

## הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

### מתמטיקה

#### 4 יחידות לימוד – שאלון ראשון

##### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית,

הסתברות –  $16 \frac{2}{3} \times 2$  –  $33 \frac{1}{3}$  נקודות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה

במישור –  $16 \frac{2}{3} \times 2$  –  $33 \frac{1}{3}$  נקודות

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי –  $16 \frac{2}{3} \times 2$  –  $33 \frac{1}{3}$  נקודות  
סה"כ – 100 – נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

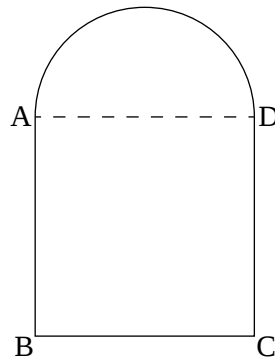
(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשיגים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

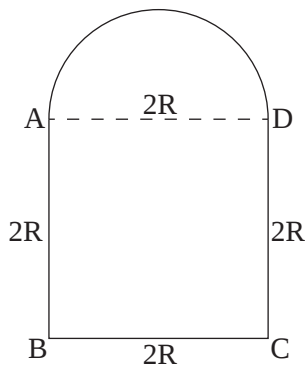
ב ה צ ל ח ה !

## שאלה 1



חלון מורכב מחצי עיגול ומריבוע ABCD.  
 צלע הריבוע AD היא קוטר של חצי העיגול,  
 כמתואר בציור.  
 שטח הריבוע גדול ב- 0.2187 מ"ר  
 משטח חצי העיגול.  
 מצא את ההיקף של המסגרת החיצונית  
 של החלון.  
 בחישוביך השתמש ב-  $\pi = 3.14$ .

## תשובה לשאלה 1



נסמן:  $AD = 2R$  (ראה ציור)

$$\frac{1}{2}\pi R^2$$

שטח חצי העיגול שרדיוסו R :

$$4R^2$$

שטח הריבוע ADCB :

$$4R^2 = \frac{1}{2}\pi R^2 + 0.2187$$

לכן לפי הנתון:



$$R = 0.3 \text{ מטר}$$

$R > 0$ , לכן:

$$\pi \times 0.3$$

היקף חצי העיגול שרדיוסו R :

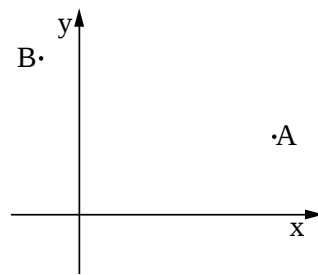
$$3 \times 2 \cdot 0.3$$

היקף שלוש צלעות הריבוע ADCB :

$$\pi \times 0.3 + 3 \times 2 \cdot 0.3 = 2.742 \text{ מטר}$$

היקף המסגרת:

## שאלה 2



נתונות הנקודות  $A(10, 4)$  ו-  $B(-2, 8)$  (ראה ציור).

נקודה  $P$  נמצאת על ציר ה- $x$  כך שמרחקה

מנקודה  $A$  שווה למרחקה מנקודה  $B$ .

א. מצא את השיעורים של הנקודה  $P$ .

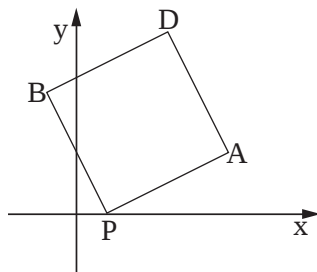
הנקודות  $A, B$  ו-  $P$  הן קדקודים של המרובע  $ADBP$ .

נתון:  $BD \parallel PA$ ,  $BP \parallel AD$ .

ב. מצא את השיעורים של הקדקוד  $D$ .

ג. מצא את אורך הרדיוס של המעגל החוסם את המשולש  $BDA$ . נמק.

## תשובה לשאלה 2



א. לפי הנתון:  $PA = PB$ ,  $P(x_P, 0)$ ,  $B(-2, 8)$ ,  $A(10, 4)$

$\Downarrow$

$$(10 - x_P)^2 + 4^2 = (-2 - x_P)^2 + 8^2$$

$\Downarrow$

$$x_P = 2 \Rightarrow P(2, 0)$$

ב. במקבילית האלכסונים זה את זה,

לכן השיעורים של מפגש האלכסונים הם:

$$x = \frac{10 - 2}{2} = 4$$

$$y = \frac{4 + 8}{2} = 6$$

$$\frac{x_P + x_D}{2} = 4 = \frac{2 + x_D}{2}$$

מכאן:

$\Downarrow$

$$x_D = 6$$

$$\frac{y_P + y_D}{2} = 6 = \frac{0 + y_D}{2}$$

$\Downarrow$

$$y_D = 12$$

$$D(6, 12)$$

שיעורי הנקודה  $D$ :

## המשך תשובה לשאלה 2.

$$\frac{12-8}{6+2} = \frac{1}{2} \quad \text{ג. שיפוע BD הוא:}$$

$$\frac{12-4}{6-10} = -2 \quad \text{שיפוע AD הוא:}$$

$$BD \perp AD \quad \text{מכפלת השיפועים שווה ל-1, לכן:}$$

$\Downarrow$

BA הוא קוטר, כי זווית היקפית של  $90^\circ$  נשענת עליו.

$\Downarrow$

$$\text{רדיוס} = \frac{1}{2}BA = \frac{1}{2}\sqrt{(10+2)^2 + (4-8)^2}$$

$\Downarrow$

$$\text{רדיוס} = 2\sqrt{10}$$

/המשך בעמוד 5/

## שאלה 3

חקלאי מייצא פרחים לבנים ופרחים אדומים. במחסן של החקלאי:

$\frac{1}{12}$  מהפרחים הלבנים הם ורדים.

$\frac{2}{3}$  מהפרחים האדומים הם ורדים.

25% מכלל הפרחים הם ורדים, והשאר הם חבצלות.

א. בוחרים באקראי פרח מבין הפרחים שבמחסן.

(1) מהי ההסתברות שהפרח הוא אדום?

(2) מהי ההסתברות שהפרח הוא אדום אם ידוע שהוא ורד?

ב. נתון שמספר הוורדים האדומים במחסן הוא 300.

מהו מספר הפרחים במחסן?

## תשובה לשאלה 3

נסמן: A — פרחים אדומים

B — פרחים שהם ורדים

א. (1) לפי הנתון:  $P(B) = 0.25$ ,  $P(B/A) = \frac{2}{3}$ ,  $P(B/\bar{A}) = \frac{1}{12}$ ,

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$P(B \cap \bar{A}) = \frac{1}{12}P(\bar{A}), \quad P(B \cap A) = \frac{2}{3}P(A)$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = \frac{2}{3}P(A) + \frac{1}{12}(1 - P(A))$$

$\Downarrow$

$$0.25 = \frac{2}{3}P(A) + \frac{1}{12}(1 - P(A))$$

$\Downarrow$

$$P(A) = \frac{2}{7}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}}{0.25} = \frac{16}{21} \quad (2)$$

ב. נסמן: N — מספר הפרחים במחסן

$$P(A \cap B) = \frac{300}{N}$$

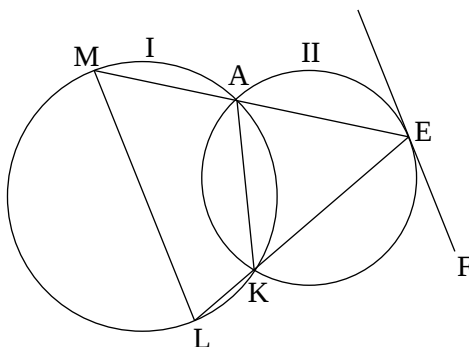
$\Downarrow$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{300}{N}$$

$\Downarrow$

$$N = 1575$$

#### שאלה 4



מרובע AKLM חסום במעגל I.  
דרך קדקודים A ו-K העבירו מעגל II.  
המשכי הצלעות MA ו-LK נפגשים בנקודה E  
שעל המעגל II.  
הישר FE משיק למעגל II בנקודה E  
(ראה ציור).

א. הוכח כי הישר FE מקביל למיתר LM.

ב. הוכח כי  $\triangle AEK \sim \triangle LEM$ .

ג. נתון:  $AE = 6$  ס"מ,  $KE = 7$  ס"מ,  $KL = 2$  ס"מ.

(1) חשב את היחס בין שטח המשולש AEK לשטח המשולש LEM.

(2) חשב את היחס בין שטח המשולש AEK לשטח המרובע AKLM.

#### תשובה לשאלה 4

זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית  
הנשענת על מיתר זה מצדו השני.

$$\angle FEK = \angle EAK = \alpha$$

א.

זוויות צמודות משלימות ל- $180^\circ$ .

$$\angle MAK = 180^\circ - \alpha$$

$\Downarrow$

סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא  $180^\circ$ .

$$\angle MLK = \alpha$$

$\Downarrow$

$$\angle MLK = \angle FEK$$

$\Downarrow$

זוויות מתחלפות שוות, אז הישרים מקבילים.

$$LM \parallel FE$$

$$\angle EAK = \angle ELM = \alpha$$

ב. לפי סעיף א:

$$\angle E \text{ משותפת}$$

על פי ז.ז.

$$\triangle AEK \sim \triangle LEM$$

לכן:

המשך תשובה לשאלה 4.

ג. (1)  $\frac{S_{\triangle AEK}}{S_{\triangle LEM}} = \left(\frac{AE}{LE}\right)^2$

במשולשים דומים יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

לפי הנתון:  $AE = 6$  ס"מ,  $KL = 2$  ס"מ,  $KE = 7$  ס"מ

$LE = KL + KE$

מכאן:  $\frac{S_{\triangle AEK}}{S_{\triangle LEM}} = \left(\frac{6}{2+7}\right)^2 = \frac{4}{9}$

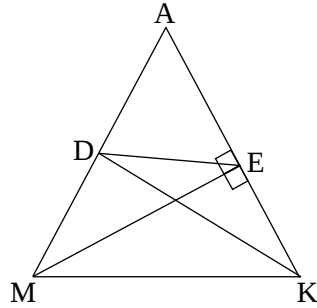
I.  $S_{\triangle LEM} = \frac{9}{4} S_{\triangle AEK}$  (2)

II.  $S_{\triangle AKLM} = S_{\triangle LEM} - S_{\triangle AEK}$

$S_{\triangle AKLM} = \frac{5}{4} S_{\triangle AEK}$  מ-I ומ-II מקבלים:

$\frac{S_{\triangle AEK}}{S_{\triangle AKLM}} = \frac{S_{\triangle AEK}}{\frac{5}{4} S_{\triangle AEK}} = \frac{4}{5}$

## שאלה 5



במשולש שווה-שוקיים  $AMK$  ( $AM = AK$ )

$KD$  הוא תיכון לשוק  $AM$ ,

ור  $ME$  הוא גובה לשוק  $AK$  (ראה ציור).

א. הוכח כי  $\angle DAE = \angle DEA$ .

נתון:  $\angle MAK = 2\alpha$ ,  $AM = 2b$ .

ב. הבע באמצעות  $b$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש  $ADE$ .

ג. אם נתון גם כי  $MK = 2 \cdot DE$ :

(1) חשב את  $\alpha$ .

(2) הוכח כי  $DE \parallel MK$ .

## תשובה לשאלה 5

במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה לחצי היתר.

מול צלעות שוות במשולש נמצאות זוויות שוות.

א. במשולש ישר-הזווית  $MEA$ :  $DE = \frac{1}{2}AM = AD$

$\Downarrow$

$\angle DAE = \angle DEA$

ב.  $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}AD \cdot ED \sin \angle ADE$

$\Downarrow$

$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \sin(180^\circ - 4\alpha)$

$\Downarrow$

$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}b^2 \sin(4\alpha)$

ג. (1) לפי הנתון:  $MK = 2DE$

$\Downarrow$

$MK = 2 \cdot b = AM$  ; לכן,  $DE = \frac{1}{2}AM$

$\Downarrow$

$MK = AM = AK$  ; לכן,  $AM = AK$

$\Downarrow$

$\triangle AMK$  הוא שווה-צלעות

$\Downarrow$

$2\alpha = 60^\circ$

$\Downarrow$

$\alpha = 30^\circ$

המשך תשובה לשאלה 5 סעיף ג.

$$\angle AMK = 60^\circ \quad (2) \quad \text{לפי תת-סעיף ג (1):}$$

$$\angle ADE = 180^\circ - 4\alpha = 60^\circ \quad \text{לפי סעיף ב:}$$

$\Downarrow$

$$\angle ADE = \angle AMK$$

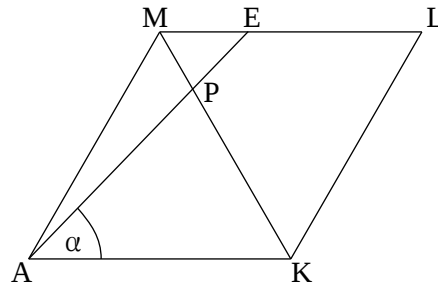
$\Downarrow$

$$DE \parallel MK$$

זוויות מתאימות שוות, אז הישרים מקבילים.

/המשך בעמוד 10/

## שאלה 6



נתון מעוין AMLK.

נקודה E נמצאת על הצלע ML.

האלכסון KM חותך את הקטע AE

בנקודה P (ראה ציור).

נתון:  $\angle EAK = \alpha$ ,  $\angle AML = 120^\circ$ ,

אורך צלע המעוין הוא a.

א. (1) מצא את גודל הזווית PKA. נמק.

(2) הבע באמצעות a ו- $\alpha$  את אורך הקטע PK.

ב. דרך הנקודה P העבירו אנך לצלע AK. האנך חותך את AK בנקודה G.

נתון גם כי  $\alpha = 46^\circ$ .

הבע באמצעות a את אורך הקטע GL.

## תשובה לשאלה 6

זוויות נגדיות במעוין שוות.

$$\angle LKA = \angle AML = 120^\circ$$

א. (1)



במעוין אלכסון חוצה זוויות נגדיות.

$$\angle PKA = 60^\circ$$

(2) על פי משפט הסינוסים,

במשולש PKA מתקיים:

$$\frac{PK}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ - (\alpha + 60^\circ))}$$



$$PK = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + 60^\circ)}$$

ב. הזוויות במשולש GPK הן:

$$90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$$



$$GK = \sin 30^\circ \cdot PK$$



$$GK = \frac{a \sin 46^\circ}{2 \sin(46^\circ + 60^\circ)}$$



$$GK = 0.374a$$

על פי משפט הקוסינוסים,

במשולש GLK מתקיים:

$$GL^2 = GK^2 + KL^2 - 2 \cdot GK \cdot KL \cdot \cos \angle AKL$$



$$GL^2 = 0.374^2 \cdot a^2 + a^2 - 2 \cdot 0.374 \cdot a^2 \cdot \cos 120^\circ$$

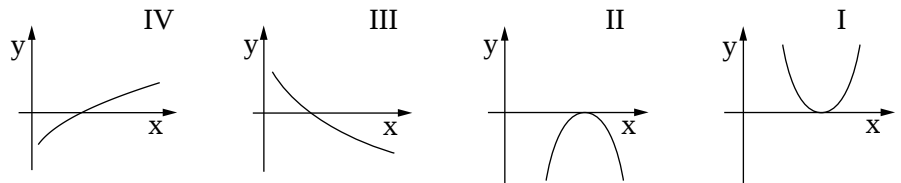


$$GL = 1.23a$$

## שאלה 7

נתונה הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{4x} - 6x$ .

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.  
 (3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.  
 ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ג. איזה גרף מבין הגרפים I, II, III, IV, עשוי לתאר את פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום  $1 \leq x \leq 10$ ? נמק.



## תשובה לשאלה 7

א. (1) צריך להתקיים:  $4x \geq 0$

$\Downarrow$

$x \geq 0$  תחום ההגדרה:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad (2)$$

$$y = 0 \Rightarrow x\sqrt{4x} - 6x = 0 = x(\sqrt{4x} - 6)$$

$\Downarrow$

$$x = 0, x = 9$$

נקודות חיתוך עם הצירים:  $(9, 0)$ ,  $(0, 0)$

## המשך תשובה לשאלה 7.

$$f(x) = x\sqrt{4x} - 6x \quad \text{א. (3)}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \sqrt{4x} + x \cdot \frac{4}{2\sqrt{4x}} - 6 = \frac{6x - 6\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x = 6\sqrt{4x}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = 4x$$

$$\Downarrow$$

תחום ההגדרה של  $f'(x)$  הוא  $x > 0$ , לכן:  $x = 4$

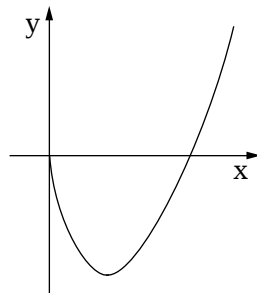
תחומי עלייה וירידה של  $f(x)$ :

|      |   |   |    |   |   |
|------|---|---|----|---|---|
| x    | 0 |   | 4  |   | 9 |
| f(x) | 0 | ↘ | -8 | ↗ | 0 |

נקודת מקסימום בקצה התחום:  $(0, 0)$

נקודת מינימום:  $(4, -8)$

ב.

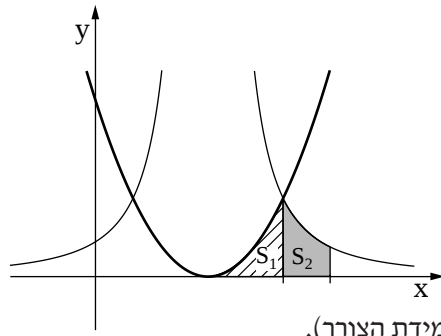


ג. לפונקציה  $f(x)$  יש מינימום ב-  $x = 4$ ,

לכן:  $f'(x) < 0$  עבור  $1 \leq x < 4$  ו-  $f'(x) > 0$  עבור  $x > 4$ .

מכאן שהגרף הוא: IV

## שאלה 8



בציור שלפניך מוצגים הגרפים

$$f(x) = (x-a)^2 \quad \text{של הפונקציות:}$$

$$g(x) = \frac{16}{(x-a)^2}$$

a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא את האסימפטוטות המקבילות

לצירים של הפונקציה g(x) (הבע באמצעות a במידת הצורך).

אחת מנקודות החיתוך בין הגרפים של הפונקציות היא הנקודה שבה  $x = a + 2$ .

$S_1$  הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה f(x), על ידי ציר ה-x

ועל ידי הישר  $x = a + 2$  (השטח המקווקו בציור).

$S_2$  הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה g(x), על ידי ציר ה-x

ועל ידי הישרים  $x = a + 2$  ו-  $x = a + 3$  (השטח האפור בציור).

ב. חשב את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .

## תשובה לשאלה 8

א. אסימפטוטות:  $x = a$

$$y = 0$$

ב. נקודת החיתוך של f(x) עם ציר ה-x:  $f(x) = 0 \Rightarrow x = a$

$\Downarrow$

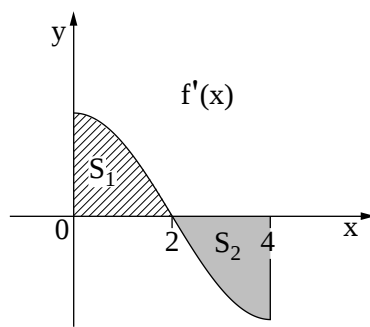
$$S_1 = \int_a^{a+2} (x-a)^2 dx = \left[ \frac{(x-a)^3}{3} \right]_a^{a+2} = \frac{2^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}$$

$$S_2 = \int_{a+2}^{a+3} \frac{16}{(x-a)^2} dx = \left[ -\frac{16}{x-a} \right]_{a+2}^{a+3} = -\frac{16}{3} + \frac{16}{2} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = 1$$

היחס הוא:

## שאלה 9



בציור מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$

בתחום  $0 \leq x \leq 4$ .

הגרף של  $f'(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2$ .

$S_1$  הוא השטח המוגבל על ידי הגרף

של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$

ועל ידי הצירים (השטח המקווקו בציור).

$S_2$  הוא השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ ,

על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישר  $x = 4$  (השטח האפור בציור).

א. (1) נתון:  $f(0) = 0$ ,  $S_1 = 4$ .

חשב את  $f(2)$ .

(2) נתון גם:  $S_2 = 4$ .

חשב את  $f(4)$ .

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון הפנימית של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון,

וקבע את סוגה. נמק.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.

## תשובה לשאלה 9

$$\text{א. (1) } I. S_1 = \int_0^2 f'(x) dx = [f(x)]_0^2 = f(2) - f(0)$$

לפי הנתון:  $f(0) = 0$ ,  $S_1 = 4$

מ- I ו- II מקבלים:  $f(2) = 4$

$$\text{(2) } III. S_2 = - \int_2^4 f'(x) dx = - [f(x)]_2^4 = - (f(4) - f(2))$$

לפי הנתון:  $S_2 = 4$ , ומצאנו:  $f(2) = 4$

מ- III ו- IV מקבלים:  $f(4) = 0$

המשך תשובה לשאלה 9.

ב. לפי הגרף מקבלים:

| x       | $0 \leq x < 2$ | 2 | $2 < x \leq 4$ |
|---------|----------------|---|----------------|
| $f'(x)$ | +              | 0 | -              |
| $f(x)$  | $\nearrow$     |   | $\searrow$     |

לכן לפונקציה  $f(x)$  יש מקסימום בנקודה:  $(2, 4)$

ג. על פי תוצאות הסעיפים הקודמים:

