

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

4 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית,

הסתברות

נקודות	$33\frac{1}{3}$	–	$16\frac{2}{3} \times 2$	–
--------	-----------------	---	--------------------------	---

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה

במישור

נקודות	$33\frac{1}{3}$	–	$16\frac{2}{3} \times 2$	–
--------	-----------------	---	--------------------------	---

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

נקודות	$33\frac{1}{3}$	–	$16\frac{2}{3} \times 2$	–
נקודות	100	–	סה"כ	

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשיגים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

- ראובן רוצה לרכוש מינוי למכון כושר. המחיר המלא של המינוי הוא 200 שקלים.
אם ראובן יביא שני חברים שירכשו מינוי במחיר מלא, הוא יקבל על המינוי שלו הנחה של $x\%$
עבור החבר הראשון, ועבור החבר השני יקבל הנחה של $x\%$ על המחיר שאחרי ההנחה הראשונה.
ראובן הביא שני חברים, ושילם עבור המינוי שלו רק 144.5 שקלים.
א. מצא את אחוז ההנחה שקיבל ראובן על המינוי שלו עבור החבר הראשון.
ב. מצא את אחוז ההנחה הכולל שקיבל ראובן על המינוי שלו לאחר שהביא את שני החברים.

תשובה לשאלה 1

א. אחרי הנחה של $x\%$ המחיר של המינוי קטן פי: $1 - \frac{x}{100}$

$\Downarrow$

אחרי עוד הנחה של $x\%$ המחיר של המינוי קטן פי: $\left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$

אחרי שתי ההנחות המחיר של המינוי מקיים: $200 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 144.5$

$\Downarrow$

$$x^2 - 200x + 2775 = 0$$

$\Downarrow$

$$x = 185\% , \quad x = 15\%$$

מאחר שאחוז ההנחה לא יכול להיות 185% ,

לכן אחוז ההנחה עבור החבר הראשון הוא: 15%

ב. דרך I

המחיר של המינוי קטן פי: $\left(1 - \frac{15}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 0.2775$

$\Downarrow$

לכן אחוז ההנחה הכולל הוא: 27.75%

דרך II

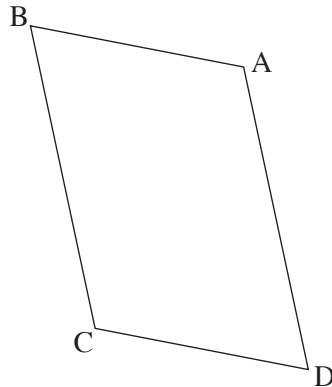
200 שקלים הם: 100%

144.5 שקלים הם: $\frac{100\% \cdot 144.5}{200} = 72.25\%$

$\Downarrow$

אחוז ההנחה הכולל: $100\% - 72.25\% = 27.75\%$

שאלה 2



נתונה מקבילית ABCD (ראה ציור).

הצלע AB מונחת על הישר $y = -\frac{1}{3}x + 6$.

הצלע AD מונחת על הישר $y = -5x + 20$.

אלכסוני המקבילית נפגשים בנקודה $(2, 3)$.

א. מצא את השיעורים של קדקוד C.

ב. מצא את השיעורים של קדקוד B.

ואת השיעורים של קדקוד D.

ג. האם הצלע BC משיקה בנקודה C למעגל שמרכזו A והרדיוס שלו הוא AC? נמק.

תשובה לשאלה 2

א. הקדקוד A הוא מפגש הישרים AB ו-AD,

לכן שיעור ה- x של A מקיים:

$$-\frac{1}{3}x + 6 = -5x + 20$$

$\Downarrow$

$$x = 3$$

מהצבת $x = 3$ במשוואה של AB או של AD מקבלים:

$$y = 5$$

$$A(3, 5)$$

שיעורי הקדקוד A הם:

אלכסונים במקבילית חוצים זה את זה,

$$(2, 3)$$

לכן שיעורי אמצע האלכסון AC הם:

$$\frac{x+3}{2} = 2, \quad \frac{y+5}{2} = 3$$

$\Downarrow$

$$C(1, 1)$$

שיעורי הקדקוד C מקיימים:

שיעורי הקדקוד C הם:

המשך תשובה לשאלה 2.

ב.

צלעות נגדיות במקבילית

$$AD \parallel BC$$

$$\Downarrow$$

$$-5$$

שיפוע BC הוא:

משוואת הישר BC

$$y - 1 = -5(x - 1)$$

על פי השיפוע והנקודה $C(1, 1)$ היא:

$$\Downarrow$$

$$BC: y = -5x + 6$$

הקדקוד B הוא מפגש הישרים BC ו-AB,

$$-5x + 6 = -\frac{1}{3}x + 6$$

לכן שיעור ה- x של B מקיים:

$$\Downarrow$$

$$x = 0$$

$$y = 6$$

מהצבת $x = 0$ במשוואה של BC או של AB מקבלים:

$$B(0, 6)$$

שיעורי הקדקוד B הם:

מאחר ששיעורי אמצע האלכסון BD הם $(2, 3)$,

$$\frac{x+0}{2} = 2, \quad \frac{y+6}{2} = 3$$

השיעורים של הקדקוד D מקיימים:

$$\Downarrow$$

$$D(4, 0)$$

השיעורים של הקדקוד D:

ג. כדי שהצלע BC תשיק למעגל שרדיוסו AC

$$BC \perp AC$$

צריך להתקיים:

$$\frac{5-1}{3-1} = 2$$

השיפוע של AC על פי הנקודות $A(3, 5)$ ו- $C(1, 1)$:

$$-5$$

השיפוע של BC לפי סעיף ב:

$$-5 \cdot 2 \neq -1$$

מכפלת השיפועים היא:

$$\Downarrow$$

הצלע BC לא משיקה למעגל

שאלה 3

ידוע שההסתברות להצליח במבחן נהיגה (טסט) גדולה ב- 0.2 מההסתברות להיכשל בו.

א. מהי ההסתברות להצליח במבחן הנהיגה?

ב. ראובן, שמעון, לוי ויהודה הם 4 אנשים שנבחרו באקראי מבין הנבחים במבחן הנהיגה.

(1) מהי ההסתברות שבדיוק 2 מהם יצליחו במבחן הנהיגה?

(2) ידוע שרק 2 מהם הצליחו במבחן הנהיגה.

מהי ההסתברות שהיו אלה ראובן ושמעון?

(3) האם ההסתברות שלפחות אחד מהארבעה יצליח במבחן הנהיגה גדולה מההסתברות

שלפחות אחד מהארבעה ייכשל במבחן הנהיגה? נמק.

תשובה לשאלה 3

א. נסמן: $P(A)$ — ההסתברות להצליח במבחן הנהיגה

$$P(A) = P(\bar{A}) + 0.2 \quad \text{על פי הנתון:}$$

$\Downarrow$

$$P(A) = 1 - P(A) + 0.2$$

$\Downarrow$

$$P(A) = 0.6$$

$$P_4(2) = \binom{4}{2} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^2 \quad \text{ב. (1) מהצבת } P(A) = 0.6 \text{ בנוסחת ברנולי נקבל:}$$

$\Downarrow$

$$P_4(2) = 0.3456$$

(2) ההסתברות שבדיוק ראובן ושמעון הצליחו

$$0.6 \times 0.6 \times 0.4 \times 0.4 \quad \text{מבין הארבעה היא:}$$

לכן אם ידוע שרק 2 הצליחו

$$P\left(\frac{\text{ראובן ושמעון הצליחו}}{2 \text{ הצליחו}}\right) = \frac{0.6 \times 0.6 \times 0.4 \times 0.4}{0.3456} = \frac{1}{6} \quad \text{אז ההסתברות שהיו אלה ראובן ושמעון היא:}$$

(3) ההסתברות שלפחות אחד מהארבעה יצליח כוללת את

כל האפשרויות מלבד האפשרות שכולם נכשלו, לכן:

$$P\left(\begin{matrix} \text{לפחות} \\ \text{אחד יצליח} \end{matrix}\right) = 1 - 0.4^4$$

ההסתברות שלפחות אחד מהארבעה ייכשל כוללת את

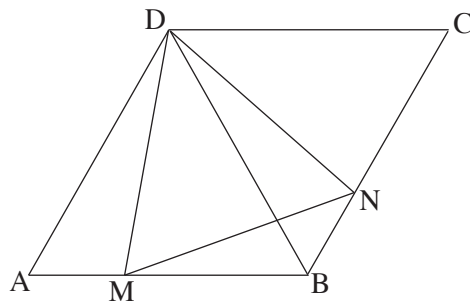
כל האפשרויות מלבד האפשרות שכולם הצליחו, לכן:

$$P\left(\begin{matrix} \text{לפחות} \\ \text{אחד ייכשל} \end{matrix}\right) = 1 - 0.6^4$$

$$1 - 0.4^4 > 1 - 0.6^4$$

$$P\left(\begin{matrix} \text{לפחות} \\ \text{אחד יצליח} \end{matrix}\right) > P\left(\begin{matrix} \text{לפחות} \\ \text{אחד ייכשל} \end{matrix}\right) \quad \text{מכאן:}$$

שאלה 4



במעוין ABCD הזווית החדה היא של 60° .

נקודה M נמצאת על הצלע AB

נקודה N נמצאת על הצלע BC

כך ש- $AM = BN$ (ראה ציור).

א. הוכח כי $\triangle MDB \cong \triangle NDC$.

ב. הוכח כי $\triangle ADM \cong \triangle BDN$.

ג. שטח המרובע DMBN הוא S.

הבע באמצעות S את שטח המעוין ABCD.

תשובה לשאלה 4

א. לפי הנתון: $AD = AB$, $\angle DAB = 60^\circ$

$\Downarrow$

$\triangle ADB$ הוא שווה-צלעות כל זוויותיו בנות 60°

$\Downarrow$

$AD = DB$

$\Downarrow$

במעוין כל הצלעות שוות זו לזו $DB = DC$

$\angle DCN = \angle DBM = 60^\circ$ $\triangle ADB$ הוא שווה-צלעות

כי $AM = BN$ וכל הצלעות במעוין שוות זו לזו $MB = CN$

לכן: $\triangle MDB \cong \triangle NDC$ על פי צ.ז.צ.

ב. מצאנו: $AD = DB$

לפי הנתון: $AM = BN$

$\angle DBN = 60^\circ$ $\triangle CDB$ הוא שווה-צלעות

$\Downarrow$

$\angle DAM = \angle DBN$

לכן: $\triangle ADM \cong \triangle BDN$ על פי צ.ז.צ.

המשך תשובה לשאלה 4.

ג. המשולשים חופפים I. $S_{\Delta MDB} = S_{\Delta NDC}$, $S_{\Delta ADM} = S_{\Delta BDN}$

המרובע DMBN מורכב

מהמשולשים MDB ו- BDN, לכן: II. $S = S_{\Delta MDB} + S_{\Delta BDN}$

לפי I ו- II מקבלים: $S = S_{\Delta NDC} + S_{\Delta ADM}$

$$S_{\text{מעוין}} = S_{\Delta MDB} + S_{\Delta BDN} + S_{\Delta NDC} + S_{\Delta ADM}$$

↓

$$S_{\text{מעוין}} = 2 \cdot S$$

/המשך בעמוד 8/

המשך תשובה לשאלה 5.

ב. $\angle FAC = \angle EFC$ זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה

$\angle FEA$ משותפת

מכאן: $\triangle ECF \sim \triangle EFA$ על פי ז.ז.

ג. מהדמיון שבסעיף ב מקבלים
כי יחסי הצלעות מקיימים:

$$\frac{EF}{CE} = \frac{AE}{EF}$$

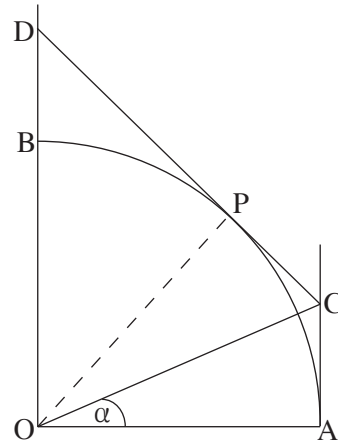
$\Downarrow$

$$AE \cdot CE = EF^2$$

בסעיף א הוכחנו: $AE \cdot CE = DE^2$

לכן: $EF = DE$

שאלה 6



- נתון רבע מעגל OAB שרדיוסו R .
 העבירו ישר המשיק לרבע המעגל בנקודה P ,
 והעבירו ישר המשיק לרבע המעגל בנקודה A .
 המשיקים נפגשים בנקודה C .
 המשיק בנקודה P חותך את המשך OB בנקודה D
 (ראה ציור).
 נתון: $\angle COA = \alpha$.
 א. הוכח כי $AC \parallel OD$.
 ב. הבע באמצעות R ו- α את שטח המרובע ACDO .
 ג. נתון כי שטח המשולש OPD הוא $\frac{R^2}{2}$.
 חשב את α .

תשובה לשאלה 6

- א. $\angle DOA = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ OAB הוא רבע מעגל לפי הנתון
 משיק למעגל מאונך לרדיוס $\angle CAO = 90^\circ$
 $\angle DOA + \angle CAO = 180^\circ$ מכאן:
 $\Downarrow$
 $AC \parallel OD$ אם סכום זוויות חד-צדדיות הוא 180°
 אז הישרים מקבילים

המשך תשובה לשאלה 6.

ב.

$$\begin{aligned} \angle OCA &= 90^\circ - \alpha \\ \downarrow \\ \angle OCP &= 90^\circ - \alpha \end{aligned}$$

סכום זוויות במשולש הוא 180°
קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה
שממנה יוצאים שני משיקים למעגל,
חוצה את הזווית שבין המשיקים.

$$\angle OPC = 90^\circ$$

משיק למעגל מאונך לרדיוס

$$\angle POC = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$$

מכאן:

$$\begin{aligned} \downarrow \\ \angle DOP &= 90^\circ - 2\alpha \end{aligned}$$

$$\cos(90^\circ - 2\alpha) = \frac{OP}{OD} \quad \text{לכן במשולש ישר-הזווית OPD מתקיים:}$$

$$\begin{aligned} \downarrow \\ \sin 2\alpha &= \frac{R}{OD} \Rightarrow OD = \frac{R}{\sin 2\alpha} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{OA} \quad \text{במשולש ישר הזווית OAC מתקיים:}$$

$$\begin{aligned} \downarrow \\ AC &= R \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

המربع ACDO הוא

$$S_{\text{טרפז}} = \frac{OA}{2} (OD + AC) \quad \text{טרפז ששטחו הוא:}$$

$$S_{\text{טרפז}} = \frac{R}{2} \left(\frac{R}{\sin 2\alpha} + R \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right)$$

$$S_{\triangle OPD} = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot OP \sin \angle DOP \quad \text{ג. שטח המשולש OPD :}$$

$$\downarrow$$

$$S_{\triangle OPD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sin 2\alpha} \cdot R \cdot \sin(90^\circ - 2\alpha)$$

$$\downarrow$$

$$S_{\triangle OPD} = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

$$\text{מאחר שנתון כי } S_{\triangle OPD} = \frac{R^2}{2}, \text{ נקבל:}$$

$$\downarrow$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 1$$

$$\downarrow$$

$$2\alpha = 45^\circ$$

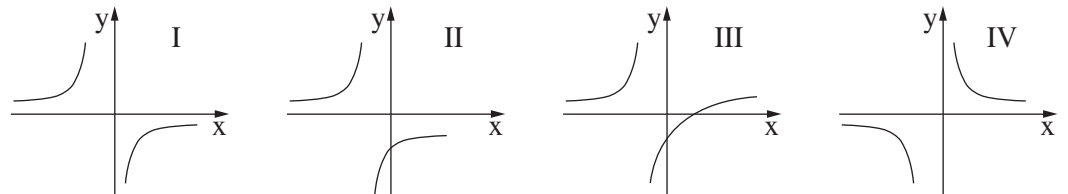
$$\downarrow$$

$$\alpha = 22.5^\circ$$

שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{9}{(x+1)^2} - 1$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- איזה מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניך מציג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמק.



תשובה לשאלה 7

- הפונקציה מוגדרת רק אם המכנה שונה מ-0, לכן:
 $x + 1 \neq 0$
 $\Downarrow$
 $x \neq -1$
 תחום ההגדרה:

- $$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2} - 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = -4, \quad x = 2$$

נקודות החיתוך עם ציר ה- x : $(-4, 0)$, $(2, 0)$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 8$$

$\Downarrow$

$(0, 8)$

נקודת החיתוך עם ציר ה- y :

$$y = -1, \quad x = -1$$

ג. אסימפטוטות מקבילות לצירים:

המשך תשובה לשאלה 7.

ד.

$$f(x) = \frac{9}{(x+1)^2} - 1$$

$\Downarrow$

$$f'(x) = -\frac{18}{(x+1)^3}$$

$\Downarrow$

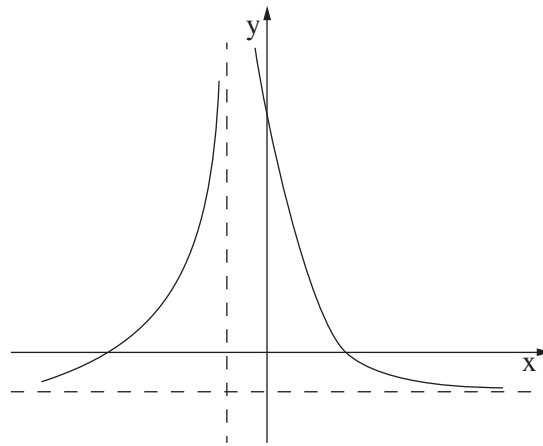
$$f'(x) > 0 \quad \text{עבור } x < -1, \quad f'(x) < 0 \quad \text{עבור } x > -1$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$f(x) \text{ עולה עבור } x < -1, \quad f(x) \text{ יורדת עבור } x > -1$$

ה.



ו. מצאנו בסעיף ד: $f'(x) < 0$ עבור $x > -1$

$$f'(x) > 0 \quad \text{עבור } x < -1$$

$\Downarrow$

גרף IV וגרף III אינם מתאימים

נבדוק אם הגרף של $f'(x)$

$$x = 0 \Rightarrow f'(x) = -18 \quad \text{חותך את ציר ה-} y$$

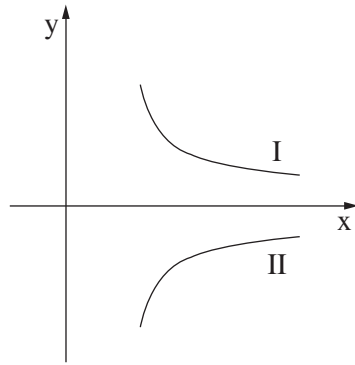
$\Downarrow$

הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה- y

$\Downarrow$

הגרף המתאים הוא II

שאלה 8



הגרפים I ו-II שבציור הם של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-3}}$$

$$g(x) = -\frac{2}{\sqrt{2x-3}}$$

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של כל אחת

מהפונקציות.

(2) מהי האסימפטוטה האנכית של כל אחת

מהפונקציות?

ב. איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$, ואיזה גרף הוא של הפונקציה $g(x)$? נמק.

ג. הישר $y = 2$ חותך את הגרף I בנקודה A.

הישר $y = -2$ חותך את הגרף II בנקודה B.

מצא את השטח המוגבל על ידי הישר AB, על ידי הגרפים של שתי הפונקציות

ועל ידי הישר $x = 3$.

תשובה לשאלה 8

א. (1) צריך להתקיים: $2x - 3 > 0$

$\Downarrow$

תחום ההגדרה של כל אחת

$$x > \frac{3}{2}$$

מהפונקציות:

(2) האסימפטוטה האנכית של

$$x = \frac{3}{2}$$

כל אחת מהפונקציות:

ב. I: $f(x)$, כי $f(x) > 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

II: $g(x)$, כי $g(x) < 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

המשך תשובה לשאלה 8.

ג. נקודת החיתוך של הישר $y = 2$

עם הגרף של $f(x)$ מקיימת:

$$2 = \frac{2}{\sqrt{2x-3}}$$

$\Downarrow$

$$x = 2$$

שיעור ה- x של הנקודה A:

נקודת החיתוך של הישר $y = -2$

עם הגרף של $g(x)$ מקיימת:

$$-2 = -\frac{2}{\sqrt{2x-3}}$$

$\Downarrow$

$$x = 2$$

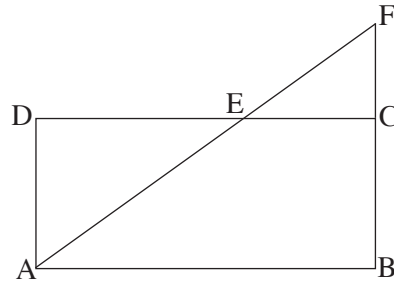
שיעור ה- x של הנקודה B:

$$S = \int_2^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_2^3 \frac{4}{\sqrt{2x-3}} dx \quad \text{השטח המבוקש הוא:}$$

$\Downarrow$

$$S = [4 \cdot \sqrt{2x-3}]_2^3 = 4\sqrt{3} - 4$$

שאלה 9



נתון מלבן ABCD שאורכי צלעותיו הם:

$$AB = 9, AD = 4$$

הנקודה E נמצאת על הצלע CD (בין C ל-D).

ההמשך של AE חותך את המשך הצלע BC

בנקודה F (ראה ציור).

א. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle FCE$.

ב. סמן $DE = x$, ומצא מה צריך להיות האורך של DE כדי שסכום השטחים

של המשולשים ADE ו-FCE יהיה מינימלי.

בתשובתך תוכל להשאיר שורש.

תשובה לשאלה 9

כי הן זוויות קדקודיות

$$\angle DEA = \angle FEC$$

א.

$$\angle ADE = \angle FCE = 90^\circ$$

על פי ז.ז.

$$\triangle ADE \sim \triangle FCE$$

מכאן;

המשך תשובה לשאלה 9.

ב. נתון:

$$AB = 9$$

$\Downarrow$

$$EC = 9 - x$$

$$\frac{AD}{x} = \frac{FC}{9 - x}$$

מהדמיון מקבלים:

$\Downarrow$

$$FC = \frac{AD \cdot (9 - x)}{x} = \frac{4(9 - x)}{x}$$

סכום שטחי

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE + \frac{1}{2} \cdot EC \cdot FC$$

המשולשים הוא:

$\Downarrow$

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (9 - x) \cdot \frac{4(9 - x)}{x} = 2x + \frac{2(9 - x)^2}{x}$$

$\Downarrow$

$$S(x) = \frac{4x^2 - 36x + 162}{x}$$

$\Downarrow$

$$S(x) = 4x - 36 + \frac{162}{x}, \quad x > 0$$

$\Downarrow$

$$S'(x) = 4 - \frac{162}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{2}} \Rightarrow DE = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$S''(x) = \frac{162}{x^3}$$

בדיקת מינימום:

$\Downarrow$

$$S''\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right) > 0$$