

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

שאלון ו'

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה	—	$33 \frac{1}{3} \times 1$	—	$33 \frac{1}{3}$	נקודות
פרק שני	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי,	—	$33 \frac{1}{3} \times 2$	—	$66 \frac{2}{3}$	נקודות
טריגונומטריה	—		—	סה"כ	—	100	נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
- שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
- חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
- שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

הערה: קישורית לדוגמאות תשובה לשאלון זה תתפרסם בדף הראשי של אתר משרד החינוך.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

ראובן ושמעון חופרים יחד תעלה אחת ב- 12 שעות.
אם ראובן חופר לבד $\frac{1}{3}$ מהתעלה, ולאחר שהוא מסיים את חלקו שמעון חופר לבד את יתר התעלה, החפירה מסתיימת כעבור $23\frac{1}{3}$ שעות.
כמה תעלות שלמות לכל היותר יחפור ראובן לבד בפחות מ- 100 שעות? התעלות זהות לתעלה הנתונה.
הספקי העבודה של שמעון ושל ראובן אינם משתנים.

תשובה לשאלה 1

א.

זמן העבודה (שעות)	קצב העבודה ($\frac{1}{\text{שעה}}$)	סה"כ עבודה
ראובן	$\frac{x}{3}$	$\frac{1}{3}$
שמעון	$\frac{2y}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{I. } 12y + 12x = xy$$

$$\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} = 23\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{II. } x = 70 - 2y$$

$$y^2 - 41y + 420 = 0 \quad \text{מ- I ו- II מקבלים:}$$

$\Downarrow$

$$y = 20 \text{ שעות} \quad \text{או} \quad y = 21 \text{ שעות}$$

הזמן ששמעון חופר לבד תעלה אחת:

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$x = 30 \text{ שעות} \quad \text{או} \quad x = 28 \text{ שעות}$$

הזמן שראובן חופר לבד תעלה אחת:

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$\frac{100}{28} = 3.57 \quad \text{או} \quad \frac{100}{30} = 3.33$$

בפחות מ- 100 שעות מספר

התעלות שראובן יחפור קטן מ:

$\Downarrow$

מספר התעלות השלמות שראובן יחפור

3 תעלות

לכל היותר בפחות מ- 100 שעות:

שאלה 2

א. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי הביטוי $a^n - 1$ (a פרמטר טבעי, $a > 1$) מתחלק

ב- $a - 1$ בלי שארית, לכל n טבעי.

ב. נתון מספר טבעי m . היעזר בתוצאה שקיבלת בסעיף א ורשום 3 מספרים טבעיים

(גדולים מ-1) שהביטוי $15^m - 1$ מתחלק בהם בלי שארית.

תשובה לשאלה 2

א. בדיקה עבור $n = 1$: שלם $\frac{a^1 - 1}{a - 1} = 1$

נניח כי הטענה נכונה עבור k טבעי כלשהו: שלם $\frac{a^k - 1}{a - 1}$

נוכיח כי הטענה נכונה עבור $k + 1$: שלם $\frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} &= \frac{a^k \cdot a - 1}{a - 1} = \frac{a^k(a - 1 + 1) - 1}{a - 1} = \\ &= \frac{a^k(a - 1) + a^k - 1}{a - 1} = \frac{a^k(a - 1)}{a - 1} + \frac{a^k - 1}{a - 1} = \text{שלם} \\ &\quad \uparrow \quad \uparrow \\ &\quad \text{שלם} \quad \text{שלם לפי} \\ &\quad \text{הנחת האינדוקציה} \end{aligned}$$

לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. לפי התוצאה שהתקבלה בסעיף א שלם $\frac{15^m - 1}{15 - 1}$, כלומר הביטוי $15^m - 1$ מתחלק ב-14 בלי שארית.

כל מספר שמתחלק ב-14 בלי שארית, מתחלק גם ב-7 וב-2 בלי שארית, ולכן $15^m - 1$ מתחלק בלי שארית ב-2, 7, ו-14.

שאלה 3

- נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \cos \frac{x}{2}$ בתחום $2\pi \leq x \leq 5\pi$.
- א. (1) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה) בתחום הנתון.
 (2) הראה כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חיובית בתחום הנתון.
 (3) רק על פי התשובות לתת-סעיפים (1) ו-(2), סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.
 (4) כמה פתרונות יש למשוואה $f'(x) = 40$ בתחום הנתון? נמק.
- ב. (1) רשום את הערך המקסימלי של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון.
 (2) האם השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון, שווה לערך של האינטגרל המסוים $\int_{2\pi}^{5\pi} (f'(x) - f''(x)) dx$? נמק.

תשובה לשאלה 3

- א. (1) דרך I
- $$f'(x) = 2x + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$$
- $$\Downarrow$$
- $$f''(x) = 2 + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$$
- $$\Downarrow$$
- כי $\cos \frac{x}{2} \neq -8$ $f''(x) \neq 0$
- $$\Downarrow$$
- אין נקודות קיצון פנימיות ל- $f'(x)$
- נציב למשל $x = 4\pi$ ונקבל:
- $$f''(4\pi) = 1\frac{3}{4} > 0$$
- $$\Downarrow$$
- $f''(x) > 0$ לכל x בתחום הנתון
- $$\Downarrow$$
- $f'(x)$ עולה לכל x בתחום הנתון

- דרך II
- $$f''(x) = 2 + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$$
- $$\Downarrow$$
- מאחר ש- $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} \leq \frac{1}{4}$ נקבל:
- $f''(x) > 0$ לכל x בתחום הנתון

המשך תשובה לשאלה 3.

(2) $f'(x)$ עולה לכל x בתחום הנתון

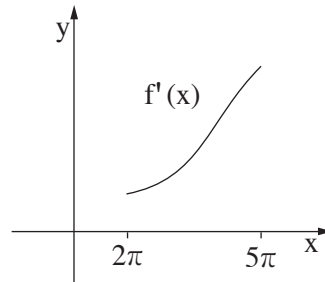
⇓

$$f'(2\pi) = 4\pi + \frac{1}{2} \sin \pi = 4\pi \quad \text{הערך המינימלי של } f'(x):$$

⇓

$f'(x) > 0$ לכל x בתחום הנתון

(3) לפי תת-סעיפים א(1) ו-א(2) $f'(x)$ חיובית ועולה (לא נדרש לבדוק נקודות פיתול):



(4) $f'(x)$ עולה לכל x בתחום הנתון

⇓

$$f'(5\pi) = 10\pi + \frac{1}{2} \sin 2.5\pi = 31.9 \quad \text{הערך המקסימלי של } f'(x):$$

⇓

הישר $y = 40$ אינו חותך את $f'(x)$

⇓

אין פתרון למשוואה $f'(x) = 40$

המשך תשובה לשאלה 3.

ב. (1) מצאנו: $f''(x) = 2 + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$

הערך המקסימלי של $\cos \frac{x}{2}$ הוא 1,

לכן הערך המקסימלי של $f''(x)$ הוא:

$$2\frac{1}{4}$$

(2) מצאנו בתת-סעיף א(2) כי בתחום הנתון

הערך המינימלי של $f'(x)$ הוא: 4π

בתחום הנתון הערך המקסימלי של $f''(x)$

קטן מהערך המינימלי של $f'(x)$

לכן בתחום הנתון: $f'(x) > f''(x)$

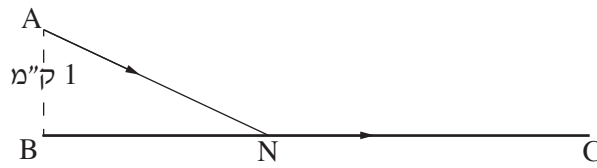
↓

הגרף של $f'(x)$ מעל לגרף של $f''(x)$

↓

השטח שווה לערך של האינטגרל

שאלה 4



דני יצא מנקודה A, הנמצאת בשדה

במרחק 1 ק"מ מהכביש BC.

הוא הלך בשדה בקו אלכסוני

במהירות קבועה v ,

והגיע לכביש BC בנקודה כלשהי N (ראה ציור).

דני הלך בכביש במהירות הגדולה פי $\frac{13}{12}$ מהמהירות שבה הלך בשדה, והגיע

לנקודה C בכביש.

המרחק בין B ל-C הוא 6 ק"מ.

מהו אורך המסלול ANC אם ידוע שדני עבר אותו בזמן המינימלי?

תשובה לשאלה 4

א. נסמן למשל:

$$BN = x$$

$\Downarrow$

$$AN = \sqrt{1 + x^2}, \quad NC = 6 - x$$

$\Downarrow$

$$t(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{v} + \frac{6 - x}{\frac{13}{12} \cdot v}$$

הזמן שדני עובר את המסלול ANC:

$\Downarrow$

$$t'(x) = \frac{1}{v} \left(\frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} - \frac{12}{13} \right)$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow 13x = 12\sqrt{1 + x^2}$$

$\Downarrow$

$$13^2 x^2 = 12^2 (1 + x^2)$$

$\Downarrow$

$$(x > 0) \quad x = \frac{12}{5} = 2.4$$

בדיקת מינימום:

$$t'(1) = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{12}{13} \right) < 0$$

$$t'(3) = \frac{1}{v} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{12}{13} \right) > 0$$

אורך המסלול ANC המינימלי:

$$AN + NC = \sqrt{1 + x^2} + 6 - x$$

$\Downarrow$

$$AN + NC = \sqrt{1 + 2.4^2} + 6 - 2.4 = 6.2 \text{ ק"מ}$$

[illegible]

(2) הבע באמצעות α את היחס $\frac{DE}{DC}$.

[illegible]
$$\sphericalangle \text{FOD} = 270^\circ - 2\alpha$$

המשך תשובה לשאלה 5.

ב. (1) $OD = OF$ רדיוסים במעגל

$\Downarrow$

במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות $\angle ODF = \angle OFD$

$\Downarrow$

$$\angle ODF = \frac{180^\circ - \angle FOD}{2} = \alpha - 45^\circ$$

(2) $\angle AED = 90^\circ$ זווית היקפית הנשענת על קוטר

$\Downarrow$

I. $DE = AD \cos \alpha = 2R \cos \alpha$ במשולש ADE מתקיים:

$$\angle FDC = \angle ODC - \angle ODF = \alpha - (\alpha - 45^\circ) = 45^\circ$$

לפי משפט הסינוסים

במשולש DFC: $\frac{DC}{\sin(180^\circ - (45^\circ + \alpha))} = \frac{DF}{\sin \alpha}$

$\Downarrow$

II. $DC = \frac{DF \sin(45^\circ + \alpha)}{\sin \alpha}$

במשולש שווה-שוקיים DOF

מתקיים: $\frac{\frac{1}{2}DF}{R} = \cos(\alpha - 45^\circ)$

$\Downarrow$

III. $DF = 2R \cos(\alpha - 45^\circ)$

מהצבת III ב-II

IV. $DC = \frac{2R \cos(\alpha - 45^\circ) \sin(45^\circ + \alpha)}{\sin \alpha}$ מקבלים:

מ-I ו-IV מקבלים: $\frac{DE}{DC} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos(\alpha - 45^\circ) \sin(45^\circ + \alpha)}$