

## הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

### מ ת מ ט י ק ה

#### 5 יחידות לימוד — שאלון שני

##### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים —  $33 \frac{1}{3} \times 2$  —  $66 \frac{2}{3}$  נקודות

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות —  $33 \frac{1}{3} \times 1$  —  $33 \frac{1}{3}$  נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

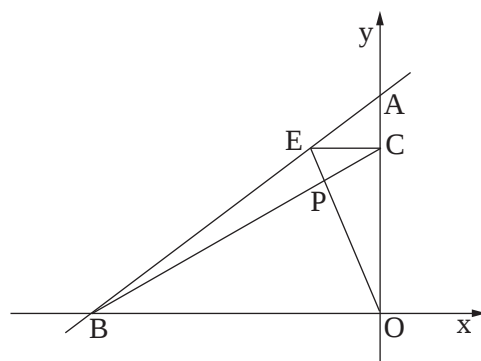
שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

### שאלה 1



נתונות הנקודות:  $A(0, 6)$  ,  $B(-8, 0)$  .

דרך הנקודה E שעל הקטע AB מעבירים

ישר המקביל לציר ה- $x$

(הנקודה E שונה מ- $A$  ומ- $B$ ).

הישר חותך את ציר ה- $y$  בנקודה C .

הישר BC חותך את הישר OE בנקודה P .

O – ראשית הצירים (ראה ציור).

א. הראה כי המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות P הנוצרות באופן שתואר,

נמצא על קו ישר.

ב. הנקודה  $P_0$  נמצאת על המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א, כך שהנקודה E היא

מרכז המעגל החוסם את המשולש ABO .

מצא את שטח המשולש  $AP_0O$  .

### תשובה לשאלה 1

א. שיעורי ה- $y$  של הנקודות E ו- C מקיימים:

$$\frac{6}{8} = \frac{y_E}{x_E + 8}$$

$\Downarrow$

$$\text{I. } x_E = \frac{8y_E - 6 \cdot 8}{6}$$

$$\frac{y_E}{x_E} = \frac{y}{x}$$

$\Downarrow$

$$\text{II. } x_E = \frac{y_E \cdot x}{y}$$

$$m_{CB} = m_{PB}$$

$\Downarrow$

$$\frac{y_E}{8} = \frac{y}{x + 8}$$

$\Downarrow$

$$\text{III. } y_E = \frac{8y}{x + 8}$$

$$\text{IV. } \frac{8y_E - 6 \cdot 8}{6} = \frac{y_E \cdot x}{y}$$

מ- I ו- II מקבלים:

$$y = \frac{3}{2}x + 6$$

מ- III ו- IV מקבלים:

## המשך תשובה לשאלה 1.

ב. קוטר המעגל החוסם את  $\triangle ABO$  הוא:

E מרכז המעגל החוסם את  $\triangle ABO$ ,

לכן E אמצע AB ושיעורי E הם:

AB

$\Downarrow$

$$E(-4, 3)$$

$$x_E = \frac{y_E \cdot x_{P_0}}{y_{P_0}}$$

$\Downarrow$

$$\text{I. } -4 = \frac{3x_{P_0}}{y_{P_0}}$$

לפי משוואה II שבסעיף א:

הנקודה  $P_0(x_{P_0}, y_{P_0})$  על

המקום הגאומטרי, לכן מתקיים:

$$\text{II. } y_{P_0} = \frac{3}{2}x_{P_0} + 6$$

$$x_{P_0} = -\frac{8}{3}$$

מ־I ו־II מקבלים:

$$\frac{1}{2} \cdot |x_{P_0}| \cdot AO$$

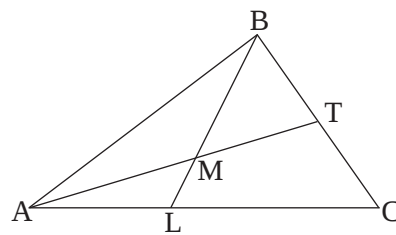
$\Downarrow$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 6 = 8$$

שטח  $\triangle AP_0O$  הוא:

/המשך בעמוד 4/

## שאלה 2



במשולש ABC התיכון לצלע BC הוא AT.

הנקודה L נמצאת על הצלע AC.

AT ו-BL נפגשים בנקודה M

(ראה ציור).

נסמן:  $\vec{AC} = \underline{v}$ ,  $\vec{AB} = \underline{u}$ ,  $\vec{AM} = \alpha \vec{AT}$ ,  $\vec{BM} = \beta \vec{BL}$ .

א. נתון:  $\frac{AL}{LC} = \frac{3}{4}$ .

מצא את הערך של  $\alpha$  ואת הערך של  $\beta$ .

ב. (1) מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי שעליו מונחות הנקודות B,

שעבורן במשולש ABC מתקיים:  $AT = \sqrt{50}$ ,  $\underline{v} = (7, 7)$ ,  $A(1, 0)$ .

על פי הנתונים שבתת-סעיף ב(1) והנתון שבסעיף א ענה על התת-סעיפים (2) ו-(3).

(2) מצא את השיעורים של הנקודה L.

(3) אם הישר MB מקביל לציר ה-y, מצא את השיעורים של הקדקוד B.

הערה: הפתרון של סעיף ב אינו תלוי בפתרון של סעיף א.

## תשובה לשאלה 2

א. AT תיכון, לכן:  $\vec{AT} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$

$$\vec{BL} = \vec{AL} - \underline{u} = \frac{3}{7}\underline{v} - \underline{u}$$

I.  $\vec{BM} = \beta \vec{BL} = \beta \cdot \frac{3}{7}\underline{v} - \beta \underline{u}$

II.  $\vec{BM} = \vec{AM} - \underline{u} = \alpha \vec{AT} - \underline{u} = \frac{\alpha}{2}\underline{v} + (\frac{\alpha}{2} - 1)\underline{u}$

על פי יחידות ההצגה

$$\begin{aligned} \frac{3}{7}\beta &= \frac{\alpha}{2} \\ \Rightarrow \beta &= \frac{7}{10}, \quad \alpha = \frac{3}{5} \\ -\beta &= \frac{\alpha}{2} - 1 \end{aligned}$$

מקבלים מ-I ו-II:

## המשך תשובה לשאלה 2.

ב. (1) הצגה אלגברית של הווקטור  $\vec{AC}$ :

$$(x_C - x_A, y_C - y_A)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{I. } \vec{AC} = (x_C - 1, y_C)$$

נתון  $A(1, 0)$ , לכן:

$$\text{II. } \vec{AC} = (7, 7)$$

לפי הנתון:

$$x_C - 1 = 7, \quad y_C = 7$$

מ' I ו' II מקבלים:

$$\Downarrow$$

$$C(8, 7)$$

$$\text{III. } x_T = \frac{8 + x_B}{2}, \quad y_T = \frac{7 + y_B}{2} \quad \text{הנקודה } T(x_T, y_T) \text{ אמצע } BC, \text{ לכן:}$$

$$\text{IV. } AT^2 = (x_T - 1)^2 + y_T^2 = 50$$

$$(x_B + 6)^2 + (y_B + 7)^2 = 200$$

מ' III ו' IV מקבלים:

$$\Downarrow$$

$$(x + 6)^2 + (y + 7)^2 = 200$$

משוואת המקום הגאומטרי:

(2) נקודה L מחלקת את הקטע AC

$$y_L = \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 0}{7} = 3, \quad x_L = \frac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 1}{7} = 4$$

ביחס 3:4, לכן:

$$\Downarrow$$

$$L(4, 3)$$

$$x_B = x_L = 4$$

(3) MB מקביל לציר ה' y, לכן:

הנקודה B נמצאת על המקום הגאומטרי

$$(4 + 6)^2 + (y_B + 7)^2 = 200$$

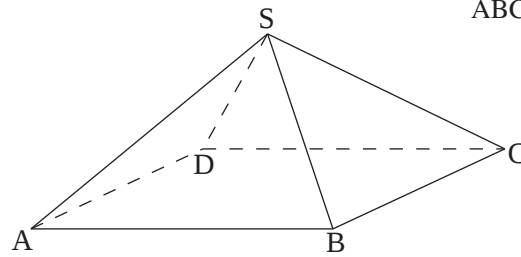
שמצאנו בסעיף ב, לכן מתקיים:

$$\Downarrow$$

$$y_B = -17$$

לכן,  $y_B \neq y_L$

## שאלה 3



א. נתונה פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא מקבילית (ראה ציור).

$$\vec{SA} = \underline{w}, \quad \vec{SB} = \underline{u}$$

$$\vec{SD} = \underline{v}$$

$$(1) \quad \underline{w} \text{ ו- } \underline{u}, \quad \underline{v} \text{ הבע באמצעות}$$

את הווקטור  $\vec{SC}$ .

$$(2) \quad \text{נתון גם: } SC = SA, \quad SD = SB, \quad |\underline{w}| = 2a, \quad |\underline{u}| = a$$

$$\angle ASB = \beta, \quad \angle ASD = \alpha, \quad \angle DSB = 90^\circ$$

$$\text{הראה כי } \cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$$

ב.  $z$  הוא מספר מרוכב.

$$(1) \quad \text{פתור את המשוואה } |z| + 2z = \sqrt{3}$$

$$(2) \quad \text{הראה כי כאשר } n \text{ הוא מספר טבעי, אז } z^{6n} \text{ יכול לקבל רק שני ערכים.}$$

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

## תשובה לשאלה 3

$$\vec{DC} = \vec{AB} = \underline{u} - \underline{w} \quad (1) \quad \text{א.}$$

$$\vec{SC} = \underline{v} + \vec{DC} = \underline{v} + \underline{u} - \underline{w}$$

$$|\vec{SC}|^2 = |\underline{w}|^2 = (\underline{v} + \underline{u} - \underline{w})^2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} |\underline{w}|^2 &= |\underline{v}|^2 + |\underline{u}|^2 + |\underline{w}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} - 2\underline{u} \cdot \underline{w} - 2\underline{v} \cdot \underline{w} = \\ &= |\underline{v}|^2 + |\underline{u}|^2 + |\underline{w}|^2 + 2|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cos 90^\circ - 2|\underline{u}| \cdot |\underline{w}| \cos \beta - 2|\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cos \alpha \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$0 = 2a^2 - 4a^2 \cos \beta - 4a^2 \cos \alpha$$

$\Downarrow$

$$\cos \beta + \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

## המשך תשובה לשאלה 3

ב. (1) נסמן:

$$z = x + yi$$

$$\Downarrow$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Downarrow$$
מהצבת  $|z|$  במשוואה

$$\sqrt{x^2 + y^2} i + 2x + 2yi = \sqrt{3}$$

הנתונה נקבל:

$$\Downarrow$$

$$2x - \sqrt{3} + i(2y + \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2x - \sqrt{3} = 0, \quad 2y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = 3y^2$$

$$\Downarrow$$
התוצאה  $y = \frac{1}{2}$  אינה מקיימת

$$y = -\frac{1}{2}$$

את המשוואה, לכן:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

(2) מצאנו:

$$\Downarrow$$

$$R = 1, \quad \theta = -30^\circ = 330^\circ$$

$$z^{6n} = (\cos(330^\circ \cdot 6) + i \sin(330^\circ \cdot 6))^n \quad \text{לפי משפט דה-מואבר:}$$

$$\Downarrow$$

$$z^{6n} = (-1)^n$$

$$z^{6n} = -1$$

עבור  $n$  אי-זוגי:

$$z^{6n} = 1$$

עבור  $n$  זוגי:

## שאלה 4

$$f'(x) = \frac{2\ln x \cdot (2 - \ln x)}{x \cdot (1 - \ln x)^2} \quad \text{נתונה פונקציית הנגזרת}$$

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של  $f'(x)$ .

(2) אחת משתי האסימפטוטות האנכיות של  $f'(x)$  היא  $x = 0$ .

מצא את האסימפטוטה האנכית השנייה.

(3) מצא את נקודות החיתוך של הגרף של  $f'(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את התחומים שבהם  $f'(x)$  היא שלילית, ואת התחומים שבהם היא חיובית.

ב. ידוע כי לפונקציית הנגזרת  $f'(x)$  יש גם אסימפטוטה אופקית,  $y = 0$ .

סרטט סקיצה של הגרף של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

ג. הישר  $y = -4$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x > e$ .

(1) מצא אתה השיעורים של נקודת ההשקה. נמק.

(2) הסבר מדוע  $f(e^3) < -4$ .

(3) השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  ועל ידי ציר ה- $x$

בתחום  $e^2 \leq x \leq e^3$ , שווה ל-0.5.

מצא את הערך של  $f(e^3)$ .

## תשובה לשאלה 4

א. (1)  $\ln x$  מוגדר עבור:  $x > 0$

המכנה שונה מ-0, לכן:  $1 - \ln x \neq 0 \Rightarrow \ln x \neq 1 \Rightarrow x \neq e$

מכאן שתחום ההגדרה הוא:  $x > e$ ,  $0 < x < e$

(2) אסימפטוטה:  $1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e$

(3)  $x \neq 0$ , לכן: אין חיתוך עם ציר ה- $y$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \ln x = 0, \quad \ln x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = e^2$$

$$\Downarrow$$

$$x = 1$$

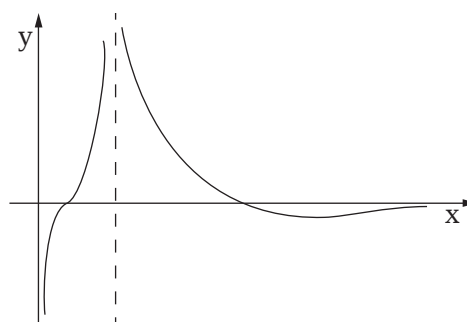
חיתוך עם ציר ה- $x$ :

| $x$     | $0 < x < 1$ | 1 | $1 < x < e$ | $e < x < e^2$ | $e^2$ | $x > e^2$ |
|---------|-------------|---|-------------|---------------|-------|-----------|
| $f'(x)$ | -           | 0 | +           | +             | 0     | -         |

(4)

## המשך תשובה לשאלה 4.

ב.



ג. (1) על פי הטבלה של  $f'(x)$  בתת-סעיף א (4) ל-  $f(x)$  יש נקודת מקסימום בנקודה שבה:  $x = e^2$

שיפוע המשיק  $y = -4$  הוא אפס, לכן הוא משיק ל-  $f(x)$  בנקודת הקיצון שבה  $x > e$ , כלומר בנקודת המקסימום, לכן השיעורים של נקודת ההשקה:  $(e^2, -4)$

(2) ל-  $f(x)$  נקודת מקסימום ב-  $x = e^2$ , לכן  $f(x)$  יורדת עבור  $x > e^2$ , לכן:

$$f(e^3) < f(e^2)$$

$$\Downarrow$$

$$f(e^3) < -4$$

$$S = 0.5 = - \int_{e^2}^{e^3} f'(x) dx = - [f(x)]_{e^2}^{e^3} = f(e^2) - f(e^3) \quad (3)$$

$$\Downarrow$$

$$0.5 = -4 - f(e^3)$$

$$\Downarrow$$

$$f(e^3) = -4.5$$

## שאלה 5

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{a^{x+1}}{a^{2x} - 1}$ ,  $0 < a < 1$ .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- הראה כי הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית.
- מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ידוע שפונקציית הנגזרת  $f'(x)$  היא פונקציה זוגית. העבירו ישר  $\ell$  המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = 1$ , והעבירו ישר אחר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה אחרת,  $T$ . שני המשיקים מקבילים זה לזה. ( $T$  היא הנקודה היחידה על גרף הפונקציה  $f(x)$  שבה המשיק מקביל ל- $\ell$ .) הבע באמצעות  $a$  (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה  $T$ . נמק.

## פתרון לשאלה 5

א. המכנה שונה מ-0, לכן:  $a^{2x} - 1 \neq 0$

$\Downarrow$

$x \neq 0$  תחום ההגדרה:

$$f(-x) = \frac{a^{-x+1}}{a^{-2x}-1} = \frac{a^{-x+1}}{\frac{1}{a^{2x}}-1} = \frac{a^{-x+1} \cdot a^{2x}}{1-a^{2x}} = -\frac{a^{x+1}}{a^{2x}-1} \quad \text{ב.}$$

$\Downarrow$

$$f(-x) = -f(x)$$

## המשך תשובה לשאלה 5.

$$f'(x) = \frac{a^{x+1} \cdot \ln a \cdot (a^{2x} - 1) - a^{x+1} \cdot 2 \cdot a^{2x} \ln a}{(a^{2x} - 1)^2} \quad \text{ג.}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = -\ln a \frac{a^{x+1} \cdot (a^{2x} + 1)}{(a^{2x} - 1)^2}$$

לכל  $a > 0$  מתקיים:  $(a^{2x} - 1)^2 > 0$ ,  $a^{x+1} > 0$ ,  $a^{2x} + 1 > 0$

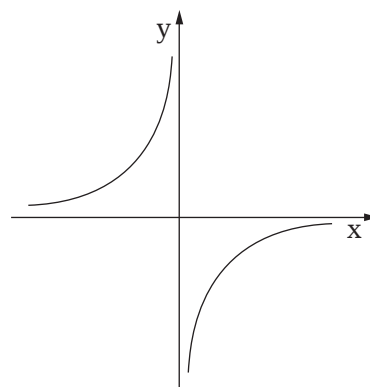
עבור  $0 < a < 1$ :  $\ln a < 0$

לכן עבור  $0 < a < 1$ :  $f'(x) > 0$

$$\Downarrow$$

עבור  $x > 0$  או  $x < 0$ :  $f(x)$  עולה

ד.



ה.  $f'(1) = f'(-1)$  לכן,  $f'(x)$  זוגית, לכן:

מכאן ששיעור ה־ $x$  של  $T$ :  $x_T = -1$  ( $T$  היא הנקודה היחידה על  $f(x)$  שבה המשיק מקביל ל־ $\ell$ ).

שיעור ה־ $y$  של  $T$ :  $f(-1) = \frac{a^2}{1-a^2}$

הנקודה  $T$  היא:  $T(-1, \frac{a^2}{1-a^2})$