

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

שאלון ד'

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — טריגונומטריה במישור ובמרחב,

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של

הפונקציות הטריגונומטריות

פרק שני — חזקות ולוגריתמים,

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

$$33\frac{1}{3} \times 1 - 33\frac{1}{3}$$

$$33\frac{1}{3} \times 2 - 66\frac{2}{3}$$

$$100 - 36$$

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

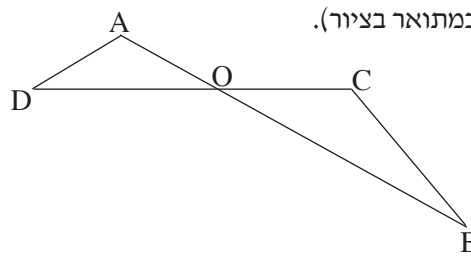
(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1



AB ו-CD הם שני קטעים הנחתכים בנקודה O (כמתואר בציור).

נתון: $\angle OAD = 120^\circ$, $\angle OCB = 130^\circ$

OB = 30 ס"מ , OC = 14 ס"מ

AD = 11 ס"מ .

א. מצא את האורך של הקטע DO .

ב. OM הוא הגובה לצלע BD במשולש BDO .

(1) חשב את האורך של הצלע BD .

(2) חשב את האורך של הגובה OM .

תשובה לשאלה 1

א. ב- $\triangle OCB$: משפט הסינוסים
$$\frac{14}{\sin \angle CBO} = \frac{30}{\sin 130^\circ}$$

$\Downarrow$

$$\angle CBO = 20.95^\circ \quad (\angle CBO < 90^\circ \text{ כי } \angle OCB = 130^\circ)$$

$$\angle COB = 180^\circ - 20.95^\circ - 130^\circ = 29.05^\circ$$

השלמת זוויות:

זוויות קדקודיות $\angle AOD = \angle COB = 29.05^\circ$

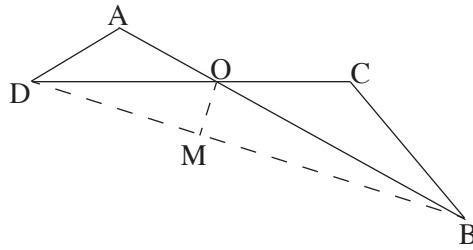
ב- $\triangle OAD$: משפט הסינוסים
$$\frac{DO}{\sin 120^\circ} = \frac{11}{\sin 29.05^\circ}$$

$\Downarrow$

$$DO = 19.6 \text{ ס"מ}$$

המשך תשובה לשאלה 1.

ב.



$$\angle DOB = 180^\circ - 29.05^\circ = 150.95^\circ \quad (1) \quad \text{ב-} \triangle ODB :$$

משפט הקוסינוסים

$$DB^2 = 19.6^2 + 30^2 - 2 \cdot 19.6 \cdot 30 \cdot \cos 150.95^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$DB = 48.1 \text{ ס"מ}$$

(2) דרך I

נרשום 2 ביטויים לחישוב שטח $\triangle ODB$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 19.6 \cdot 30 \cdot \sin 150.95^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 48.1 \cdot OM$$

$$\frac{1}{2} \cdot 48.1 \cdot OM = 142.76 \quad \text{נשווה את שני הביטויים:}$$

$$\Downarrow$$

$$OM = 5.9 \text{ ס"מ}$$

דרך II

משפט הסינוסים

$$\frac{48.1}{\sin 150.95^\circ} = \frac{30}{\sin \angle ODB} \quad \text{ב-} \triangle ODB :$$

$$\Downarrow$$

$$\angle ODB = 17.6^\circ \quad (\angle DOB = 150.95^\circ \text{ כי } \angle ODB < 90^\circ)$$

$$\sin 17.6 = \frac{OM}{19.6} \quad \text{ב-} \triangle OMD :$$

$$\Downarrow$$

$$OM = 5.9 \text{ ס"מ}$$

שאלה 2

- נתונה הפונקציה $f(x) = a - b \sin(2x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
- a ו- b הם פרמטרים חיוביים.
- א. אחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x היא הנקודה שבה $x = \frac{\pi}{12}$.
הבע את b באמצעות a .
- הצב בפונקציה $b = 2a$, וענה על הסעיפים ב-ד שלפניך.
- ב. בתחום הנתון הבע באמצעות a , במידת הצורך:
- (1) את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- (2) את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0.5a$ בתחום הנתון? נמק.

תשובה לשאלה 2

א. לפי הנתון נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x היא: $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$

$\Downarrow$

מהצבה של $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ נקבל: $0 = a - b \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)$

$\Downarrow$

$$b = 2a$$

ב. (1) $f(x) = a - 2a \sin(2x)$

$$(a > 0) \quad f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$x = \frac{5\pi}{12}, \quad x = \frac{\pi}{12}$$

נקודות החיתוך עם ציר ה- x : $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right), \left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = a$$

נקודת החיתוך עם ציר ה- y : $(0, a)$

המשך תשובה לשאלה 2

ב. (2) $f'(x) = -4a \cos 2x$

$(a > 0) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$

$\Downarrow$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\Downarrow$

$x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$

הנקודות ה"חשודות" כקיצון

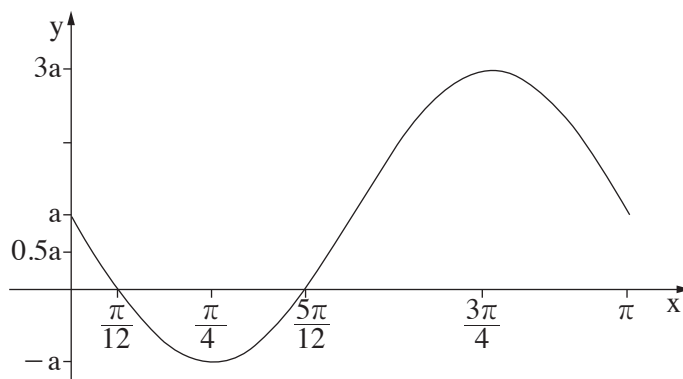
בתחום $0 \leq x \leq \pi$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	ערכי $f(x)$ בנקודות ה"חשודות" ובקצות התחום:
$f(x)$	a	$-a$	$3a$	a	

$a > 0$, לכן לפי הטבלה מקסימום מוחלט: $\left(\frac{3\pi}{4}, 3a\right)$

מינימום מוחלט: $\left(\frac{\pi}{4}, -a\right)$

ג.



ד. לפי הגרף שבסעיף ג: הישר $y = 0.5a$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות

$\Downarrow$

יש 2 פתרונות למשוואה $f(x) = 0.5a$

שאלה 3

$$f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ד. הראה כי $f(-x) = f(x)$ לכל x בתחום ההגדרה.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובה לשאלה 3

- א. שני תנאים לתחום ההגדרה: I. $x \neq 0$

$$\text{II. } 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$\text{מ-I, II תחום ההגדרה: } -3 \leq x \leq 3, \quad x \neq 0$$

- ב. חיתוך עם ציר ה- y : אין.
(הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = 0$.)

$$\text{חיתוך עם ציר ה-} x: f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$(-3, 0), (3, 0)$$

המשך תשובה לשאלה 3.

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot x^2 - \sqrt{9-x^2} \cdot 2x}{x^4} \quad .ג.$$

$\Downarrow$

$$f'(x) = \frac{-x^3 - (9-x^2) \cdot 2x}{\sqrt{9-x^2} \cdot x^4} = \frac{x^3 - 18x}{\sqrt{9-x^2} \cdot x^4} = \frac{x^2 - 18}{\sqrt{9-x^2} \cdot x^3}, \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = 0$$

$\Downarrow$

$$x^2 - 18 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{18}$$

שיעורי ה־ x אינם בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

x	$-3 < x < 0$	0	$0 < x < 3$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

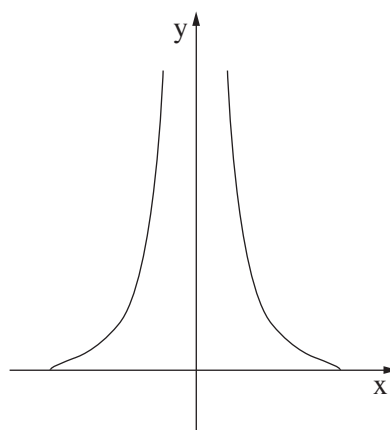
הפונקציה $f(x)$ עולה כאשר $-3 < x < 0$.

הפונקציה $f'(x)$ יורדת כאשר $0 < x < 3$.

$$f(-x) = \frac{\sqrt{9-(-x)^2}}{(-x)^2} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} \quad .ד.$$

$\Downarrow$

$$f(-x) = f(x)$$

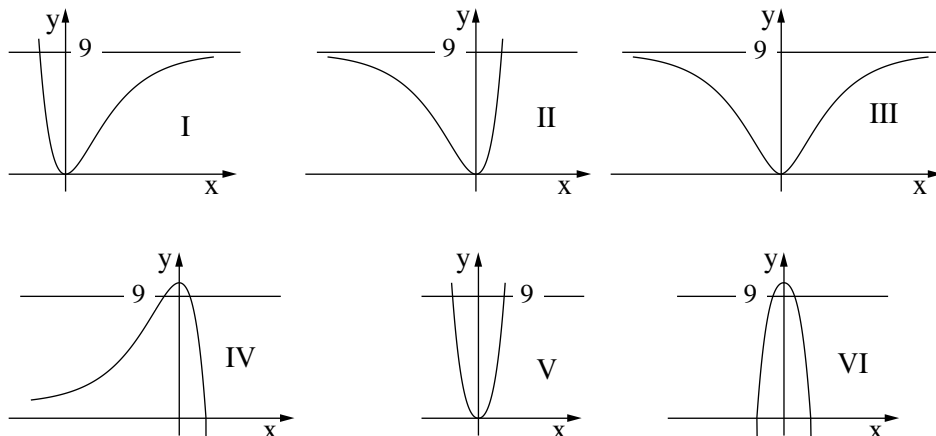


ה.

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = (3e^x - 3)^2$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 (3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
 ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישר $y = 9$ (אם יש כאלה).
 ג. מבין הגרפים VI-I שלפניך, איזה גרף מציג סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.



תשובה לשאלה 4

א. (1) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3e^x - 3 = 0 \quad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

נקודת החיתוך של $f(x)$ עם הצירים: $(0, 0)$

המשך תשובה לשאלה 4.

$$f'(x) = 2(3e^x - 3) \cdot 3e^x \quad \text{א.} \quad (3)$$

$\Downarrow$

$$f'(x) = 18e^{2x} - 18e^x = 18e^x(e^x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(e^x - 1) = 0$$

$\Downarrow$

$$e^x - 1 = 0 \quad e^x \neq 0 \text{ לכל } x, \text{ לכן:}$$

$\Downarrow$

$$x = 0$$

$$f''(x) = 18 \cdot 2e^{2x} - 18e^x$$

$\Downarrow$

$$f''(0) > 0$$

$\Downarrow$

מינימום ב- $(0, 0)$

ב. נקודות החיתוך

$$9 = (3e^x - 3)^2 \quad \text{בין } f(x) \text{ ל- } y = 9 \text{ מקיימות:}$$

$\Updownarrow$

$$e^x(e^x - 2) = 0$$

$\Downarrow$

$$(e^x \neq 0) \quad e^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \ln 2$$

השיעורים של נקודות החיתוך

בין הגרף של $f(x)$ לישר $y = 9$: $(\ln 2, 9)$

ג. הגרף של $f(x)$ הוא גרף II, כי:

— ל- $f(x)$ יש מינימום ב- $(0, 0)$.

— הישר $y = 9$ חותך את $f(x)$ בנקודה אחת ברביע הראשון.

שאלה 5

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-2}{2x-3}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $x = 1$.

תשובה לשאלה 5

א. צריך להתקיים: $2x - 3 \neq 0$

$\Downarrow$

תחום ההגדרה: $x \neq \frac{3}{2}$

ב. $f'(x) = \frac{4}{(2x-3)^2}$

$\Downarrow$

$f'(x) > 0$ לכל x שונה מ- $\frac{3}{2}$

$\Downarrow$

$f(x)$ עולה עבור $x > \frac{3}{2}$ ועבור $x < \frac{3}{2}$

ג. אסימפטוטות: $y = 0$, $x = \frac{3}{2}$

המשך תשובה לשאלה 5.

ד. $f(x) \neq 0$ כי המונה של $f(x)$ שונה מ-0

$\Downarrow$

אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x

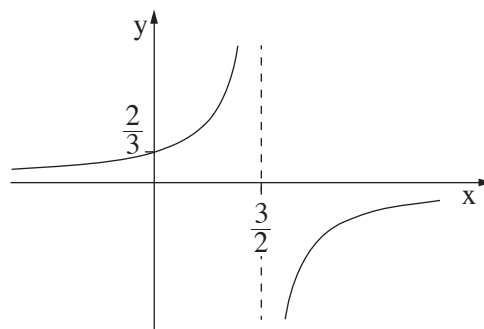
$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2}{3}$$

נקודת החיתוך

$$(0, \frac{2}{3})$$

של $f(x)$ עם ציר ה- y :

ה.



$$S = \int_0^1 \frac{-2}{2x-3} dx = \left[-\ln|2x-3| \right]_0^1$$

$\Downarrow$

$$S = -\ln|-1| + \ln|-3| = \ln 3$$

ו. השטח המבוקש:

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך