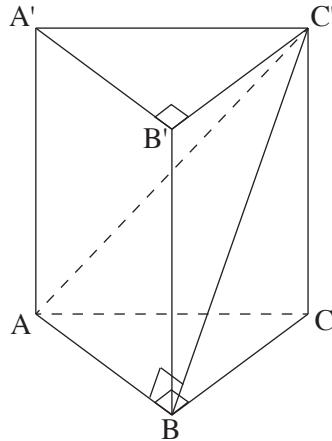
$\Downarrow$

$$n^2 + 2n + 6 = 6(2n + 1)$$

$\Downarrow$

$$n \neq 0, \quad n = 10 \quad \text{מספר התורים ששיחק ראובן:}$$

שאלה 2



הבסיס של מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$

הוא משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים (ראה ציור).

נתון: $\angle ABC' = 90^\circ$, $AB = BC = a$ ס"מ

הזווית בין האלכסון AC' לפאה $BCC'B'$ היא α .

א. הבע באמצעות a ו- α את נפח המנסרה.

נתון גם כי גובה המנסרה הוא $2a$.

ב. מצא את α .

ג. מצא את גודל הזווית שבין האלכסון AC' לבסיס ABC .

תשובה לשאלה 2

$$\angle AC'B = \alpha$$

א. הזווית בין האלכסון AC' לפאה $BCC'B'$ היא:

$$\tan \alpha = \frac{a}{BC'}$$

במשולש ישר-הזווית ABC' מתקיים:

$\Downarrow$

$$BC' = \frac{a}{\tan \alpha}$$

$$CC' = \sqrt{(BC')^2 - a^2}$$

במשולש ישר-הזווית BCC' מתקיים:

$\Downarrow$

$$CC' = \sqrt{\frac{a^2}{\tan^2 \alpha} - a^2} = \frac{a\sqrt{1 - \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$$

$$V = CC' \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$$

נפח המנסרה הוא:

$\Downarrow$

$$V = \frac{a\sqrt{1 - \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a$$

$\Downarrow$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}}{2 \tan \alpha}$$

המשך תשובה לשאלה 2.

ב. מצאנו כי גובה המנסרה הוא:

$$CC' = \frac{a\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$\Downarrow$

$$2a = \frac{a\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$\Downarrow$

$$4\operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$\Downarrow$

$$\operatorname{tg} \alpha \neq -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\Downarrow$

$$\alpha = 24.09^\circ$$

נתון כי $CC' = 2a$, לכן:

ג. הזווית בין האלכסון AC' לבסיס ABC היא: $\sphericalangle C'AC$

על פי הנתון: $CC' = 2a$

על פי הנתונים של משולש ABC , מקבלים: $AC = \sqrt{2} a$

במשולש ישר-הזווית $C'AC$ מתקיים: $\operatorname{tg} (\sphericalangle C'AC) = \frac{CC'}{AC}$

$\Downarrow$

$$\operatorname{tg} (\sphericalangle C'AC) = \frac{2a}{\sqrt{2} a}$$

$\Downarrow$

$$\sphericalangle C'AC = 54.7^\circ$$

שאלה 3

נתונה הפונקציה $f(x) = a - b \sin(2x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

a ו- b הם פרמטרים חיוביים.

א. אחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x היא הנקודה שבה $x = \frac{\pi}{12}$.

הבע את b באמצעות a.

הצב בפונקציה $b = 2a$, וענה על הסעיפים ב-ד שלפניך.

ב. בתחום הנתון הבע באמצעות a, במידת הצורך:

(1) את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0.5a$ בתחום הנתון? נמק.

תשובה לשאלה 3

א. לפי הנתון נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x היא: $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$

↓

מהצבה של $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ נקבל: $0 = a - b \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)$

↓

$$b = 2a$$

ב. (1) $f(x) = a - 2a \sin(2x)$

$$(a > 0) \quad f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin 2x = \frac{1}{2}$$

↓

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

↓

$$x = \frac{5\pi}{12}, \quad x = \frac{\pi}{12}$$

↓

נקודות החיתוך עם ציר ה- x: $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right), \left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = a$$

נקודת החיתוך עם ציר ה- y: $(0, a)$

המשך תשובה לשאלה 3

ב. (2) $f'(x) = -4a \cos 2x$

$(a > 0) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$

$\Downarrow$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\Downarrow$

$x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$

הנקודות ה"חשודות" כקיצון

בתחום $0 \leq x \leq \pi$:

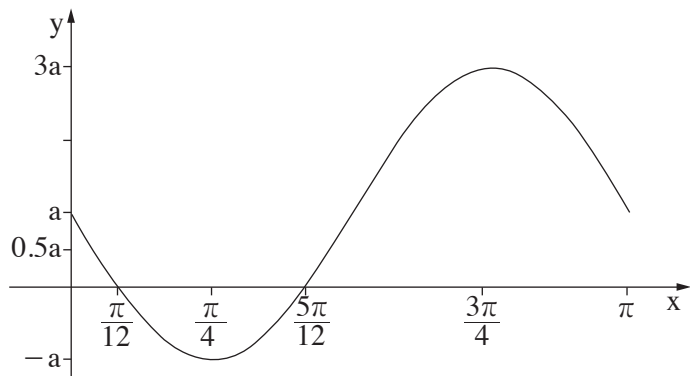
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	a	-a	3a	a

ערכי $f(x)$ בנקודות ה"חשודות" ובקצות התחום:

$a > 0$, לכן לפי הטבלה מקסימום מוחלט: $\left(\frac{3\pi}{4}, 3a\right)$

מינימום מוחלט: $\left(\frac{\pi}{4}, -a\right)$

ג.



ד. לפי הגרף שבסעיף ג: הישר $y = 0.5a$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות

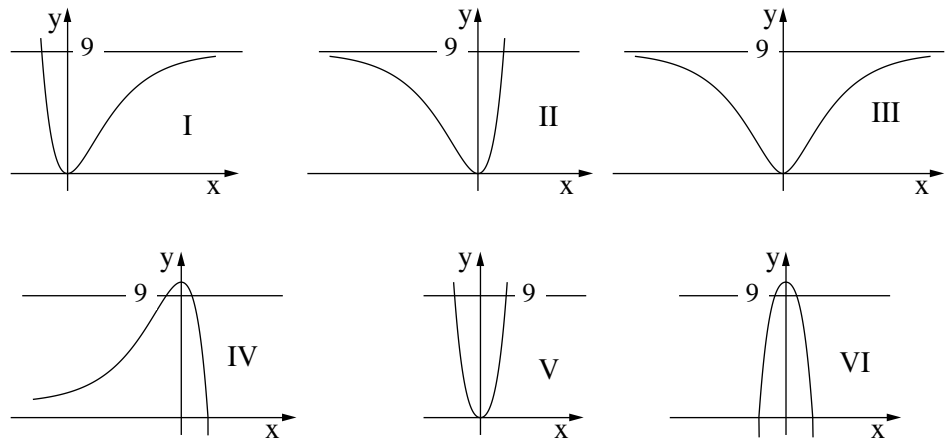
$\Downarrow$

יש 2 פתרונות למשוואה $f(x) = 0.5a$

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = (3e^x - 3)^2$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 (3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
 ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישר $y = 9$ (אם יש כאלה).
 ג. מבין הגרפים VI-I שלפניך, איזה גרף מציג סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.



תשובה לשאלה 4

- א. (1) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3e^x - 3 = 0 \quad (2)$$

$\Downarrow$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

נקודת החיתוך של $f(x)$ עם הצירים: $(0, 0)$

המשך תשובה לשאלה 4.

$$f'(x) = 2(3e^x - 3) \cdot 3e^x \quad \text{א. (3)}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = 18e^{2x} - 18e^x = 18e^x(e^x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(e^x - 1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$e^x - 1 = 0 \quad e^x \neq 0 \text{ לכל } x, \text{ לכן:}$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0$$

$$f''(x) = 18 \cdot 2e^{2x} - 18e^x$$

$$\Downarrow$$

$$f''(0) > 0$$

$$\Downarrow$$

מינימום ב- $(0, 0)$

ב. נקודות החיתוך

$$9 = (3e^x - 3)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$e^x(e^x - 2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(e^x \neq 0) \quad e^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \ln 2$$

בין $f(x)$ ל- $y = 9$ מקיימות:

השיעורים של נקודת החיתוך

$$(\ln 2, 9)$$

בין הגרף של $f(x)$ לישר $y = 9$:

ג. הגרף של $f(x)$ הוא גרף II, כי:

— ל- $f(x)$ יש מינימום ב- $(0, 0)$.

— הישר $y = 9$ חותך את $f(x)$ בנקודה אחת ברביע הראשון.

שאלה 5

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-2}{2x-3}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $x = 1$.

תשובה לשאלה 5

א. צריך להתקיים: $2x - 3 \neq 0$

$\Downarrow$

$x \neq \frac{3}{2}$ תחום ההגדרה:

ב. $f'(x) = \frac{4}{(2x-3)^2}$

$\Downarrow$

$f'(x) > 0$ לכל x שונה מ- $\frac{3}{2}$

$\Downarrow$

$f(x)$ עולה עבור $x > \frac{3}{2}$ ועבור $x < \frac{3}{2}$

ג. אסימפטוטות: $y = 0$, $x = \frac{3}{2}$

המשך תשובה לשאלה 5.

ד. $f(x) \neq 0$ כי המונה של $f(x)$ שונה מ-0

$\Downarrow$

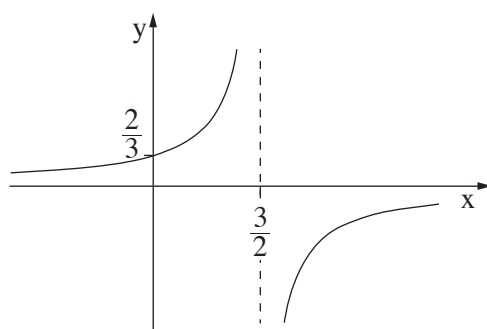
אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2}{3}$$

נקודת החיתוך

של $f(x)$ עם ציר ה- y : $(0, \frac{2}{3})$

ה.



$$S = \int_0^1 \frac{-2}{2x-3} dx = \left[-\ln|2x-3| \right]_0^1$$

$\Downarrow$

$$S = -\ln|-1| + \ln|-3| = \ln 3$$

ו. השטח המבוקש:

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך