מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: קיץ תשע"ג, 2013
מספר השאלון: 035806, 316

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון —	אלגברה והסתברות —	$16\frac{2}{3} \times 2$ —	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני —	גאומטריה וטריגונומטריה במישור —	$16\frac{2}{3} \times 2$ —	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי —	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי —	$16\frac{2}{3} \times 2$ —	$33\frac{1}{3}$ נקודות
		סה"כ —	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

שאלה 1

פועל I ופועל II עובדים במפעל לייצור חלקי חילוף.

שני הפועלים מבצעים יחד עבודה מסוימת.

קצב העבודה הרגיל של פועל I שונה מקצב העבודה הרגיל של פועל II .

אם כל אחד מהפועלים יגביר את קצב העבודה הרגיל שלו ב־ 50% ,

ההפרש בין זמן העבודה של שני הפועלים יחד בקצב הרגיל ובין זמן העבודה שלהם יחד בקצב המוגבר יהיה $\frac{2}{15}$ מהזמן שנדרש לפועל I לבצע לבד את העבודה בקצב הרגיל שלו.

א. מצא את היחס בין הזמן שבו פועל I מבצע לבד את העבודה ובין הזמן שבו פועל II מבצע לבד עבודה זו.

ב. העבודה ששני הפועלים מבצעים יחד היא הכנה של 300 חלקי חילוף.
הפועלים ביצעו יחד עבודה זו בקצב הרגיל שלהם ב־ 6 ימים.
כמה חלקי חילוף ביום מכין לבד פועל I בקצב הרגיל שלו?

תשובה לשאלה 1

א.

	זמן העבודה (ימים)	קצב העבודה $(\frac{1}{\text{יום}})$	סה"כ עבודה
פועל I : בקצב רגיל	x	$\frac{1}{x}$	1
בקצב מוגבר	$\frac{x}{1.5}$	$\frac{1.5}{x}$	1
פועל II: בקצב רגיל	y	$\frac{1}{y}$	1
בקצב מוגבר	$\frac{y}{1.5}$	$\frac{1.5}{y}$	1
פועל I ופועל II יחד: בקצב רגיל	t	$\frac{1}{t}$	1
בקצב מוגבר	T	$\frac{1}{T}$	1

/המשך בעמוד 3/

המשך תשובה לשאלה 1.

I. $\frac{t}{x}+\frac{t}{y}=1 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{xy}{y+x}$

II. $\frac{1.5}{x}\cdot T+\frac{1.5}{y}\cdot T=1 \quad \Rightarrow \quad T=\frac{xy}{1.5(y+x)}$

III. $t-T=\frac{2}{15}x$

מ־ I ו־ II ו־ III מקבלים:

$$\frac{xy}{y+x}-\frac{xy}{1.5(y+x)}=\frac{2}{15}x$$

$$\Downarrow$$

אחרי צמצום ב־ x $(x \neq 0)$:

$$\frac{x}{y}=1.5$$

ב.

I. $\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1$

II. $\frac{x}{y}=1.5$

מ־ I ו־ II מקבלים: x = 15 ימים

פועל I מייצר 300 חלקי חילוף ב־ 15 ימים,

לכן ביום אחד פועל I מייצר: $\frac{300}{15}=$ 20 חלקים

/המשך בעמוד 4/

שאלה 2

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא:

$$S_n = n^2 - 5n + [2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2)]$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ־ 102 .
חשב את הערך הגדול ביותר שיכול להתקבל עבור סכום מסוים של איברים כאלה
(לאו דווקא הסכום של כל האיברים).

תשובה לשאלה 2

א. הסכום $2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2)$
הוא סכום של n איברים בסדרה חשבונית
שהפרשה 4 ואיברה הראשון 2 , לכן:

$$S_n = n^2 - 5n + \frac{n}{2}(2 \cdot 2 + 4(n-1)) = 3n^2 - 5n$$

$$\Downarrow$$

עבור $n > 1$ מתקיים:

$$S_{n-1} = 3(n-1)^2 - 5(n-1)$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = 6n - 8$$

נבדוק אם הנוסחה $a_n = 6n - 8$
נכונה גם עבור $n = 1$:

$$a_1 = S_1 = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -2 \quad , \quad 6n - 8 = 6 \cdot 1 - 8 = -2$$

$$\Downarrow$$

הנוסחה $a_n = 6n - 8$ נכונה לכל n

/המשך בעמוד 5/

המשך תשובה לשאלה 2.

ב.

$$a_n < 102$$

$$\Downarrow$$

$$6n - 8 < 102$$

$$\Downarrow$$

$$n < 18\frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

מספר האיברים הקטנים מ־ 102: $n = 18$

מספר האיברים השליליים: $a_n < 0$

$$\Downarrow$$

$$n < \frac{8}{6}$$

$$\Downarrow$$

$$n = 1$$

האיבר השלילי היחיד הוא: $a_1 = 6 - 8 = -2$

לכן הסכום המקסימלי הוא: $a_2 + a_3 + ... + a_{18} = S_{18} - a_1 = 3 \cdot 18^2 - 5 \cdot 18 + 2 = 884$

/המשך בעמוד 6/

שאלה 3

הוועדה המארגנת של התחרות "נולד לשיר" מתלבטת אם ישפוט בתחרות רק שופט א' או יצטרפו אליו שני שופטים נוספים: שופט ב' ושופט ג'.

ההצבעה של שופט א' לא תשתנה אם הוא ישפוט לבד או אם ישפוט עם האחרים.

ההצבעה של כל אחד מהשופטים אינה תלויה בהצבעה של השופטים האחרים.

אם ישפוט בתחרות רק שופט א' — יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם השופט יצביע בעדו.

אם ישפטו שלושת השופטים — יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם <u>לפחות</u> 2 מהשופטים יצביעו בעדו.

יוסי הוא אחד המתמודדים בתחרות. נתון כי ההסתברות ששופט א' יצביע בעד יוסי שווה להסתברות ששופט ב' יצביע בעדו. ההסתברות ששופט ג' יצביע בעד יוסי היא 0.5 .

א. האם ההסתברות, שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפוט בתחרות רק שופט א', שווה להסתברות שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפטו בתחרות שלושת השופטים? נמק.

ב. לבסוף הוחלט שבתחרות ישפטו שלושת השופטים.

נתון כי ההסתברות, ששופט א' הצביע בעד יוסי אם ידוע כי יוסי עבר לשלב נוסף בתחרות, גדולה מ־ 0.8 .

מצא את תחום הערכים של ההסתברות ששופט א' הצביע בעד יוסי.

תשובה לשאלה 3

א. לפי הנתון:

$$P(\text{א' בעד}) = P(\text{ב' בעד}) = x \quad , \quad P(\text{ג' בעד}) = 0.5$$

$$P(\text{לפחות 2 בעד}) = P(\text{א' בעד} \cap \text{ב' בעד} \cap \text{ג' בעד}) + P(\text{א' בעד} \cap \text{ב' נגד} \cap \text{ג' בעד}) + P(\text{א' נגד} \cap \text{ב' בעד} \cap \text{ג' בעד}) + P(\text{א' בעד} \cap \text{ב' בעד} \cap \text{ג' נגד})$$

$$\Downarrow$$

$$P(\text{לפחות 2 בעד}) = x \cdot x \cdot 0.5 + x \cdot (1-x) \cdot 0.5 + (1-x) \cdot x \cdot 0.5 + x \cdot x \cdot 0.5$$

$$\Downarrow$$

$$P(\text{לפחות 2 בעד}) = x$$

$$\Downarrow$$

$$P(\text{לפחות 2 בעד}) = P(\text{א' בעד})$$

/המשך בעמוד 7/

המשך תשובה לשאלה 3.

ב.

$$P(\text{א' בעד} / \text{לפחות 2 בעד}) = \frac{P(\text{ג' נגד} \cap \text{ב' בעד} \cap \text{א' בעד}) + P(\text{ג' בעד} \cap \text{ב' נגד} \cap \text{א' בעד}) + P(\text{ג' בעד} \cap \text{ב' בעד} \cap \text{א' בעד})}{P(\text{לפחות 2 בעד})}$$

$$\Downarrow$$

$$P(\text{א' בעד} / \text{לפחות 2 בעד}) = \frac{x \cdot x \cdot 0.5 + x(1-x) \cdot 0.5 + x \cdot x \cdot 0.5}{x} > 0.8$$

$$\Downarrow$$

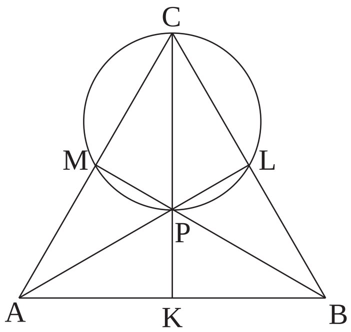
$$x > 0.6$$

סה"כ: $0.6 < x \leq 1$

/המשך בעמוד 8/

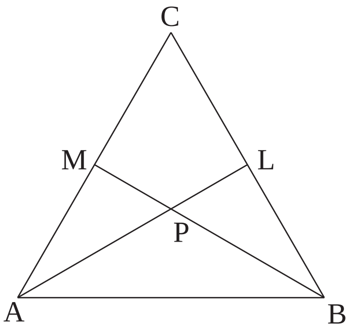
שאלה 4

א. הוכח כי אם במשולש שני תיכונים שווים זה לזה,
המשולש הוא שווה־שוקיים.



ב. במשולש ABC הנקודות L , M ו־ K הן
אמצעי הצלעות CB , CA ו־ AB בהתאמה.
הנקודה P היא נקודת מפגש של התיכונים
במשולש, ונתון שהיא נמצאת על מעגל העובר
דרך הנקודות L , M ו־ C (ראה ציור).
נתון גם כי $AL = BM$.
(1) הוכח כי $BM \perp AC$.
(2) הוכח כי $AK = AM$.

תשובה לשאלה 4



א. נתון: $AM = \frac{1}{2}AC \quad , \quad BL = \frac{1}{2}BC \quad , \quad AL = BM$

צ"ל: $AC = BC$

<u>הוכחה</u>

נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 1:2 $\begin{cases} AP = \frac{2}{3}AL \quad , \quad BP = \frac{2}{3}BM \\ PL = \frac{1}{3}AL \quad , \quad PM = \frac{1}{3}BM \end{cases}$

לפי הנתון: $AL = BM$

לכן: $AP = BP \quad , \quad PL = PM$

$\sphericalangle APM = \sphericalangle BPL$ זוויות קדקודיות שוות זו לזו

לכן: $\Delta APM \cong \Delta BPL$ על פי צ.ז.צ

$\Downarrow$

$AM = BL$ במשולשים חופפים מול זוויות שוות צלעות שוות

לפי הנתון: $AM = \frac{1}{2}AC \quad , \quad BL = \frac{1}{2}BC$

$\Downarrow$

$AC = BC$

/המשך בעמוד 9/

המשך תשובה לשאלה 4.

ב.(1) דרך I

$AC = BC$	על פי סעיף א אם התיכונים שווים, אז המשולש הוא שווה־שוקיים
$\Downarrow$	
$MC = LC$	M ו־ L אמצעי השוקיים במשולש שווה־שוקיים
CK תיכון לבסיס במשולש שווה־שוקיים	K אמצע BC
$\Downarrow$	
CK חוצה $\sphericalangle ACB$	
$\Downarrow$	
CP גובה ותיכון במשולש שווה־שוקיים CML	
$\Downarrow$	
CP קוטר במעגל החוסם ΔCML	מרכז מעגל חוסם נמצא על אנך אמצעי במשולש
$\Downarrow$	
$PM \perp MC$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא 90^o

דרך II

$AC = BC$	אם התיכונים שווים, אז המשולש הוא שווה־שוקיים
$\Downarrow$	
$MC = LC$	M ו־ L אמצעי השוקיים במשולש שווה־שוקיים
$PL = PM$	הראנו בסעיף א
CP צלע משותפת	
$\Downarrow$	
$\triangle CMP \cong \triangle CLP$	על פי צ. צ. צ.
$\Downarrow$	
I. $\sphericalangle CMP = \sphericalangle CLP$	במשולשים חופפים מול צלעות שוות זוויות שוות
II. $\sphericalangle CMP + \sphericalangle CLP = 180^o$	סכום זוויות נגדיות במרובע החסום במעגל הוא 180^o

מ־ I ו־ II מקבלים: $\sphericalangle CMP = 90^o$

/המשך בעמוד 10/

המשך תשובה לשאלה 4.

(2) לפי ב (1): BM תיכון וגובה לצלע AC

$\Downarrow$

$AB = BC$ אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה־שוקיים

לפי ב (1): $AC = BC$

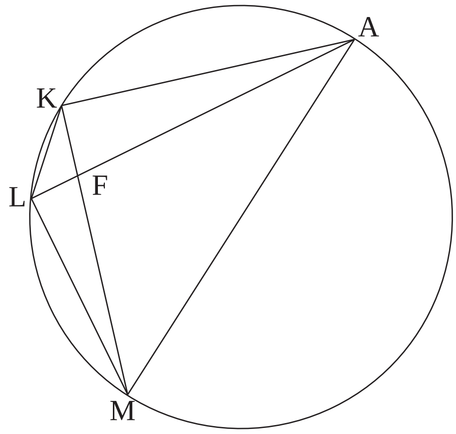
לכן: $AC = AB$

לפי הנתון: $AM = \frac{1}{2}AC \quad , \quad AK = \frac{1}{2}AB$

לכן: $AK = AM$

/המשך בעמוד 11/

שאלה 5



מרובע AKLM חסום במעגל. AM הוא קוטר.

אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה F

(ראה ציור).

נתון: $ML = 30$ ס"מ , $FL = a$ ס"מ

שטח המשולש ALK קטן פי 3

משטח המשולש ALM.

א. מצא את אורך הגובה לצלע LA

במשולש ALK .

ב. הבע באמצעות a את אורך הקטע KF .

ג. הוכח כי $\Delta AFM \sim \Delta KFL$.

ד. נתון גם: $AF = 42.5$ ס"מ , $ML > a$.

מצא את a .

תשובה לשאלה 5

א. $\sphericalangle ALM = 90^o$ זווית היקפית הנשענת על קוטר

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta ALM} = \frac{1}{2} \cdot AL \cdot 30$$

על פי הנתון: $$S_{\Delta ALK} = \frac{1}{3} S_{\Delta ALM}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot h \cdot AL = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AL \cdot 30$$ (h — גובה לצלע LA)

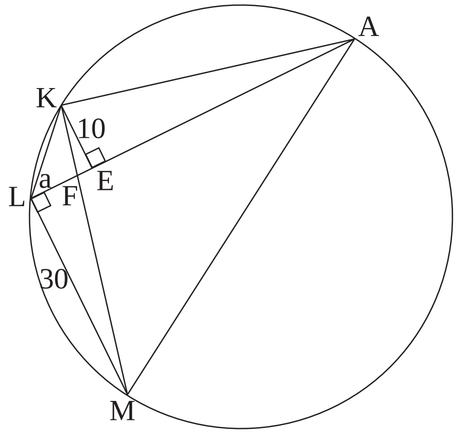
$$\Downarrow$$

$h = 10$ ס"מ

/המשך בעמוד 12/

המשך תשובה לשאלה 5.

ב.



$\sphericalangle LFM = \sphericalangle EFK$ זוויות קדקודיות שוות זו לזו

$\sphericalangle KEF = \sphericalangle MLF = 90^o$

$\Downarrow$

$\Delta LFM \sim \Delta EFK$ על פי ז.ז.

$\Downarrow$

$$\frac{10}{FE} = \frac{30}{a} \quad \Rightarrow \quad FE = \frac{a}{3}$$

לפי פיתגורס במשולש EFK: $KF = \sqrt{(\frac{a}{3})^2 + 10^2} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + 900}$

ג. $\sphericalangle LFK = \sphericalangle MFA$ זוויות קדקודיות שוות זו לזו

$\sphericalangle LKF = \sphericalangle FAM$ זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת

$\Downarrow$

$\Delta LFK \sim \Delta MFA$ על פי ז.ז.

ד. מהדמיון שבסעיף ג מקבלים: I. $\frac{KF}{a} = \frac{AF}{FM}$

לפי סעיף ב: II. $KF = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + 900}$

לפי פיתגורס במשולש LFM: III. $FM = \sqrt{a^2 + 30^2}$

לפי הנתון: IV. $AF =$ 42.5 ס"מ

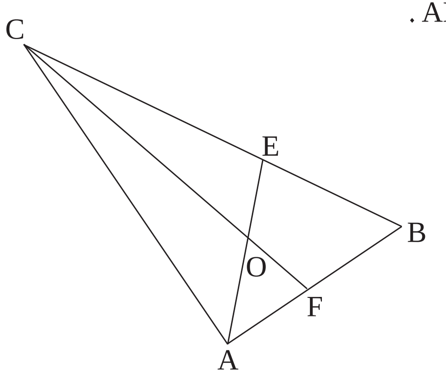
מ־ I, II, III ו־ IV מקבלים: $a^2 - 127.5a + 900 = 0$

$\Downarrow$

$a =$ 7.5 ס"מ

/המשך בעמוד 13/

שאלה 6



הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC .

המשך AO חותך את הצלע BC בנקודה E .

המשך CO חותך את הצלע AB בנקודה F

(ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

א. הבע באמצעות α ו־ β את היחס $\frac{AE}{CF}$.

ב. נתון גם: $\frac{AE}{CF} = \frac{1}{2}$, $\beta = 60^o$.

הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB שווה ל־ $\frac{1}{2}BC$.

תשובה לשאלה 6

א. $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BAE = \frac{\alpha}{2}$

מרכז מעגל החסום במשולש נמצא על חוצה זווית

$\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCF = 90^o - \frac{\alpha+\beta}{2}$

לפי משפט הסינוסים

במשולש CAE :

$$\frac{CA}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)} = \frac{AE}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \Rightarrow \quad AE = \frac{CA\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}$$

לפי משפט הסינוסים

במשולש CFA:

$$\frac{CF}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin(\beta+90^o-\frac{\alpha+\beta}{2})} \quad \Rightarrow \quad CF = \frac{CA\sin\alpha}{\sin(90^o+\frac{\beta-\alpha}{2})}$$

מכאן:

$$\frac{AE}{CF} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)} \cdot \frac{\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}{\sin\alpha}$$

/המשך בעמוד 14/

המשך תשובה לשאלה 6.

ב. לפי הנתונים:

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin(\alpha+60^{o})\cdot\cos(30^{o}-\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2}+60^{o})\cdot\sin\alpha}$$

$$\Downarrow$$

מאחר ש־ $\sin(\frac{\alpha}{2}+60^{o})=\cos\left[90^{o}-\left(\frac{\alpha}{2}+60^{o}\right)\right]$:

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin(\alpha+60^{o})\cdot\cos(30^{o}-\frac{\alpha}{2})}{\cos(30^{o}-\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin(\alpha+60^{o})}{\sin\alpha}$$

לאחר פתיחת $\sin(\alpha+60^{o})$

$$\Downarrow$$

מקבלים:

$$\sin\alpha=2\sin60^{o}\cos\alpha+2\cos60^{o}\sin\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha=0\qquad\Rightarrow\qquad\alpha=90^{o}$$

$$\Downarrow$$

BC קוטר במעגל החוסם את המשולש ABC

$$\Downarrow$$

רדיוס $=\frac{1}{2}BC$

/המשך בעמוד 15/

שאלה 7

נתונה הפונקציה $g(x) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$ בתחום $0 \le x \le \frac{7}{3}\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$.

ג. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה־ y .

(1) מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB .

(2) כמה קטעים כמו AB שאורכם מקסימלי מתקבלים בתחום הנתון? נמק.

תשובה לשאלה 7

א. נקודת חיתוך עם ציר ה־ y:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad g(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

נקודות חיתוך עם ציר ה־ x:

$$g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{3} - x = \pi k \quad (\text{k שלם})$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{2\pi}{3} - \pi k$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$(\frac{2\pi}{3}, 0) \quad , \quad (\frac{5\pi}{3}, 0)$$

/המשך בעמוד 16/

המשך תשובה לשאלה 7.

ב. $\sin(\frac{2\pi}{3}-x)=\sin x$

$\Downarrow$

לפי הנוסחה של הפרש סינוסים: $\sin(x-\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}=0$

$\sin(x-\frac{\pi}{3})=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{3}+\pi k$

$\Downarrow$

$x=\frac{\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{4\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{7\pi}{3}$

$\Downarrow$

שיעורים של נקודות החיתוך בין הפונקציות: $(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad , \quad (\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad , \quad (\frac{7\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$

ג. (1) $AB=d(x)=|f(x)-g(x)|$

עבור $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{4\pi}{3}$: $AB=d(x)=\sin x-\sin(\frac{2\pi}{3}-x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$

$d'(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$

$d'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \cos(x-\frac{\pi}{3})=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5\pi}{6}+\pi k \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5\pi}{6}$

בדיקת מקסימום: $d''(x)=-\sin(x-\frac{\pi}{3}) \quad \Rightarrow \quad d''(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})<0$

עבור $\frac{4\pi}{3}\le x\le\frac{7\pi}{3}$ או עבור $0\le x\le\frac{\pi}{3}$: $AB=d(x)=\sin(\frac{2\pi}{3}-x)-\sin x=\sin(\frac{\pi}{3}-x)$

$d'(x)=-\cos(\frac{\pi}{3}-x)$

$d'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{11\pi}{6}$

בדיקת מקסימום: $d''(x)=-\sin(\frac{\pi}{3}-x) \quad \Rightarrow \quad d''(\frac{\pi}{3}-\frac{11\pi}{6})<0$

האורך המקסימלי של הקטע AB: $\left|d(\frac{5\pi}{6})\right|=\left|d(\frac{11\pi}{6})\right|=1$

(בקצה שבו $x=0$ מקבלים כי $AB=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$, ובקצוות האחרים מקבלים כי $AB=0$.)

(2) על פי תת־סעיף ג (1), יש שני קטעים כאלה, עבור $x=\frac{5\pi}{6}$ ועבור $x=\frac{11\pi}{6}$.

/המשך בעמוד 17/

שאלה 8

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^2 + 4x + b$

$g(x) = -x^2 + c$

b ו־ c הם פרמטרים גדולים מ־ 0.

לגרפים של שתי הפונקציות יש משיק משותף בנקודה משותפת P .

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה P .

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי $b > 4$.

הישר $x = a$ חותך את המשיק המשותף בנקודה D , את הגרף של $f(x)$ בנקודה A

ואת הגרף של $g(x)$ בנקודה B ‏(A , D ו־ B הן שלוש נקודות שונות).

ג. הראה כי הישר PD הוא תיכון במשולש PAB .

ד. השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי המשיק המשותף

ועל ידי הישרים $x = a$ ו־ $x = -a$, הוא S .

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הגרף של $g(x)$

ועל ידי הישרים $x = a$ ו־ $x = -a$.

תשובה לשאלה 8

א. לפונקציות משיק משותף

בנקודה P , לכן: $f'(x) = g'(x)$

$$\Downarrow$$

$$2x + 4 = -2x$$

$$\Downarrow$$

שיעור ה־ x של הנקודה P: $x = -1$

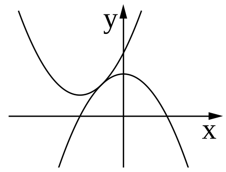
שיעור ה־ y של הנקודה P: $f(-1) = b - 3$

נקודת ההשקה: $P(-1 , b-3)$

/המשך בעמוד 18/

המשך תשובה לשאלה 8.

ב.



(ל־ $f(x)$ נקודת מינימום ב־ $(-2\ ,\ b-4)$ כלומר שיעור ה־ y של נקודת המינימום הוא חיובי.

ל־ $g(x)$ נקודת מקסימום ב־ $x=0$. שיעור ה־ x של נקודת ההשקה הוא -1 .)

ג. שיפוע המשיק בנקודה $P(-1\ ,\ b-3)$: $f'(-1)=g'(-1)=2$

לכן משוואת המשיק בנקודה P: $y=2x+b-1$

$\Downarrow$

שיעור ה־ y של הנקודה D: $y_D=2a+b-1$

שיעור ה־ y של הנקודה A: $y_A=f(a)=a^2+4a+b$

$f(-1)=g(-1)$

$\Downarrow$

ערך הפרמטר c: $c=b-2$

$\Downarrow$

שיעור ה־ y של הנקודה B : $y_B=g(a)=-a^2+b-2$

$AD=y_A-y_D=a^2+2a+1$

$DB=y_D-y_B=a^2+2a+1$

$\Downarrow$

$AD=BD$

לכן PD הוא תיכון במשולש PAB .

ד.

I. $S=\int_{-a}^{a}[f(x)-(2x+b-1)]\,dx=\int_{-a}^{a}(x^2+2x+1)\,dx$

השטח המבוקש:

II. $S_{\text{מבוקש}}=\int_{-a}^{a}[f(x)-g(x)]\,dx=2\cdot\int_{-a}^{a}(x^2+2x+1)\,dx$

מ־ I ו־ II מקבלים: $S_{\text{מבוקש}}=2\cdot S$

/המשך בעמוד 19/

שאלה 9

נתון כי הפונקציה הזוגית $f(x) = \sqrt{8 - ax + bx^2} + c$ מוגדרת

בתחום $-2 \le x \le 2$ בלבד.

a, b ו־ c הם פרמטרים, $c > 0$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a ואת הערך של הפרמטר b.

הצב את הערך של a ואת הערך של b, וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$,

ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\sqrt{2}$.

השטח המוגבל על ידי שני המשיקים ועל ידי ציר ה־ x הוא $\frac{49\sqrt{2}}{2}$.

מצא את הערך של הפרמטר c.

ג. בתחום $-2 \le x \le 2$ נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = -f(x)$.

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$,

ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\sqrt{2}$.

מהו סוג המרובע שנוצר על ידי שני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$

ושני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

תשובה לשאלה 9

א.

מתחום ההגדרה נובע: $8 - ax + bx^2 \ge 0$ רק עבור $-2 \le x \le 2$

לכן: $8 - a \cdot 2 + b \cdot 2^2 = 0$ I.

$8 + a \cdot 2 + b \cdot 2^2 = 0$ II.

מ־ I ומ־ II מקבלים: $a = 0$, $b = -2$

/המשך בעמוד 20/

המשך תשובה לשאלה 9.

ב.

$$f(x) = \sqrt{8-2x^2} + c$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{8-2x^2}}$$

$$\Downarrow$$

שיפועי המשיקים: $f'(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \quad , \qquad f'(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

שיעורי ה־ y של נקודות ההשקה: $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 2 + c$

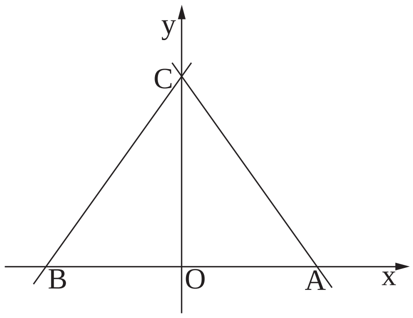
משוואת המשיק בנקודה $A(\sqrt{2}\ , 2+c)$: $y = -\sqrt{2}x + 4 + c$

חיתוך המשיק בנקודה A עם ציר ה־ x: $x = \frac{4+c}{\sqrt{2}}$

משוואת המשיק בנקודה $B(-\sqrt{2}\ , 2+c)$: $y = \sqrt{2}x + 4 + c$

חיתוך המשיק בנקודה B עם ציר ה־ x : $x = -\frac{4+c}{\sqrt{2}}$

שיעורי נקודת הפגישה C
(ראה ציור) של המשיקים: $(0\ , 4+c)$



שטח המשולש ABC עבור $c > 0$
(ראה ציור) הוא:

$$S = \frac{1}{2} y_C \cdot AB$$

$$\Downarrow$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot (4+c) \cdot \left(\frac{4+c}{\sqrt{2}} + \frac{4+c}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(4+c)^2}{\sqrt{2}} = \frac{49\sqrt{2}}{2} \quad , \ c > 0$$

$$\Downarrow$$

$$c = 3$$

/המשך בעמוד 21/

המשך תשובה לשאלה 9.

ג.

$$g(x) = -f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$g'(x) = -f'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$g'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$g'(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

לכן המשיק ל־ $g(x)$ בנקודה $x = \sqrt{2}$ מקביל למשיק ל־ $f(x)$ בנקודה $x = -\sqrt{2}$,

והמשיק ל־ $g(x)$ בנקודה $x = -\sqrt{2}$ מקביל למשיק ל־ $f(x)$ בנקודה $x = \sqrt{2}$,

לכן המשיקים יוצרים מקבילית.

עקב הסימטריה המשיקים נפגשים בנקודות A ו־ B (ראה ציור).

לפי השיעורים של A , B ו־ C שמצאנו בסעיף ב, אורכי הצלעות הסמוכות שווים, CB = CA , והמקבילית היא מעוין.