

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

3 יחידות לימוד — שאלון שלישי

הוראות לנבחן

א. משר הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שש שאלות בנושאים:

אלגברה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

עליך לענות על ארבע שאלות — $25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, ג כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

פועל מקבל בחודש שכר בסיסי קבוע, ועוד תוספות קבועות.
בסך הכול שכרו בחודש הוא 6600 שקל.
בחודש מסוים העלה בעל המפעל את השכר החודשי הבסיסי של הפועל ב-15%,
והוריד את התוספות הקבועות ב-10%.
לאחר השינויים היה בסך הכול שכרו של הפועל בחודש 7440 שקלים.
מצא מה היה השכר הבסיסי של הפועל לפני השינויים.

תשובה לשאלה 1

נסמן: x – שכר בסיסי, y – תוספות

I. $6600 = x + y$ בסך הכול השכר בחודש:

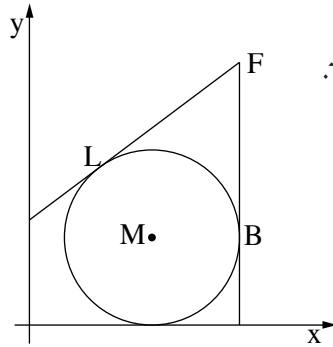
$x \cdot 1.15$ לאחר העלאה של 15% השכר הבסיסי הוא:

$y \cdot 0.9$ לאחר הורדה של 10% התוספות הן:

II. $7440 = x \cdot 1.15 + y \cdot 0.9$ בסך הכול השכר בחודש לאחר השינויים:

$x = 6000$ שקל מפתרון מערכת המשוואות I ו-II מקבלים:

שאלה 2



נתון מעגל שמשוואתו $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 25$ ומרכזו M.

העבירו ישר המשיק למעגל בנקודה L שבה $x = 4$, כמתואר בציור.

א. (1) מצא את השיפוע של ML.

(שיעור ה־y של L גדול מ־1.)

(2) מצא את המשוואה של המשיק בנקודה L.

הישר $x = 12$ משיק למעגל בנקודה B.

שני המשיקים נפגשים בנקודה F, כמתואר בציור.

ב. (1) מצא את השיעורים של הנקודה F.

(2) מצא את שטח המשולש FMB.

תשובה לשאלה 2

א. (1) מהצבת $x = 4$ במשוואת המעגל

נקבל את שיעור ה־y של L:

$$(4 - 7)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

⇓

$$y = 9, \quad y = 1$$

לפי הנתון שיעור ה־y של L גדול מ־1, לכן השיעורים של L: $L(4, 9)$

השיעורים של מרכז המעגל הם: $M(7, 5)$

על פי שתי הנקודות L ו־M שיפוע ML הוא:

$$\frac{9 - 5}{4 - 7} = -\frac{4}{3}$$

(2) המשיק בנקודה L מאונך לרדיוס ML,

לכן השיפוע של ML הוא:

$$\frac{3}{4}$$

על פי $L(4, 9)$ ושיפוע $\frac{3}{4}$ משוואת המשיק היא:

$$y - 9 = \frac{3}{4}(x - 4)$$

⇓

$$y = \frac{3}{4}x + 6$$

המשך תשובה לשאלה 2.

ב. (1) שיעור ה- x של F הוא:

$$x = 12$$

מהצבת שיעור ה- x של F במשוואת המשיק

$$y = \frac{3}{4} \cdot 12 + 6 = 15$$

נקבל את שיעור ה- y של F :

השיעורים של הנקודה F :

$$F(12, 15)$$

(2) הרדיוס MB מאונך למשיק FB ,

$$S_{\Delta FMB} = \frac{1}{2} \cdot MB \cdot FB$$

לכן שטח המשולש FMB הוא:

$$MB = \sqrt{25} = 5$$

MB הוא רדיוס, לכן:

MB מקביל לציר ה- x , לכן

שיעור ה- y של B שווה לשיעור ה- y של M ,

$$y = 5$$

ולכן שיעור ה- y של B הוא:

אורך הקטע FB הוא ההפרש בין שיעור ה- y

$$FB = 15 - 5 = 10$$

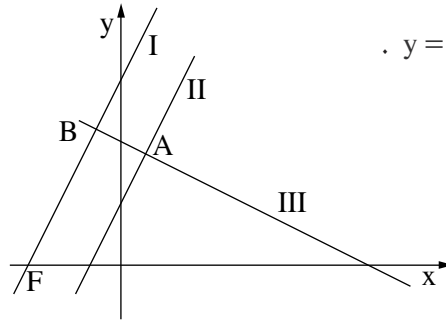
של F לשיעור ה- y של B :

$$S_{\Delta FMB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25$$

מכאן, שטח המשולש FMB הוא:

/המשך בעמוד 5/

שאלה 3



המשוואות של הישרים I ו-II שבציור הנ:

$$y = 2x + 30, \quad y = 2x + 10$$

א. איזו משוואה היא של הישר I,

ואיזו משוואה היא של הישר II? נמק.

ב. ישר III מאונך לישר II וחותר אותו

בנקודה A שבה $x = 4$.

מצא את משוואת הישר III.

ג. (1) הראה כי הישר III מאונך לישר I.

(2) הישר III חותר את הישר I בנקודה B.

הישר I חותר את ציר ה- x בנקודה F (ראה ציור).

מצא את השטח של המשולש FBA.

תשובה לשאלה 3

א. משוואת הישר I: $y = 2x + 30$, משוואת הישר II: $y = 2x + 10$

כי $2x + 30 > 2x + 10$, וישר I נמצא מעל ישר II.

ב. מהצבת $x = 4$ במשוואת הישר II

נקבל את שיעור ה- y של A:

$$y = 2 \cdot 4 + 10 = 18$$

הישרים II ו-III מאונכים זה לזה,

לכן המכפלה של שיפוע הישר II

ושיפוע m של הישר III היא:

$$-1 = 2 \cdot m$$

$\Downarrow$

$$m = -\frac{1}{2}$$

על פי שיפוע $-\frac{1}{2}$ ונקודה $A(4, 18)$

משוואת הישר III היא:

$$y - 18 = -\frac{1}{2}(x - 4)$$

$\Downarrow$

$$y = -\frac{1}{2}x + 20$$

המשך תשובה לשאלה 3.

ג. (1) שיפוע הישר I שווה לשיפוע הישר II (הישרים מקבילים זה לזה).

ישר III מאונך לישר II, לכן ישר III מאונך גם לישר I

(מכפלת השיפועים של ישר I ושל ישר III גם היא שווה ל-1).

(2) שטח המשולש FBA

שבו $\angle FBA = 90^\circ$ הוא:

$$S_{\triangle FBA} = \frac{1}{2} BF \cdot BA$$

כדי לקבל את שיעור ה- x של הנקודה F,

נציב $y = 0$ במשוואת הישר I:

$$0 = 2 \cdot x + 30$$

$\Downarrow$

$$x = -15$$

שיעור ה- x של F:

B היא נקודת המפגש של ישר I עם ישר III,

לכן שיעור ה- x של B מקיים:

$$2x + 30 = -\frac{1}{2}x + 20$$

$\Downarrow$

$$x = -4$$

שיעור ה- x של B:

מהצבת $x = -4$ במשוואה של הישר I

או של הישר III נקבל כי שיעור ה- y של B הוא:

$$22$$

על פי הנקודות $B(-4, 22)$, $F(-15, 0)$

אורך BF הוא:

$$BF = \sqrt{(-4 + 15)^2 + 22^2} = \sqrt{605}$$

על פי הנקודות $B(-4, 22)$, $A(4, 18)$

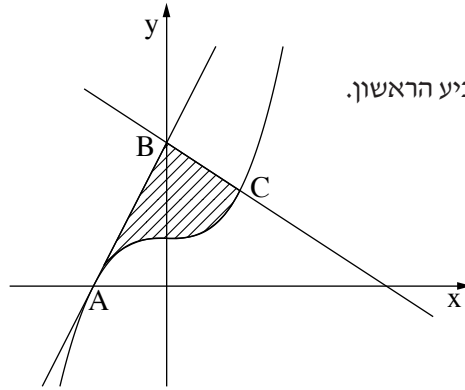
אורך BA הוא:

$$BA = \sqrt{(-4 - 4)^2 + (22 - 18)^2} = \sqrt{80}$$

שטח המשולש FBA:

$$S_{\triangle FBA} = \frac{1}{2} \sqrt{605} \cdot \sqrt{80} = 110$$

שאלה 4



נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$.

א. נקודה C נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$

בנקודה C, הוא 3.

מצא את השיעורים של הנקודה C.

גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה A.

הישר $y = 3x + 3$ עובר דרך הנקודה A,

וחותך את ציר ה- y בנקודה B, כמתואר בציור.

ב. מצא את השיעורים של הנקודה B, ומצא את משוואת הישר BC.

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר BA (משיק ל- $f(x)$)

ועל ידי הישר BC (השטח המקווקו בציור).

תשובה לשאלה 4

$$f(x) = x^3 + 1$$

א.

↓

$$f'(x) = 3x^2$$

↓

$$3x^2 = 3$$

↓

$$x = \pm 1$$

שיפוע המשיק בנקודה C

שווה לנגזרת $f'(x)$ בנקודה C, לכן:

מאחר שנקודה C ברביע הראשון,

$$x = 1$$

שיעור ה- x של C הוא:

$$\text{מהצבת } x = 1 \text{ ב- } f(x)$$

$$y = 1^3 + 1 = 2$$

נקבל את שיעור ה- y של C:

$$(1, 2)$$

השיעורים של הנקודה C:

המשך תשובה לשאלה 4.

ב. מהצבת $x = 0$ במשוואת הישר

נקבל את שיעור ה־ y של B :

$$y = 3$$

השיעורים של B :

$$(0, 3)$$

על פי שתי הנקודות $B(0, 3)$ ו־ $C(1, 2)$

השיפוע של הישר BC הוא:

$$\frac{3-2}{0-1} = -1$$

$$\Downarrow$$

$$y - 3 = -(x - 0)$$

משוואת הישר BC היא:

$$\Downarrow$$

$$y = -x + 3$$

ג. הישר BA חותך את ציר ה־ x בנקודה שבה:

$$x = -1$$

השטח המבוקש מורכב משני שטחים:

$$S = \int_{-1}^0 ((3x + 3 - f(x)) dx + \int_0^1 (-x + 3 - f(x)) dx$$

$$\Downarrow$$

$$S = \int_{-1}^0 (3x + 2 - x^3) dx + \int_0^1 (-x + 2 - x^3) dx$$

$$\Downarrow$$

$$S = \left[\frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

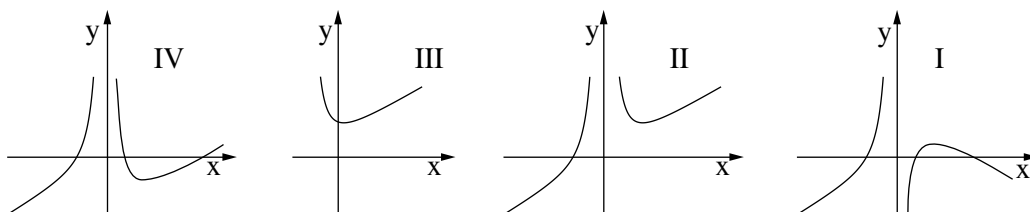
$$\Downarrow$$

$$S = -\left(\frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{4}\right) = 2$$

שאלה 5

נתונה הפונקציה $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.
- מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- איזה מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניך מתאר את הפונקציה הנתונה? נמק.



תשובה לשאלה 5

א. תחום ההגדרה: $x \neq 0$

ב. אסימפטוטה אנכית: $x = 0$

ג. $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$

$\Downarrow$

$$f'(x) = 1 - 4 \cdot \frac{2}{x^3} = 1 - \frac{8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 8$$

$\Downarrow$

$$x = 2$$

שיעור ה- x של הנקודה שבה הנגזרת שווה ל-0:

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	9		-7	0	0.7
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

בדיקת תחומי העלייה והירידה של $f(x)$:

לפי הטבלה ל- $f(x)$ יש מינימום בנקודה שבה: $x = 2$

מהצבת $x = 2$ ב- $f(x)$ נקבל כי

$$y = 2 + \frac{4}{2^2} = 3$$

שיעור ה- y של נקודת המינימום הוא:

(2, 3)

השיעורים של נקודת המינימום:

המשך תשובה לשאלה 5.

ד. לפי הטבלה שבסעיף ג:

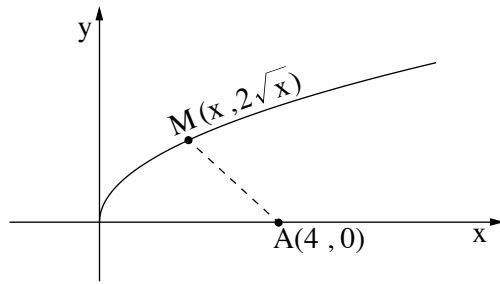
הפונקציה עולה עבור: $x < 0$, $x > 2$

הפונקציה יורדת עבור: $0 < x < 2$

ה. גרף II ,

כי המינימום של $f(x)$ הוא בנקודה $(2, 3)$, ברביע הראשון.

שאלה 6



$$f(x) = 2\sqrt{x} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

(ראה ציור).

א. מצא את שיעור ה- x שלנקודה M על גרף הפונקציה,שמרחק בריבוע (d^2)מהנקודה $A(4, 0)$ הוא מינימלי.ב. מצא את המרחק המינימלי (d) שבין הנקודה M לנקודה A .

תשובה לשאלה 6

א. המרחק בריבוע של $M(x, 2\sqrt{x})$

$$d^2 = (x - 4)^2 + (2\sqrt{x} - 0)^2 \quad \text{מ- } A(4, 0) \text{ הוא:}$$

 $\Downarrow$

$$d^2 = x^2 - 4x + 16$$

 $\Downarrow$

$$g'(x) = 2x - 4$$

נסמן $g(x) = d^2$, ונקבל כי

הנגזרת של המרחק בריבוע היא:

נקודת הקיצון מתקבלת כאשר $g'(x) = 0$,

$$0 = 2x - 4$$

לכן בנקודת הקיצון מתקיים:

$$x = 2$$

שיעור ה- x של נקודת הקיצון:

x	1	2	3
$g'(x)$	-2	0	2
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

בדיקת מינימום:

לפי הטבלה ל- $g(x)$ יש מינימום ב- $x = 2$.ב. לאחר הצבת $x = 2$ ב- d^2 , נקבל שהמרחק המינימלי בריבוע הוא: $d^2 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 16 = 12$ $\Downarrow$

$$d = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

לכן המרחק המינימלי הוא: