

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מ ת מ ט י ק ה

4 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים:

פרק ראשון	—	סדרות, טריגונומטריה במרחב	—	$33\frac{1}{3} \times 1$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות	—	$33\frac{1}{3} \times 2$	—	$66\frac{2}{3}$ נקודות
ופונקציות חזקה				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, ב כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את ב פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
- חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
- שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

האיבר הראשון של הסדרה הוא 2.5 .

האיבר במקום ה-33 בסדרה גדול ב-80 מהאיבר במקום ה-17 בסדרה.

מהסדרה הנתונה לקחו כל איבר שלישי כך שהתקבלה סדרה חשבונית חדשה:

$$a_3, a_6, a_9, \dots, a_n$$

א. מצא את הפרש הסדרה החדשה.

ב. סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 3100 .

(1) מצא את מספר האיברים בסדרה החדשה.

(2) מהו מספר האיברים בסדרה המקורית? נמק.

תשובה לשאלה 1

$$a_{33} = a_{17} + 80 \quad \text{א. לפי הנתון:}$$

$$\Downarrow$$

$$(d \text{ הוא הפרש הסדרה הנתונה}) \quad a_1 + 32d = a_1 + 16d + 80$$

$$\Downarrow$$

$$d = 5$$

$$d_{\text{חדשה}} = a_6 - a_3 = a_1 + 5d - (a_1 + 2d) = 3d \quad \text{הפרש הסדרה החדשה:}$$

$$\Downarrow$$

$$d_{\text{חדשה}} = 15$$

המשך תשובה לשאלה 1.

ב. (1) לפי הנתון: $a_1 = 2.5$, לפי סעיף א: $d = 5$

$\Downarrow$

$$a_3 = 2.5 + 5 \cdot 2 = 12.5$$

$$S_{\text{חדשה}} = \frac{N}{2} (2 \cdot a_3 + d_{\text{חדשה}} (N - 1))$$

$\Downarrow$

$$3100 = \frac{N}{2} (2 \cdot 12.5 + 15 (N - 1))$$

$\Downarrow$

$$N = 20$$

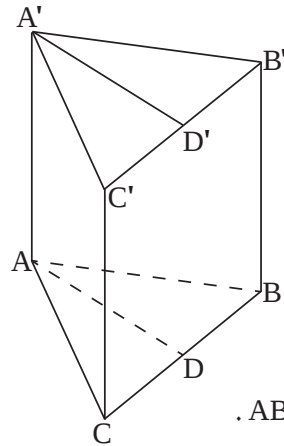
(2) מספר האיברים בסדרה המקורית גדול פי 3

ממספר האיברים בסדרה החדשה,

לכן מספר האיברים בסדרה המקורית הוא: $n = 3 \cdot 20 = 60$

/המשך בעמוד 4/

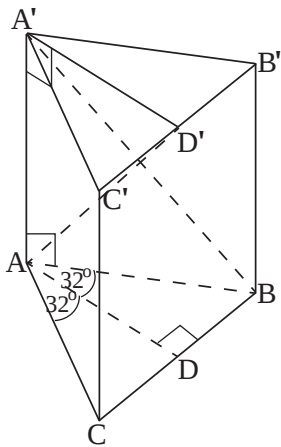
שאלה 2



במנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ הבסיסים הם משולשים שוויושוקיים ($AB = AC$).
 AD הוא גובה לצלע BC ,
 ו- $A'D'$ הוא גובה לצלע $B'C'$ (ראה ציור).
 נתון: $\angle BAC = 64^\circ$, $BC = 26$ ס"מ,
 נפח המנסרה הוא 8112 סמ"ק.

- א. חשב את גובה המנסרה.
 ב. חשב את הזווית שבין האלכסון $A'B$ ובין בסיס המנסרה ABC .
 ג. חשב את $\angle A'AD'$.

תשובה לשאלה 2



א. לפי הנתון: $\angle BAC = 64^\circ$, $BC = 26$ ס"מ, $AB = AC$, $AD \perp BC$

$\Downarrow$

$$CD = DB = 13 \text{ ס"מ}, \quad \angle CAD = \angle BAD = 32^\circ$$

$\Downarrow$

$$AD = \frac{13}{\tan 32^\circ} = 20.8 \text{ ס"מ}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 20.8 \cdot 26 = 270.4 \text{ סמ"ר}$$

$$V_{\text{מנסרה}} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = 8112 \text{ סמ"ק}$$

$\Downarrow$

$$AA' = 30 \text{ ס"מ}$$

ב. AA' מאונך למישור הבסיס ABC , לכן הזווית המבוקשת היא $\angle ABA'$.

$$\tan \angle ABA' = \frac{AA'}{AB}, \quad \sin 32^\circ = \frac{13}{AB}$$

$\Downarrow$

$$\tan \angle ABA' = \frac{30}{\frac{13}{\sin 32^\circ}}$$

$\Downarrow$

$$\angle ABA' = 50.73^\circ$$

המשך תשובה לשאלה 2.

ג. במשולש $A'D'$ שבו

$$\angle AA'D' = 90^\circ, \text{ מתקיים: } \operatorname{tg} \angle A'D'A = \frac{A'D'}{AA'}$$

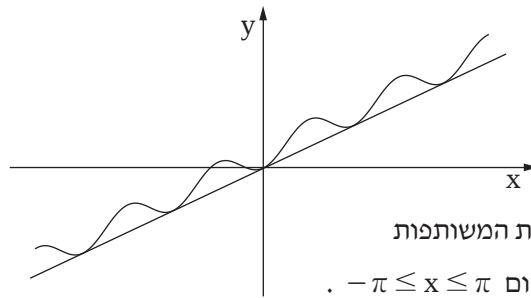
$$AA' = 30 \text{ ס"מ}, \quad A'D' = AD = 20.8 \text{ ס"מ} \quad \text{לפי סעיף א:}$$

$$\operatorname{tg} \angle A'D'A = \frac{20.8}{30} \quad \text{לכן:}$$

$\Downarrow$

$$\angle A'D'A = 34.73^\circ$$

שאלה 3



נתונה הפונקציה

$$f(x) = 0.5x - 0.5 \cos(2x) + 0.5$$

ונתון הישר $y = 0.5x$

(ראה ציור).

א. (1) מצא את שיעורי ה־ x של הנקודות המשותפותלישר ולגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.(2) הראה כי הישר משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות שמצאת בתת־סעיף א (1).ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הישר $y = 0.5x$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

תשובה לשאלה 3

א. (1) בנקודה המשותפת מתקיים:

$$f(x) = y$$

$$\Downarrow$$

$$0.5x - 0.5 \cos(2x) + 0.5 = 0.5x$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos(2x) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$2x = 2\pi k$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pi k$$

בתחום הנתון: $k = 0 \Rightarrow x = 0$ $k = \pm 1 \Rightarrow x = \pm \pi$ (2) הנגזרת של $f(x)$ היא: $f'(x) = 0.5 + \sin(2x)$ שיפוע ישר המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 0$ הוא: $f'(0) = 0.5$ שיפוע ישר המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = -\pi$ הוא: $f'(\pi) = 0.5$ שיפוע ישר המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$ הוא: $f'(-\pi) = 0.5$ השיפועים זהים לשיפוע הישר $y = 0.5x$, לכן הישר משיק לפונקציה בנקודות שמצאנו.ב. $f(x) \geq 0.5x$ לכל x , לכן: $S = \int_{-\pi}^{\pi} (0.5x - 0.5 \cos(2x) + 0.5 - 0.5x) dx$

$$\Downarrow$$

$$S = \left[0.5x - \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$S = \pi$$

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^2 e^{-\frac{x^2}{m}}$, m הוא פרמטר שונה מ-0.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון ששיעור ה- x שלה הוא -2.

מצא את הערך של הפרמטר m .

הצב $m = 4$, וענה על הסעיפים שלפניך.

ג. (1) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. לפי גרף הפונקציה $f(x)$ סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$

בתחום $-2 \leq x \leq 2$.

תשובה לשאלה 4

א. הפונקציה מוגדרת לכל x .

$$f'(x) = 4xe^{-\frac{x^2}{m}} + 2x^2 \cdot \frac{(-2x)}{m} \cdot e^{-\frac{x^2}{m}} = 4xe^{-\frac{x^2}{m}} \left(1 - \frac{x^2}{m}\right) \quad \text{ב.}$$

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow 0 = -8e^{-\frac{4}{m}} \left(1 - \frac{4}{m}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 = 1 - \frac{4}{m}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$m = 4$$

המשך תשובה לשאלה 4.

$$f(x) = 2x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} \quad (1) \quad ג.$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$f'(x) = 4xe^{-\frac{x^2}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad 1 - \frac{x^2}{4} = 0 \quad (2)$$

$$\Updownarrow$$

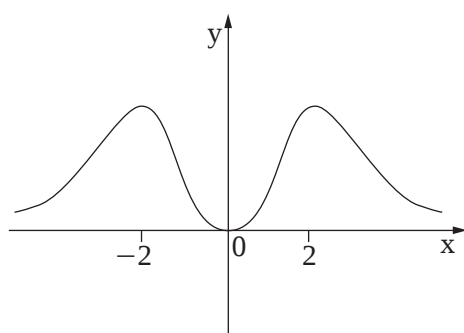
$$x = \pm 2$$

נקודות חשודות: $(-2, \frac{8}{e})$, $(0, 0)$, $(2, \frac{8}{e})$

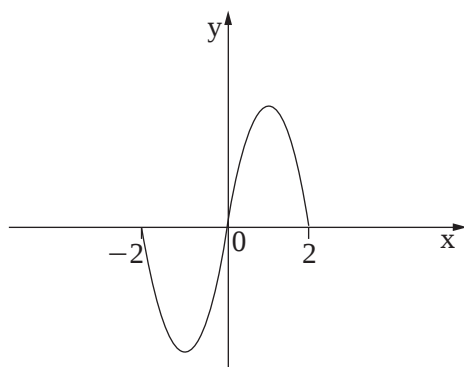
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

מקסימום ב': $(2, \frac{8}{e})$, $(-2, \frac{8}{e})$

מינימום ב': $(0, 0)$

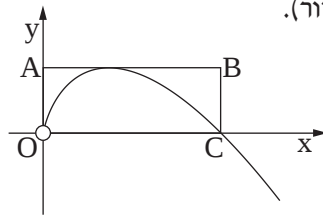


(3)



ד.

שאלה 5



א. נתונה הפונקציה $f(x) = -x \ln(2x)$, $x > 0$ (ראה ציור).

דרך נקודת הקיצון של הפונקציה

העבירו משיק המקביל לציר ה- x ,

ודרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x

העבירו ישר המקביל לציר ה- y .

הישרים יוצרים עם הצירים מלבן ABCO, כמתואר בציור (O – ראשית הצירים).

מצא את שטח המלבן ABCO.

בתשובתך תוכל להשאיר e.

ב. לחוקר יש היום כמות מסוימת של חומר רדיואקטיבי. הכמות קטנה בצורה מעריכית.

בעוד 10 שנים תרד ב-20% כמות החומר שיש לחוקר היום.

מצא בעוד כמה שנים מהיום תרד ב-40% כמות החומר.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

תשובה לשאלה 5

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) = 0, \quad (x > 0) \quad \text{א.}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{1}{2}$$

שיעור ה- x של C:

$$\Downarrow$$

$$OC = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\ln(2x) - x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = -\ln(2x) - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln 2x + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{1}{2e}$$

שיעור ה- x של נקודת הקיצון:

$$f\left(\frac{1}{2e}\right) = -\frac{1}{2e} \ln \frac{2}{2e} = \frac{1}{2e}$$

שיעור ה- y של נקודת הקיצון:

$$\Downarrow$$

$$OA = \frac{1}{2e}$$

$$S_{\text{מלבן}} = OC \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2e}$$

שטח המלבן ABCO:

$$\Downarrow$$

$$S_{\text{מלבן}} = \frac{1}{4e}$$

המשך תשובה לשאלה 5.

$$M_t = M_0 \cdot q^t \quad \text{ב.}$$

$$M_0 \cdot 0.8 = M_0 \cdot q^{10} \quad \text{בעוד 10 שנים:}$$

$\Downarrow$

$$q = 0.8^{\frac{1}{10}}$$

$$M_0 \cdot 0.6 = M_0 \cdot q^x \quad \text{כאשר הכמות תרד ב־ 40% :}$$

$\Downarrow$

$$0.6 = 0.8^{\frac{x}{10}}$$

$\Downarrow$

$$\ln 0.6 = \frac{x}{10} \ln 0.8$$

$\Downarrow$

$$x = 22.89 \text{ שנים}$$